MAP2310 - Métodos Numéricos em Equações Diferenciais I

1º Semestre de 2018 - Prof. Nelson Kuhl

Exercício Programa

O objetivo deste exercício programa é fazer alguns testes com o método Dormand-Price para a resolução de problemas de valor inicial em equações diferenciais ordinárias. Este método consiste em um par embutido de métodos Runge-Kutta de ordens 4 e 5 com controle automático do tamanho do passo. É um método explícito com 6 avaliações do lado direito por passo.

Há várias implementações deste método. Na linguagem PYTHON você pode escolher o método *dopri5* na classe "scipy.integrate.ode"ou então usar a classe "scipy.integrate.RK45".

Problema restrito dos três corpos

O problema restrito dos três corpos é obtido das equações de Newton para a atração gravitacional entre três corpos quando um deles tem massa desprezível em relação às massas dos outros dois. Vamos considerar a aproximação na qual os corpos massivos de massas $m_1 > m_2$ movem-se em uma órbita circular em torno do centro de massa, e também vamos considerar o movimento do terceiro corpo restrito ao plano do movimento dos corpos massivos.

Em um referencial no qual os corpos massivos estão em repouso, usando-se unidades convenientes, as equações para as coordenadas (x, y) do terceiro corpo ficam

$$\ddot{x} = x + 2\dot{y} - \frac{\mu^*(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-\mu^*)}{r_2^3}$$
$$\ddot{y} = y - 2\dot{x} - \frac{\mu^* y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}$$

onde $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$, $\mu^* = 1 - \mu$ e

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}$$
$$r_2 = \sqrt{(x-\mu^*)^2 + y^2}$$

O corpo 1 está na posição $(-\mu, 0)$ e o corpo 2 na posição $(1-\mu, 0)$.

Para os dois problemas de valor inicial abaixo, sabe-se que a solução é periódica de período T:

a) $x(0) = 1.2$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -1.04935750983031990726$, com $\mu = 1/82.45$ e $T = 6.19216933131963970674$;

b) $x(0) = 0.994$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -2.00158510637908252241$, com $\mu = 0.012277471$ e $T = 17.06521656015796255889$.

Em cada um dos casos, use o Método Dormand-Prince para calcular a solução de $t = 0$ até $t = T$, com tolerância 10^{-7} tanto para o erro absoluto como para

o erro relativo. Não se esqueça de transformar o problema em um sistema de EDOs de primeira ordem.

Verifique a precisão do método comparando-se os valores $(x(0), y(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0))$ com $(x(T), y(T), \dot{x}(T), \dot{y}(T))$. Apresente o número de avaliações do lado direito e compare-o com o número de avliações do lado direito que seria necessário com o menor passo de tempo usado pelo método. Apresente também o gráfico $(x(t), y(t))$ para t nos instantes onde as aproximações foram calculadas.

Para este problema, a grandeza

$$J(t) = 0.5 * \left[\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 - x(t)^2 - y(t)^2\right] - \frac{\mu^*}{r_1(t)} - \frac{\mu}{r_2(t)},$$

conhecida como integral de Jacobi, é constante. Calcule $J(t) - J(0)$ em cada passo e verifique se o resultado é compatível, dentro da tolerância especificada.