

## LISTA DE EXERCÍCIOS 3

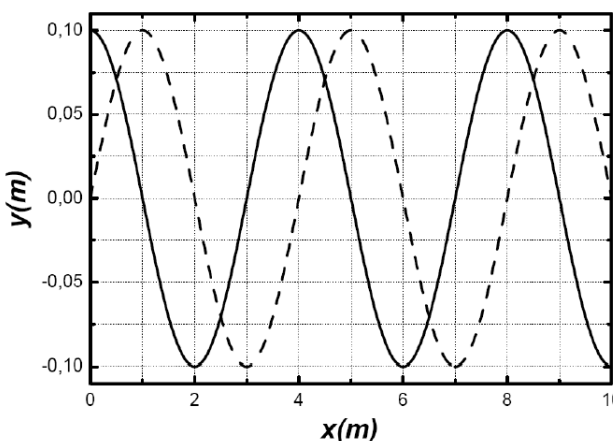
Esta lista trata dos conceitos de ondas harmônicas progressivas (função de onda, intensidade, interferência, velocidade de propagação, frequência, período, comprimento de onda, número de onda, etc), ondas estacionárias, modos normais e ondas sonoras (intensidade, efeito Doppler, velocidades supersônicas). Tais conceitos são abordados nos capítulos 5 (seções 5.1 a 5.7) e 6 (seções 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.8 e 6.9) do livro-texto:

- Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, vol. 2. - Fluidos, Oscilações e Ondas e Calor.

### Ondas harmônicas progressivas

1. **Tsunami!** Em 26 de dezembro de 2004, um forte terremoto ocorreu na costa da Sumatra e provocou ondas imensas que mataram cerca de 200 mil pessoas. Os satélites que observavam essas ondas do espaço mediram 800 km de uma crista de onda para a seguinte, e um período entre ondas de 1 h. Qual era a velocidade dessas ondas em m/s e km/h em alto mar? A sua resposta ajuda você a entender por que as ondas causaram tamanha devastação? **R:** 220 m/s  $\simeq$  800 km/h.

2. [Poli 2007] A figura abaixo mostra duas fotografias tiradas em instantes de tempo diferentes de uma corda na qual se propaga, no sentido positivo do eixo  $x$ , uma onda harmônica transversal  $y(x, t)$ . A primeira fotografia (linha cheia) foi tirada no instante de tempo  $t = 0$  e a segunda (linha tracejada) no instante de tempo  $t = 0,50$  s.



- (a) Determine a velocidade  $v$  de propagação da onda na corda;
- (b) Determine a amplitude, o número de onda, a frequência angular a constante de fase e escreva a equação do perfil de onda  $y(x, t)$ ;
- (c) Determine a velocidade transversal máxima de um ponto da corda.

**R:** (a)  $v = 2$  m/s (b)  $A = 0,1$  m;  $k = 0,5\pi$  m $^{-1}$ ;  $\omega = \pi$  s $^{-1}$ ;  $\delta = 0$ ;  $y(x, t) = 0,1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \pi t\right)$  m (c) 0,1 $\pi$  m/s.

3. Verifique explicitamente que as seguintes funções são soluções da equação de onda:

- (a)  $y(x, t) = k(x + vt)$ ;
- (b)  $y(x, t) = Ae^{ik(x-vt)}$ , onde  $A$  e  $k$  são constantes e  $i = \sqrt{-1}$ ;

4. A função de onda de uma onda harmônica numa corda é

$$y(x, t) = 0,001 \sin [62,8x + 314t] \quad (x \text{ e } y \text{ em m e } t \text{ em s})$$

- (a) Em que sentido a onda avança e qual a sua velocidade?
- (b) Calcule o comprimento de onda, a frequência e o período da onda.
- (c) Qual a aceleração máxima de um ponto da corda.

**R:** sentido negativo do eixo  $x$  com velocidade  $v = 5 \text{ m/s}$  (b)  $\lambda = 10 \text{ cm}$ ;  $T = 0,02 \text{ s}$  e  $f = 50 \text{ Hz}$  (c)  $a_{\max} = 98,6 \text{ m/s}^2$ .

5. [Poli 2010] O perfil de uma onda transversal progressiva em uma corda muito longa é dado, em unidades do sistema internacional por:

$$y(x, t) = 2,0 \times 10^{-2} \cos [2\pi(0,5x + 10t)]$$

Sabendo que a tensão aplicada na corda é de 100 N, determine:

- (a) a amplitude de vibração desta corda;
- (b) o comprimento de onda e a frequência (em Hz);
- (c) o sentido e a velocidade de propagação da onda;
- (d) a distância, ao longo da corda, entre dois pontos cuja diferença de fase é  $\pi/6$ ;

**R:** (a)  $A = 2,0 \times 10^{-2} \text{ m}$  (b)  $f = 10 \text{ Hz}$  (c)  $v = 20 \text{ m/s}$  no sentido negativo de  $x$  (d) 0,17 m.

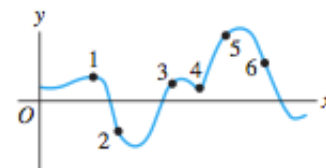
6. [Poli 2006] Uma corda uniforme, de 20 m de comprimento e massa de 2 kg, está esticada sob uma tensão de 10 N. Faz-se oscilar transversalmente uma extremidade da corda, com amplitude de 3 cm e frequência de 5 oscilações por segundo. O deslocamento inicial da extremidade é de 1,5 cm para cima.

- (a) Ache a velocidade de propagação  $v$  e o comprimento de onda  $\lambda$  da onda progressiva gerada na corda.
- (b) Escreva, como função do tempo, o deslocamento transversal  $y$  de um ponto da corda situado à distância  $x$  da extremidade que se faz oscilar, após ser atingido pela onda e antes que ela chegue à outra extremidade.
- (c) Calcule a intensidade  $I$  da onda progressiva gerada.

**R:**  $v = 10 \text{ m/s}$ ,  $\lambda = 2,0 \text{ m}$  (b)  $y(x, t) = 0,03 \cos (\pi x - 10\pi t + \frac{\pi}{3}) \text{ m}$  (c)  $I = \frac{9\pi^2}{200} \text{ W}$ .

## Ondas não-harmônicas

7. A forma de uma onda em uma corda em um instante específico é mostrada na figura. A onda está se deslocando para a direita, no sentido  $+x$ .



- Determine o sentido da velocidade transversal dos seis pontos assinalados sobre a curva. Quando a velocidade for nula, mencione este fato. Explique seu raciocínio.
- Determine o sentido da aceleração transversal dos seis pontos assinalados sobre a curva. Explique seu raciocínio.
- Como suas respostas deveriam ser alteradas se a onda está se deslocando para a esquerda, no sentido  $-x$ ?

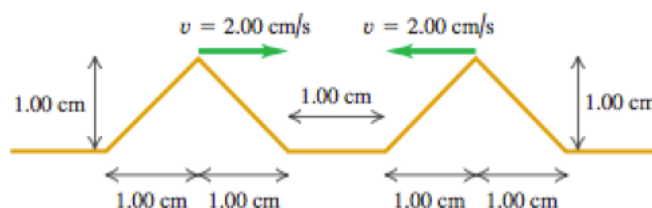
**R:** 1, 0; 2, +; 3, -; 4, 0; 5, -; 6, + (b) 1, -; 2, +; 3, -; 4, +; 5, -; 6, 0; (c) em (a), as respostas teriam o sinal contrário e em (b) não haveria alteração.

## Superposição (interferência) de ondas

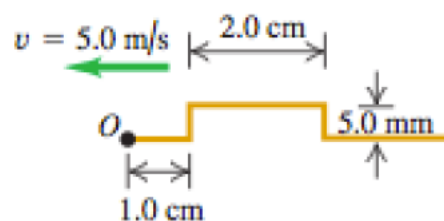
8. Determine a amplitude da onda resultante da combinação de duas ondas senoidais que se propagam no mesmo sentido, possuem mesma frequência, têm amplitudes de 3,0 cm e 4,0 cm, e a onda de maior amplitude está com a fase adiantada de  $\frac{\pi}{2}$  rad.

**R:**  $y(x, t) = 5,0 \sin(kx - \omega t + 0,93)$  cm.

9. Dois pulsos ondulatorios triangulares estão se aproximando em uma corda esticada, como indicado na figura. Os dois pulsos são idênticos e se deslocam com velocidade igual a 2,0 cm/s. A distância entre as extremidades dianteiras dos pulsos é igual a 1,0 cm para  $t = 0$ . Desenhe a forma da corda para  $t = 0,250$  s,  $t = 0,750$  s,  $t = 1,000$  s e  $t = 1,250$  s.



10. **Reflexão.** Um pulso ondulatorio deslocando-se sobre uma corda para  $t = 0$  possui as dimensões indicadas na figura. A velocidade da onda é igual a 5,0 m/s.



- (a) Se o ponto  $O$  for uma extremidade fixa, desenhe a onda total sobre a corda para  $t = 1,0$  ms,  $2,0$  ms,  $3,0$  ms,  $4,0$  ms,  $5,0$  ms,  $6,0$  ms e  $7,0$  ms;
- (b) Repita o item (a) quando o ponto  $O$  for uma extremidade livre.

### Ondas estacionárias e modos normais

11. Uma onda estacionária resulta da soma de duas ondas transversais progressivas dadas por:

$$y_1 = 0,05 \cos(\pi x - 4\pi t) \quad y_2 = 0,05 \cos(\pi x + 4\pi t)$$

onde  $x$ ,  $y_1$  e  $y_2$  estão em metros e  $t$  em segundos.

- (a) Qual é o menor valor positivo de  $x$  que corresponde a um nó?
- (b) Em quais instantes no intervalo  $0 \leq t \leq 0,5$ , a partícula em  $x = 0$  terá velocidade nula?

**R:** (a)  $x = 0,5$  m (b)  $t = 0$  s,  $0,25$  s e  $0,5$  s.

12. [Poli 2010] Uma corda de comprimento  $L$  presa nas extremidades  $x = 0$  e  $x = L$ , submetida a uma tensão de 96 N, oscila no terceiro harmônico de uma onda estacionária. O deslocamento transversal da corda é dado por

$$y(x, t) = 5 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin(6\pi t)$$

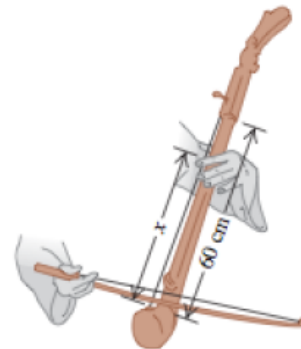
onde  $x$  e  $y$  são dados em metros e  $t$  em segundos.

- (a) Qual é o comprimento  $L$  da corda?
- (b) Qual é a massa da corda?
- (c) Calcule a velocidade transversal máxima de um ponto situado sobre um ventre da onda.
- (d) Se a corda oscilar no quinto harmônico, qual será o período de oscilação?

**R:** (a)  $L = 6$  m (b)  $m = 4,0$  kg (c)  $v_y^{max} = 30\pi$  m/s (d)  $T_5 = 0,2$  m.

13. O segmento de uma corda de certo instrumento entre a ponte de apoio das cordas e a extremidade superior (a parte que vibra livremente) possui comprimento igual a 60,0 cm e massa igual a 2,0 g. Quando tocada, a corda emite um nota  $A_4$  (440 Hz).

- (a) (a) Em que ponto o violoncelista deve colocar o dedo (ou seja, qual é a distância  $x$  entre o ponto e a ponte de apoio das cordas) para produzir uma nota  $D_5$  (587 Hz)? Nas duas notas  $A_4$  e  $D_5$  a corda vibra no modo fundamental.
- (b) Sem afinar novamente, é possível produzir uma nota  $G_4$  (392 Hz) nessa corda? Justifique sua resposta.



**R:** (a) 45 cm, (b) não.

14. Uma corda sob tensão  $T_i$  oscila no terceiro harmônico com uma frequência  $f_3$ , e as ondas na corda tem comprimento de onda  $\lambda_3$ . Se aumentarmos a tensão da corda para  $T_f = 4T_i$ , de forma que a corda continue a oscilar no terceiro harmônico, qual será:

- (a) a frequência de oscilação em termos de  $f_3$ ;  
 (b) o comprimento da onda em termos de  $\lambda_3$ ?

**R:** (a)  $f = 2f_3$  (b)  $\lambda = \lambda_3$ .

15. Uma corda, submetida a uma tensão de 200 N e presa em ambas as extremidades, oscila no segundo harmônico de uma onda estacionária. O deslocamento da corda é dado por:

$$y(x; t) = \frac{1}{10} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin(12\pi t)$$

onde  $x = 0$  numa das extremidades da corda,  $x$  é dado em metros e  $t$  em segundos.

- (a) Qual é o comprimento da corda?  
 (b) Qual é a velocidade escalar das ondas na corda?  
 (c) Qual é a massa da corda?  
 (d) Se a corda oscilar num padrão de onda referente ao terceiro harmônico, qual será o período de oscilação?

**R:** (a)  $L = 4$  m (b)  $v = 24$  m/s (c)  $m = 1,39$  kg e (d)  $T = 0,111$  s.

16. **Desafinada.** A corda  $B$  de uma guitarra feita de aço (densidade igual a  $7800$  kg/m<sup>3</sup>) possui comprimento igual a  $63,5$  cm e diâmetro igual a  $0,406$  mm. A frequência fundamental é  $f = 247$  Hz.

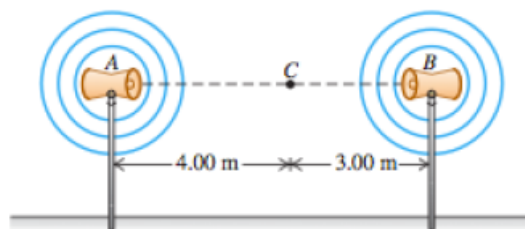
- (a) Ache a tensão na corda.  
 (b) Quando a tensão  $F$  varia de uma pequena quantidade  $\Delta F$ , a frequência  $f$  varia de uma pequena quantidade  $\Delta f$ . Mostre que

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2} \frac{\Delta F}{F}$$

**R:** (a) 99,4 N

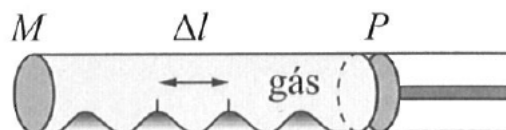
### Ondas sonoras

17. Dois alto-falantes,  $A$  e  $B$ , emitem sons uniformemente no ar, em todas as direções, a  $20^\circ\text{C}$ . A potência acústica emitida por  $A$  é igual a  $8 \times 10^{-4}$  W, e a potência de  $B$  é igual a  $6 \times 10^{-5}$  W. Os dois alto-falantes estão vibrando em fase com frequência igual a  $172$  Hz.



- (a) Determine a diferença de fase entre os dois sinais em um ponto  $C$  ao longo da reta que une  $A$  e  $B$ , a 3 m de  $B$  e 4 m de  $A$ .
- (b) Determine a intensidade e o nível da intensidade sonora no ponto  $C$  devido ao alto-falante  $A$  quando o alto falante  $B$  é desligado, bem com a intensidade e o nível da intensidade sonora devido ao alto-falante  $B$  quando o alto-falante  $A$  é desligado.
- (c) Quando os dois alto-falantes estão ligados, calcule a intensidade e o nível da intensidade sonora no ponto  $C$ .
18. [HMN 6.5] O tubo de Kundt que costumava ser empregado para medir a velocidade do som em gases, é um tubo de vidro que contém o gás, fechado numa extremidade por uma tampa  $M$  que se faz vibrar com uma frequência  $\nu$  conhecida (por exemplo, acoplando-a a um alto falante) e na outra por um pistão  $P$  que se faz deslizar, variando o comprimento do tubo. O tubo contém um pó fino (serragem, por exemplo). Ajusta-se o comprimento do tubo com o auxílio do pistão até que ele entre em ressonância com a frequência  $\nu$ , o que se nota pelo reforço da intensidade sonora emitida.

Observa-se então que o pó fica acumulado em montículos igualmente espaçados, de espaçamento  $\Delta\ell$ , que se pode medir.



- (a) A que correspondem as posições dos topos dos montículos?
- (b) Qual é a relação entre  $\Delta\ell$ ,  $\nu$  e a velocidade do som no gás?
- (c) ~~Com o tubo cheio de  $\text{CO}_2$  a  $20^\circ\text{C}$  e  $\nu = 880$  Hz, o espaçamento médio medido é de 15,2 cm. Qual é a velocidade do som no  $\text{CO}_2$  a  $20^\circ\text{C}$ ?~~

**R:** (b)  $v = 2\nu\Delta\ell$  (c) ~~267,5 m/s~~

### Batimentos

19. Dois violonistas tentam tocar a mesma nota de comprimento de onda igual a 6,50 cm ao mesmo tempo, mas um dos instrumentos está levemente desafinado e toca uma nota de comprimento igual a 6,52 cm. Qual é a frequência de batimentos que esses músicos ouvem quando tocam juntos. **R:**  $\simeq 16$  Hz..
20. Dois tubos de órgão, abertos em uma extremidade e fechados em outra, medem cada um 1,14 m de comprimento. O comprimento de um desses tubos é aumentado em 2 cm. Calcule a frequência de batimentos que eles produzem quando tocam juntos em sua frequência fundamental. **R:** 1,3 Hz.
21. Duas cordas idênticas sob a mesma tensão  $F$  possuem uma frequência fundamental igual a  $f_0$ . A seguir, a tensão em uma delas é aumentada de um valor bastante pequeno  $\Delta F$ .
- (a) Se elas são tocadas ao mesmo em sua frequência fundamental, mostre que a frequência do batimento produzido é  $f_{bat} = \frac{1}{2}f_0 \frac{\Delta F}{F}$ .

- (b) Duas cordas de violino idênticas, quando estão em ressonância e esticadas com a mesma tensão, possuem uma frequência fundamental igual a 440 Hz. Uma das cordas é afinada novamente, tendo sua tensão aumentada. Quando isso é feito, ouvimos 1,5 batimentos por segundo quando as duas cordas são puxadas simultaneamente em seus centros. Em que porcentagem variou a tensão na corda?
- R:**  $\simeq 0,7\%$ .

### Efeitos Doppler (opcional)

22. [HMN 6.12] Dois trens viajam em sentidos opostos, sobre trilhos, com velocidades da mesma magnitude. Um deles vem apitando. A frequência do apito percebida por um passageiro do outro trem varia entre os valores de 348 Hz, quando estão se aproximando, e 249 Hz quando estão se afastando. A velocidade de som no ar é de 340 m/s.

- (a) Qual é a velocidade dos trens (em km/h)?  
(b) Qual é a frequência do apito?

**R:** (a) 90 km/h, (b) 300 Hz

23. [HMN 6.14] Uma fonte sonora fixa emite som de frequência  $\nu_0$ . O som é refletido por um objeto que se aproxima da fonte com velocidade  $u$ . O eco refletido volta para a fonte, onde interfere com as ondas que estão sendo emitidas, dando origem a batimentos, com frequência  $\Delta\nu$ . Mostre que é possível determinar a magnitude  $|u|$  da velocidade do objeto móvel em função de  $\Delta\nu$ ,  $\nu_0$  e da velocidade do som  $v$ . O mesmo princípio é utilizado (com ondas eletromagnéticas em lugar de ondas sonoras) na detecção do excesso de velocidade nas estradas, com auxílio do radar.

**R:**  $|u| = \frac{v\Delta\nu}{2\nu_0 + \Delta\nu}$

24. **Medicina com ultra-som.** Uma onda sonora de 2 MHz se propaga ao longo do ventre de uma mulher grávida, sendo refletida pela parede do coração do feto. A parede do coração se move no sentido do receptor do som quando o coração bate. O som refletido é a seguir misturado com o som transmitido, e 85 batimentos por segundo são detectados. A velocidade do som nos tecidos do corpo é 1500 m/s. Calcule a velocidade da parede do coração do feto no instante em que essa medida é realizada.

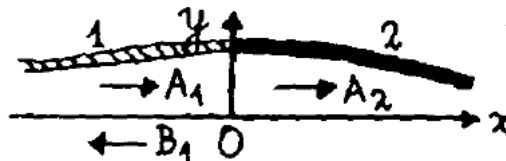
### Velocidades supersônicas e cone de Mach (opcional)

25. [HMN 6.18] Um avião a jato supersônico está voando a Mach 2 (o dobro da velocidade do som).
- (a) Qual é o ângulo de abertura do cone de Mach?  
(b) 2,5 s depois de o avião ter passado diretamente acima de uma casa, a onda de choque causada pela sua passagem atinge a casa, provocando um estrondo sônico. A velocidade do som no ar é de 340 m/s. Qual é a altitude do avião em relação à casa?

**R:** (a)  $30^\circ$  (b) 981 m.

## Desafio

26. [HMN 5.11/5.12] Duas cordas muito longas, bem esticadas, de densidades lineares  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , estão ligadas uma à outra. Toma-se a posição de equilíbrio como eixo  $x$  e a origem  $O$  no ponto de junção, sendo  $y$  o deslocamento transversal da corda (figura).



Uma onda harmônica progressiva  $y_i(x, t) = A_1 \cos(k_1 x - \omega t)$ , viajando na corda 1 ( $x < 0$ ), incide sobre o ponto de junção, fazendo-o oscilar com frequência angular  $\omega$ . Isto produz na corda 2 ( $x > 0$ ) uma onda progressiva de mesma frequência  $y_t(x, t) = A_2 \cos(k_2 x - \omega t)$  (onda transmitida) e dá origem na corda 1 a uma onda que viaja em sentido contrário  $y_r(x, t) = B_1 \cos(k_1 x + \omega t)$  (onda refletida). Dada a onda incidente  $y_i$ , de amplitude  $A_1$ , deseja-se obter a *amplitude de reflexão*  $\rho \equiv B_1/A_1$  e a *amplitude de transmissão*  $\tau \equiv A_2/A_1$ .

- Dada a tensão  $T$  da corda, calcule as velocidades de propagação  $v_1$  e  $v_2$  nas cordas 1 e 2, bem como os respectivos números de onda  $k_1$  e  $k_2$ . O deslocamento total na corda 1 é  $y_i + y_r$  e na corda 2 é  $y_t$ .
- Mostre que, no ponto de junção  $x = 0$ , deve-se ter  $y_i(0, t) + y_r(0, t) = y_t(0, t)$ .
- Aplicando a 3a lei de Newton ao ponto de junção  $x = 0$ , mostre que, nesse ponto, deve-se ter também

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} (y_i + y_r) \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial y_t}{\partial x} \right|_{x=0}$$

- A partir de (b) e (c), calcule as amplitudes de reflexão e transmissão  $\rho$  e  $\tau$  em função das velocidades  $v_1$  e  $v_2$ . Discuta o sinal de  $\rho$ .

A *refletividade*  $r$  da junção é definida como a razão entre a intensidade da onda refletida e a intensidade da onda incidente e a *transmissividade*  $t$  como a razão entre a intensidade da onda transmitida e a intensidade da onda incidente.

- Calcule  $r$  e  $t$ .
- Mostre que  $r + t = 1$  e interprete esse resultado.