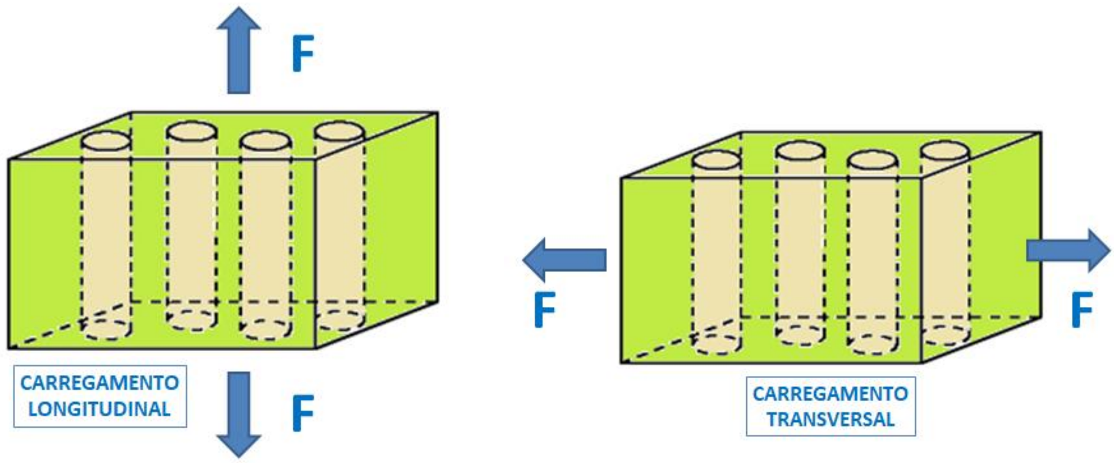
UNIDADE 19 Materiais Compósitos

1. A figura abaixo representa duas configurações possíveis de carregamento em compósitos reforçados por fibras longas e contínuas: carregamento longitudinal e carregamento transversal. Deduza para cada caso a relação entre o módulo de elasticidade do compósito nas configurações de carregamento longitudinal (E_L) e de carregamento transversal (E_T) em função das propriedades do reforço (E_f das fibras) e da matriz (E_m da matriz) e de suas respectivas frações volumétricas (V_f e V_m). Assumir que a interação na interface entre as fibras e a matriz é muito boa (em outras palavras, assumir que as fibras aderem muito bem à matriz).



2. Deseja-se produzir um compósito com fibras contínuas e alinhadas, que consista em 45% volume de fibras aramida e 55% volume de matriz de policarbonato (PC). As características mecânicas dos dois materiais (fibra e matriz) são apresentadas na tabela abaixo.

MATERIAL	E (GPa)	LR (MPa)
FIBRAS: Aramida	131	3600
MATRIZ : Policarbonato	2,4	65

É conhecido também que a tensão registrada na matriz de policarbonato quando as fibras de aramida falham é igual a 35 MPa. De posse dessas informações calcule o limite de resistência à tração do compósito e o seu módulo de elasticidade longitudinal.

(exercício 16.8, Callister, 8ª Edição)

3. Demonstre que a expressão abaixo

$$\frac{F_f}{F_m} = \frac{E_f \cdot V_f}{E_m \cdot V_m}$$

onde : F_f *e* F_m → *carga à qual estão submetidas, respectivamente, fibras e matriz*
E_f *e* E_m → *módulo de elasticidade, respectivamente, das fibras e da matriz*
V_f *e* V_m → *fração volumétrica, respectivamente, das fibras e da matriz*

é válida para a situação em que um compósito de matriz polimérica reforçado com fibras longas, contínuas e alinhadas é submetido a um esforço longitudinal (ou seja, um esforço paralelo à direção das fibras).

4. Considere um compósito de matriz polimérica (resina poliéster; fração volumétrica da matriz 60%; módulo de elasticidade da matriz E_m = 3,4 GPa), reforçado com fibras longas, contínuas e alinhadas (fibras de vidro; fração volumétrica das fibras = 40%; módulo de elasticidade das fibras E_f = 69 GPa).

(a) Determine o módulo de elasticidade do compósito quando submetido a um esforço longitudinal (ou seja, alinhado às fibras).

(b) Determine o módulo de elasticidade do compósito quando submetido a um esforço transversal (ou seja, perpendicular ao sentido das fibras).

(c) Se a área de seção transversal do compósito é igual a 250 mm^2 e uma tensão de 50 MPa for aplicada ao compósito na direção longitudinal, calcule qual será a carga aplicada em cada uma das fases – na fase fibra (F_f) e na fase matriz (F_m).

(d) Nas condições indicadas no item (c), calcule qual é a tensão aplicada em cada uma das fases – na fase fibra (σ_f) e na fase matriz (σ_m).

5. Em um compósito produzido com fibras de carbono contínuas a alinhadas em uma matriz de Nylon 6,6, submetido a tensão longitudinal, as fibras suportam 97% da carga aplicada. Considere os dados de propriedades mecânicas apresentados na tabela a seguir e calcule:

(a) a fração volumétrica das fases matriz e fibra;

(b) o limite de resistência à tração do compósito, assumindo que a tensão registrada na matriz de Nylon 6,6 quando as fibras de carbono falham é igual a 50 MPa.

Material	Módulo de Elasticidade (GPa)	Limite de Resistência (MPa)
Fibras : fibras de carbono	260	4000
Matriz : Nylon 6,6	2,8	76

(exercício 16.12, Callister, 8ª Edição)

6. Um compósito produzido com fibras contínuas a alinhadas que tem uma seção transversal de 970 mm^2 é submetido a uma carga longitudinal. As tensões suportadas respectivamente pela fase fibra e pela fase matriz são iguais a 215 MPa e 5,38 MPa. A força suportada pela fase fibra é igual a 76800 N, e a deformação longitudinal do compósito é igual a $1{,}56 \times 10^{-3}$. Considerando essas informações, calcule:

(a) a força suportada pela fase matriz;

(b) o módulo de elasticidade do compósito (assumindo que o carregamento é longitudinal);

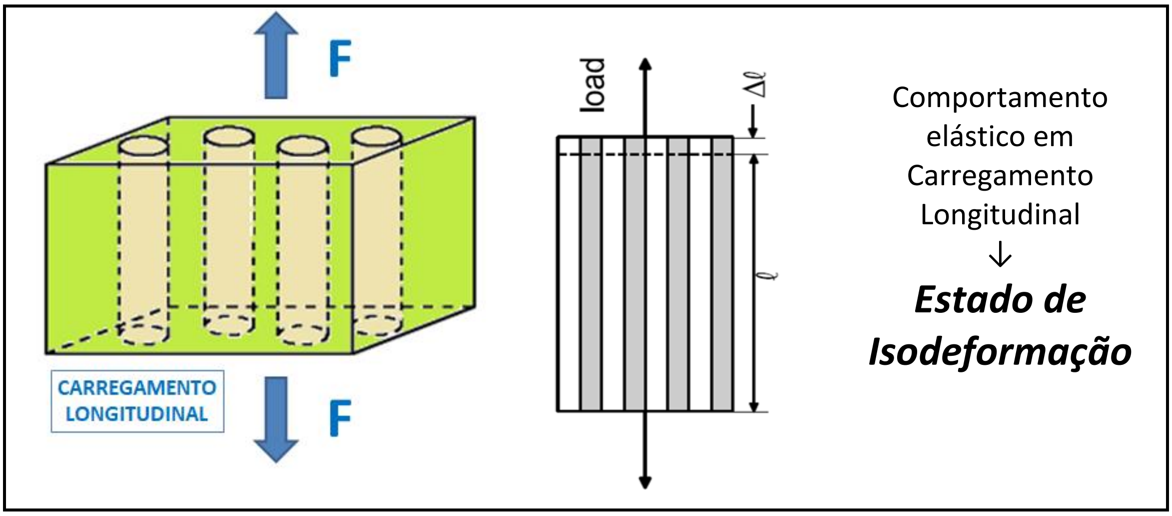
(c) os módulos de elasticidade das fases fibra e matriz.

(exercício 16.14, Callister, 8ª Edição)

GABARITO
UNIDADE 19 Materiais Compósitos

1. A figura abaixo representa duas configurações possíveis de carregamento em compósitos reforçados por fibras longas e contínuas: carregamento longitudinal e carregamento transversal. Deduza para cada caso a relação entre o módulo de elasticidade do compósito nas configurações de carregamento longitudinal ($E_{c,L}$) e de carregamento transversal ($E_{c,T}$) em função das propriedades do reforço (E_f das fibras) e da matriz (E_m da matriz) e de suas respectivas frações volumétricas (V_f e V_m). Assumir que a interação na interface entre as fibras e a matriz é muito boa (em outras palavras, assumir que as fibras aderem muito bem à matriz).

Carregamento LONGITUDINAL



Considerando um carregamento longitudinal – ou seja, realizado na direção do alinhamento das fibras contínuas – e assumindo que a interação na interface entre as fibras e a matriz é muito boa, podemos escrever que a carga ao qual o compósito é submetido é igual à soma das cargas às quais a matriz e as fibras são submetidas individualmente:

$$F_{c,L} = F_m + F_f$$

Lembrando que

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \text{e que} \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

temos que

$$\sigma_{c,L} \cdot A_{c,L} = \sigma_m \cdot A_m + \sigma_f \cdot A_f \quad .$$

Dividindo toda a expressão pela seção transversal $A_{c,L}$, temos que:

$$\sigma_{c,L} = \sigma_m \cdot \frac{A_m}{A_{c,L}} + \sigma_f \cdot \frac{A_f}{A_{c,L}} \quad .$$

onde $\frac{A_m}{A_{c,L}}$ e $\frac{A_f}{A_{c,L}}$ são, respectivamente, a fração em área das fases matriz e fibras.

Essas frações podem ser aproximadas pelas suas frações volumétricas V_m e V_f :

$$V_m = \frac{A_m}{A_{c,L}} \qquad \text{e} \qquad V_f = \frac{A_f}{A_{c,L}}$$

Assim, temos :

$$\sigma_{c,L} = \sigma_m \cdot V_m + \sigma_f \cdot V_f$$

A situação de carregamento longitudinal num caso em que a interação na interface entre as fibras e a matriz é muito boa equivale a um estado de deformação homogênea e equivalente, ou seja :

$$\varepsilon_{c,L} = \varepsilon_m = \varepsilon_f$$

Dessa forma, dividindo a equação da tensão longitudinal $\sigma_{c,L}$ pela deformação, e assumindo que tanto a matriz quanto as fibras estão em regime de deformação elástica, temos:

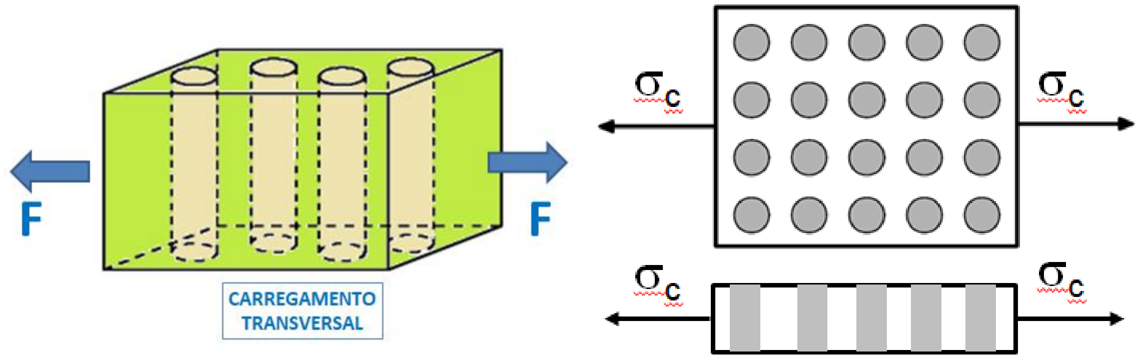
$$\frac{\sigma_{c,L}}{\varepsilon_{c,L}} = E_{c,L} = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m} \cdot V_m + \frac{\sigma_f}{\varepsilon_f} \cdot V_f = E_m \cdot V_m + E_f \cdot V_f$$

A expressão solicitada pode ser escrita, então :

$$\boldsymbol{E_{c,L} = E_m \cdot V_m + E_f \cdot V_f = E_m \cdot (1 - V_f) + E_f \cdot V_f}$$

Módulo de elasticidade para compósitos contendo fibras longas e alinhadas
Carga aplicada na direção **longitudinal** das fibras

Carregamento TRANSVERSAL



Comportamento elástico em Carregamento Transversal → ***Estado de Isotensão***

No carregamento transversal, temos:

$$\sigma_{c,T} = \sigma_m = \sigma_f = \sigma$$

A deformação do compósito, nessa situação, é igual à soma das deformações da matriz e das fibras, ponderadas pelas respectivas frações volumétricas :

$$\varepsilon_{c,T} = \varepsilon_m \cdot V_m + \varepsilon_f \cdot V_f \quad .$$

Essa equação pode ser re-escrita considerando que a deformação é elástica, e portanto vale que $\varepsilon = \sigma / E$:

$$\frac{\sigma_{c,T}}{E_{c,T}} = \frac{\sigma_m \cdot V_m}{E_m} + \frac{\sigma_f \cdot V_f}{E_f} \quad .$$

Como as tensões são iguais, dividindo a equação acima pela tensão σ, temos que:

$$\frac{1}{E_{c,T}} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f}$$

Essa equação pode ser rearranjada, resultando em :

$$E_{c,T} = \frac{E_m \cdot E_f}{V_m \cdot E_f + V_f \cdot E_m} = \frac{E_m \cdot E_f}{(1 - V_f) \cdot E_f + V_f \cdot E_m}$$

Módulo de elasticidade para compósitos contendo fibras longas e alinhadas
Carga aplicada na direção **transversal** das fibras

2. Deseja-se produzir um compósito com fibras contínuas e alinhadas, que consista em 45% em volume de fibras aramida e 55% em volume de matriz de policarbonato (PC). As características mecânicas dos dois materiais (fibra e matriz) são apresentadas na tabela abaixo.

MATERIAL	E (GPa)	LR (MPa)
FIBRAS: Aramida	131	3600
MATRIZ : Policarbonato	2,4	65

É conhecido também que a tensão registrada na matriz de policarbonato quando as fibras de aramida falham é igual a 35 MPa. De posse dessas informações calcule o limite de resistência à tração do compósito e o seu módulo de elasticidade longitudinal.

Módulo de Elasticidade LONGITUDINAL

O módulo de elasticidade longitudinal de um compósito com fibras contínuas e alinhadas foi deduzido no **Exercício 1** desta lista. A expressão que permite o seu cálculo é a seguinte :

$$E_{c,L} = E_m \cdot V_m + E_f \cdot V_f$$

Substituindo os valores mencionados no enunciado, chegamos a :

$$E_{c,L} = 2{,}4\ GPa \cdot 0{,}55 + 131\ GPa \cdot 0{,}45 = 60{,}3\ GPa$$

Limite de Resistência à Tração do compósito → fibras longas e contínuas, carregamento longitudinal

A expressão que permite o cálculo do limite de resistência à tração do compósito nas condições especificadas no enunciado do exercício é a seguinte :

$$\sigma_{c,L}^{*} = \sigma_f^{*} \cdot V_f + \sigma_m' \cdot (1 - V_f)$$

onde:

$\sigma^{*}_{c.L}$ → limite de resistência à tração do compósito

σ^{*}_{f} → limite de resistência à tração da fibra

σ'_{m} → tensão na matriz no momento em que a fibra falha

Substituindo os valores mencionados no enunciado, chegamos a :

$$\sigma^*_{c,L} = 3600 \cdot 0{,}45 + 35 \cdot (1 - 0{,}45) = 1639\ MPa$$

3. Demonstre que a expressão abaixo

$$\frac{F_f}{F_m} = \frac{E_f \cdot V_f}{E_m \cdot V_m}$$

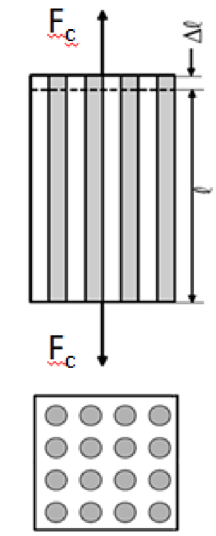
onde : *F_f e F_m → carga à qual estão submetidas, respectivamente, fibras e matriz*
E_f e E_m → módulo de elasticidade, respectivamente, das fibras e da matriz
V_f e V_m → fração volumétrica, respectivamente, das fibras e da matriz

é válida para a situação em que um compósito de matriz poliméria reforçado com fibras longas, contínuas e alinhadas é submetido a um esforço longitudinal (ou seja, um esforço paralelo à direção das fibras).

Inicialmente, lembramos que vale a relação a seguir, tanto para as fibras, quanto para a matriz : $\sigma = \frac{F}{A}$.

Assim, temos :

$$\frac{F_f}{F_m} = \frac{\sigma_f \cdot A_f}{\sigma_m \cdot A_m}$$



Sessão transversal

Dividindo numerador e denominador pela área de seção transversal total do compósito, chegamos a :

$$\frac{F_f}{F_m} = \frac{\sigma_f \cdot A_f}{\sigma_m \cdot A_m} = \frac{\sigma_f \cdot \frac{A_f}{A_c}}{\sigma_m \cdot \frac{A_m}{A_c}}$$

Podemos admitir que a relação entre a área de seção transversal das fibras e a área de seção transversal do compósito é igual à fração volumétrica das fibras V_f (afinal, as fibras são longas e alinhadas, como mostra a figura ao lado...). Analogamente, a mesma relação é válida para a matriz.

Dessa forma, temos:

$$\frac{F_f}{F_m} = \frac{\sigma_f \cdot A_f}{\sigma_m \cdot A_m} = \frac{\sigma_f \cdot \frac{A_f}{A_c}}{\sigma_m \cdot \frac{A_m}{A_c}} = \frac{\sigma_f \cdot V_f}{\sigma_m \cdot V_m}$$

Admitindo que tanto as fibras, quanto a matriz estejam sendo deformadas em regime elástico, vale a relação $\sigma = E \,.\, \varepsilon$. Podemos então escrever:

$$\frac{F_f}{F_m} = \frac{\sigma_f \cdot A_f}{\sigma_m \cdot A_m} = \frac{\sigma_f \cdot \frac{A_f}{A_c}}{\sigma_m \cdot \frac{A_m}{A_c}} = \frac{\sigma_f \cdot V_f}{\sigma_m \cdot V_m} = \frac{E_f \cdot \varepsilon_f \cdot V_f}{E_m \cdot \varepsilon_m \cdot V_m}$$

Como a situação proposta no enunciado é uma situação de isodeformação, é válido dizer que $\varepsilon = \varepsilon_f = \varepsilon_m$. Chegamos assim à expressão final que desejávamos demonstrar:

$$\boldsymbol{\frac{F_f}{F_m}} = \frac{\sigma_f \cdot A_f}{\sigma_m \cdot A_m} = \frac{\sigma_f \cdot \frac{A_f}{A_c}}{\sigma_m \cdot \frac{A_m}{A_c}} = \frac{\sigma_f \cdot V_f}{\sigma_m \cdot V_m} = \frac{E_f \cdot \varepsilon_f \cdot V_f}{E_m \cdot \varepsilon_m \cdot V_m} = \boldsymbol{\frac{E_f \cdot V_f}{E_m \cdot V_m}}$$

4. Considere um compósito de matriz polimérica (resina poliéster; fração volumétrica da matriz 60%; módulo de elasticidade da matriz E_m = 3,4 GPa), reforçado com fibras longas, contínuas e alinhadas (fibras de vidro; fração volumétrica das fibras = 40%; módulo de elasticidade das fibras E_f = 69 GPa).

(a) Módulo de elasticidade do compósito submetido a um esforço longitudinal

A expressão utilizada para esse cálculo é a seguinte:

$$E_{c,L} = E_m \cdot V_m + E_f \cdot V_f$$

Substituindo os valores mencionados no enunciado, chegamos a :

$$E_{c,L} = 3{,}4\ GPa \cdot 0{,}60 + 69\ GPa \cdot 0{,}40 = 30\ GPa$$

(b) Módulo de elasticidade do compósito submetido a um esforço transversal

A expressão utilizada para esse cálculo é a seguinte:

$$E_{c,T} = \frac{E_m \cdot E_f}{V_m \cdot E_f + V_f \cdot E_m}$$

Substituindo os valores mencionados no enunciado, chegamos a :

$$E_{c,T} = \frac{3{,}4\ GPa \cdot 69\ GPa}{0{,}60 \cdot 69\ GPa + 0{,}40 \cdot 3{,}4\ GPa} = 5{,}5\ GPa$$

(c) Carga aplicada em cada uma das fases – na fase fibra (F_f) e na fase matriz (F_m)

Sabe-se que nessa condição de aplicação de carga, a carga suportada pelo compósito é igual à soma das cargas suportadas pela matriz e pelas fibras :

$$F_c = F_m + F_f$$

A carga suportada pelo compósito pode ser calculada por meio dos dados do enunciado:

$$F_c = \sigma_c \cdot A_c = 50MPa \cdot 250\ mm^2 = 12500\ N$$

Para calcular as cargas suportadas tanto pelas fibras, quanto pela matriz, primeiramente precisamos saber qual é a fração da carga que é suportada por cada uma das fases – isso pode ser feito por meio da relação que foi deduzida no exercício 3 desta lista:

$$\frac{F_f}{F_m} = \frac{E_f \cdot V_f}{E_m \cdot V_m}$$

Substituindo os valores mencionados no enunciado, chegamos a :

$$\frac{F_f}{F_m} = \frac{E_f \cdot V_f}{E_m \cdot V_m} = \frac{69\ GPa \cdot 0{,}40}{3{,}4\ GPa \cdot 0{,}60} = 13{,}5$$

Com essa relação calculada, podemos escrever:

$$F_c = 12500\ N = F_m + 13{,}5\ F_m \rightarrow \boldsymbol{F_m = \frac{12500}{14{,}5} = 862\ N}$$

e

$$F_c = 12500\ N = 862 + F_f \rightarrow \boldsymbol{F_f = 12500 - 862 = 11638\ N}$$

(d) tensão em cada uma das fases – na fase fibra (σ_f) e na fase matriz (σ_m).

Pelos cálculos realizados no item anterior, sabemos qual é a força aplicada em cada uma das fases.

Sabemos qual é a área de seção transversal total do compósito, e sabemos quais são as frações volumétricas de cada uma das fases. Como as frações volumétricas de cada uma das fases (V_m e V_f) podem ser igualadas às frações de área de seção transversal uma vez as fibras são longas, contínuas e alinhadas, podemos calcular as áreas de seção transversal das fibras e da matriz, e, consequentemente, podemos calcular as tensões da seguinte forma:

$$\sigma_m = \frac{F_m}{A_m} = \frac{F_m}{A_c \cdot V_m} = \frac{862\ N}{250\ mm^2 \cdot 0{,}60} = 5{,}75\ MPa$$

e

$$\sigma_f = \frac{F_f}{A_f} = \frac{F_f}{A_c \cdot V_f} = \frac{11638\ N}{250\ mm^2 \cdot 0{,}40} = 116{,}4\ MPa$$

5. Em um compósito produzido com fibras de carbono contínuas em uma matriz de Nylon 6,6, submetido a tensão longitudinal, as fibras suportam 97% da carga aplicada.

Material	Módulo de Elasticidade (GPa)	Limite de Resistência (MPa)
Fibras : fibras de carbono	260	4000
Matriz : Nylon 6,6	2,8	76

(a) fração volumétrica das fases matriz e fibra

Em exercícios anteriores (por exemplo, exercício 3 desta lista) foi apresentada uma expressão que permite o cálculo da relação entre a carga suportada pela fase fibra e a carga suportada pela fase matriz. Essa expressão é :

$$\frac{F_f}{F_m} = \frac{E_f \cdot V_f}{E_m \cdot V_m}$$

O enunciado do exercício nos diz que 97% da carga suportada pelo compósito é suportada pela fase fibra. Desse modo:

$$\frac{F_f}{F_m} = \frac{0{,}97F_c}{0{,}03F_c} = 32{,}3 = \frac{E_f \cdot V_f}{E_m \cdot V_m}$$

$$32{,}3 = \frac{E_f \cdot V_f}{E_m \cdot V_m} = \frac{E_f \cdot V_f}{E_m \cdot (1 - V_f)} = \frac{260\ GPa \cdot V_f}{2{,}8\ GPa \cdot (1 - V_f)}$$

Resolvendo essa equação, temos que :

$$\boldsymbol{V_f = 0{,}258}$$

$$\boldsymbol{V_m = 1 - V_f = 0{,}742}$$

(b) limite de resistência à tração do compósito para falha nas fibras igual a 50 MPa

A expressão que permite o cálculo do limite de resistência à tração do compósito nas condições especificadas no enunciado do exercício é a seguinte :

$$\sigma_{c,L}^* = \sigma_f^* \cdot V_f + \sigma_m' \cdot (1 - V_f)$$

Substituindo os valores dados no enunciado na expressão acimas, temos que:

$$\sigma_{c,L}^* = 4000\ MPa\ \cdot 0{,}258 + 50\ MPa \cdot (1 - 0{,}258) = 1069\ MPa$$

6. Um compósito produzido com fibras contínuas a alinhadas que tem uma seção transversal de 970 mm^2 é submetido a uma carga longitudinal. As tensões suportadas respectivamente pela fase fibra e pela fase matriz são iguais a 215 MPa e 5,38 MPa. A força suportada pela fase fibra é igual a 76800 N, e a deformação longitudinal do compósito é igual a 1,56 x 10^{-3}.

(a) a força suportada pela fase matriz

Como o enunciado dá o valor da tensão suportada pela fase matriz, para calcular a força suportada por essa fase teríamos que ter o valor da área da seção transversal dessa fase. Com os dados do enunciado, não é possível calcular diretamente essa área.

No entanto, com os dados do enunciado, é possível calcular a área de seção transversal da fase fibra e, a partir desse valor, calcular a fração volumétrica dessa fase:

$$\sigma_f = \frac{F_f}{A_f} = \frac{F_f}{V_f \cdot A_c}$$

$$\mathrm{V_f} = \frac{\mathrm{F_f}}{\mathrm{\sigma_f \cdot A_c}} = \frac{76800\ \mathrm{N}}{(215 \times 10^6\ \mathrm{N/m^2}) \cdot (970 \times 10^{-6} \mathrm{m^2})} = 0{,}369$$

Assim : $V_m = 1 - V_f = 1 - 0{,}369 = 0{,}631$

Uma expressão análoga àquela que foi escrita para a tensão na fase fibra pode ser escrita para a tensão na fase matriz:

$$\sigma_m = \frac{F_m}{A_m} = \frac{F_m}{V_m \cdot A_c} \quad \rightarrow \quad F_m = \sigma_m \cdot V_m \cdot A_c$$

$$\boldsymbol{F_m} = \sigma_m \cdot V_m \cdot A_c = 0{,}631 \cdot (5{,}38 \times 10^6\ N/m^2)\ \cdot (970 \times 10^{-6} m^2) = \boldsymbol{3293\ N}$$

(b) o módulo de elasticidade longitudinal do compósito

O módulo de elasticidade longitudinal do compósito pode ser calculado a partir dos dados experimentais e dos resultados dos cálculos do item (a) deste exercício.

Como assumidos que o compósito sofre deformação elástica, o módulo de elasticidade do compósito é igual a :

$$E_c = \frac{\sigma_c}{\varepsilon}$$

Como a situação descrita no enunciado é uma situação de carga longitudinal ela é uma situação de isodeformação – e a deformação ε é dada no enunciado.

A tensão σ_c é igual à carga à qual o compósito é submetido (que é igual à soma das cargas às quais a fase fibra e a fase matriz são individualmente submetidas) dividida pela seção transversal do compósito:

$$E_c = \frac{\sigma_c}{\varepsilon} = \frac{\frac{F_m + F_f}{A_c}}{\varepsilon} = \frac{F_m + F_f}{A_c \cdot \varepsilon}$$

$$\boldsymbol{E_c} = \frac{3293\ N + 76800\ N}{(970 \times 10^{-6} m^2) \cdot (1{,}56 \times 10^{-3})} = 52{,}9 \times 10^9\ N/m^2 = \mathbf{52{,}9\ GPa}$$

(c) os módulos de elasticidade das fases fibra e matriz.

Os módulos de elasticidade das fases fibra e matriz podem ser calculados diretamente a partir dos dados presentes no enunciado, uma vez que o compósito esta sendo submetido a uma carga longitudinal → essa situação é uma situação de isodeformação, e tanto as tensões individuais, quanto a deformação foram dadas.

Assim:

$$\boldsymbol{E_f} = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_f} = \frac{\sigma_f}{\varepsilon} = \frac{215 \times 10^6\ N/m^2}{1{,}56 \times 10^{-3}} = 1{,}38 \times 10^{11}\ N/m^2 = \mathbf{138\ GPa}$$

$$\boldsymbol{E_m} = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m} = \frac{\sigma_m}{\varepsilon} = \frac{5{,}38 \times 10^6\ N/m^2}{1{,}56 \times 10^{-3}} = 3{,}45 \times 10^9\ N/m^2 = \mathbf{3{,}45\ GPa}$$