Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Conceitos Básicos da Teoria de Erros

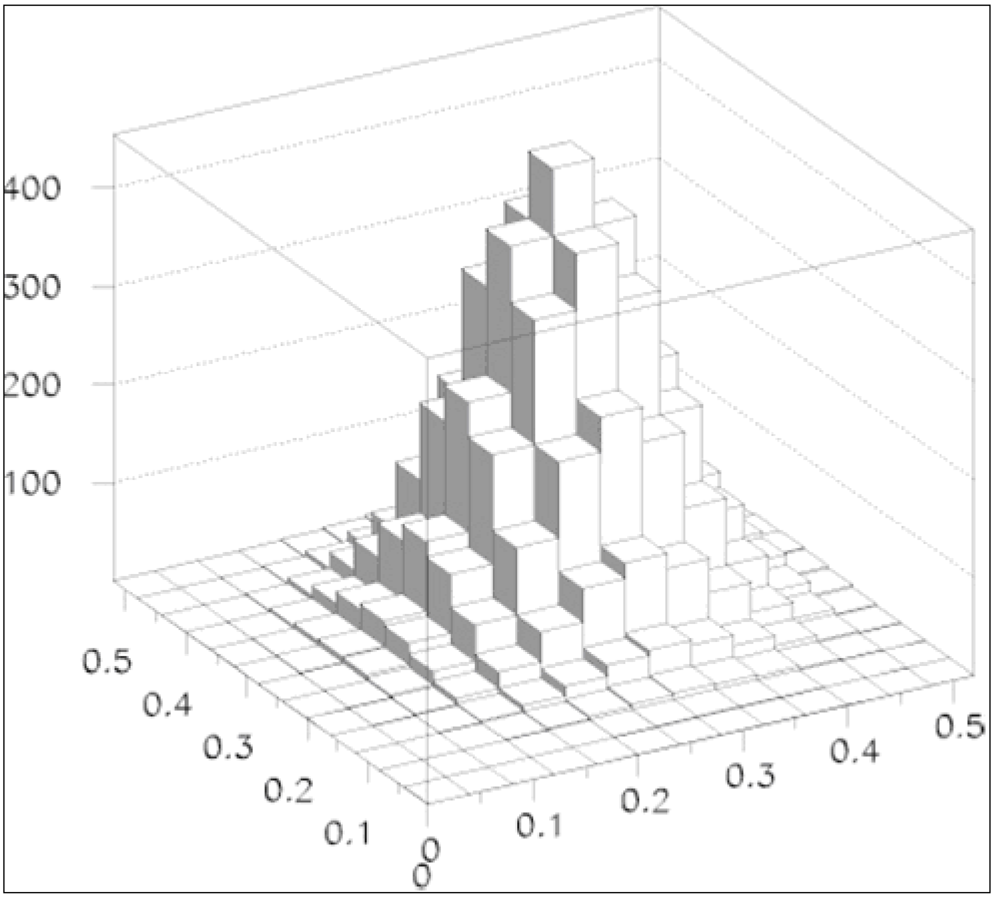


Figura: Prof. Nemitala Added

Prof. Manfredo H. Tabacniks

IFUSP - 2018

“Embora este Guia forneça um esquema para obter a incerteza de medições, ele não substitui o pensamento crítico, a honestidade intelectual e a habilidade profissional. A avaliação da incerteza de medições não é apenas um trabalho matemático, mas depende do conhecimento detalhado da natureza do mensurando e do processo de medição.”

Tradução livre de um trecho do “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements”, International Organization for Standardization, Geneva (1993).

 Para compatibilizar o texto com softwares estatísticos (especialmente os on-line), optamos por usar o PONTO como separador decimal, exceto nos casos que possam gerar confusão. Erros, comentários e dúvidas podem ser endereçados diretamente para o autor: tabacniks@if.usp.br.

1. EXPRESSÃO DO RESULTADO DE UMA MEDIÇÃO

Mesmo sem você se dar conta, a maioria dos resultados de uma medição tem uma incerteza associada. Por exemplo, ao dizer que seu peso, medido numa balança de banheiro, é 75kgf[1] você está provavelmente afirmando que:

$$74\,\mathrm{kgf} < \text{seu peso} < 76\,\mathrm{kgf}$$

Se por outro lado, você tivesse dito que seu peso é 75,000 kgf, estaria afirmando ter usado uma balança extremamente precisa, pois

$$74{,}999\,\mathrm{kgf} < \text{seu peso} < 75{,}001\,\mathrm{kgf}$$

Talvez essa segunda afirmação esteja correta, mas a balança em questão seria uma balança muito especial, capaz de medir menos de 1gf.

Medir uma grandeza, o comprimento de uma barra, o peso de um objeto, a velocidade de um carro, significa comparar a grandeza desejada com algum instrumento de referência. Ao medir o comprimento da barra, pode ocorrer que seus extremos não tenham sido alinhados corretamente com a fita métrica, pode ser que a fita métrica não seja suficientemente rígida ou seu comprimento dependa da temperatura, ou até mesmo que tenha sido marcada erradamente na fábrica. Todos esses "problemas" afetam a medição realizada que, quando repetida, gera um conjunto de valores que variam em torno de um valor central.

Na Tabela 1.1, mostramos os resultados de medições de viscosidade usando dois instrumentos diferentes e o valor nominal, dado pelo fabricante. O valor que segue o símbolo "±" é denominado *incerteza*[2] e expressa *o intervalo de confiança (para mais e para menos) de um desvio padrão*[3], ou seja, o intervalo cuja probabilidade de conter uma medida dessa grandeza é 68%. Apesar da medida "A" estar aparentemente mais próxima do valor nominal, sua incerteza, expressa pelo

---

[1] Uma balança comum, de banheiro, mede a força peso, cuja unidade é o kilograma força (kgf)

[2] Deve-se evitar o termo erro para a incerteza. Se uma medida tem erro ele deve ser corrigido!

[3] Desvio padrão é uma forma de expressar a incerteza. Será definido na seção 3.2.

intervalo de confiança não contém o valor nominal e indica um provável erro de medida, enquanto que a medida com o instrumento “B”, apesar de ter uma incerteza maior, concorda com o valor nominal.

Tabela 1.1. Medidas de viscosidade de um líquido obtidas com dois instrumentos diferentes e o valor nominal dado pelo fabricante.

Instrumento	Viscosidade (poise)
A	$9{,}8 \pm 0{,}4$
B	$12{,}3 \pm 4{,}0$
Valor nominal	9,3

Aproveite para observar o formato da Tabela 1.1. Uma legenda acima da tabela. Apenas três linhas horizontais: os títulos das colunas entre as duas primeiras linhas e uma linha de rodapé. A unidade das grandezas pode ser colocada no título ou junto às medidas. Finalmente, o valor nominal foi fornecido sem incerteza, o que deve ser evitado.

Todo resultado de medição de uma grandeza é composto por:

Nome da grandeza valor medido ± incerteza unidade da medida

2. ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

Quando o valor de uma grandeza é um número muito grande ou muito pequeno, como por exemplo o diâmetro da Via Láctea medido em km, ou o raio de um átomo medido em metros, é conveniente o uso da *notação científica*. Escreve-se o valor com apenas <u>um dígito antes da vírgula</u>, seguido dos algarismos decimais necessários (eventualmente truncando e arredondando o valor em alguma casa decimal) e se multiplica tudo pela potência de dez adequada.

O volume de um sólido: 14269513 mm^3, pode ser escrito como 1,43 x 10^7 mm^3, com apenas duas casas decimais e arredondando o último dígito “para cima” uma vez que 1,4269 está mais próximo de 1,43 que de 1,42. A regra de arredondamento usada foi alterar o último dígito para “cima” caso o próximo dígito seja ≥5, mantendo-o no caso contrário[4]. Ao truncar e arredondar as casas decimais, perdemos algo da informação inicial, que pode ser remediado usando quantos casas decimais forem necessárias. Ao escrever 1,4269513 x 10^7 mm^3 expressamos o valor inicial com toda sua precisão.

Algarismos significativos são todos os algarismos que compõem o valor de uma grandeza, excluindo eventuais zeros à esquerda usados para acerto de unidades. Atenção: ZEROS À DIREITA SÃO SIGNIFICATIVOS. Na Tabela 2.1. um mesmo valor do comprimento de uma barra foi escrito com diferente número de algarismos significativos. Ao expressar uma grandeza, o algarismo significativo mais à direita é denominado *duvidoso*, pois é o algarismo cujo valor pode variar ligeiramente, dependendo do processo de medição.

Tabela 2.1. Valor do comprimento de uma barra expresso com diferente número de algarismos significativos.

Comprimento (mm)	Número de algarismos significativos	Algarismo significativo duvidoso
57,896	5	6
5,79 x 10^1	3	9
5,789600 x 10^1	7	0
0,6 x 10^2	1	6

[4] Existem outras regras de arredondamento, mais complicadas e um pouco mais precisas, mas nenhuma é exata. A regra aqui proposta é também adotada pela maioria das calculadoras e algoritmos em computadores.

O número de algarismos significativos usados para expressar o valor de uma grandeza depende do processo de medida e do instrumento utilizado. Veja o exemplo na Figura 2.1.

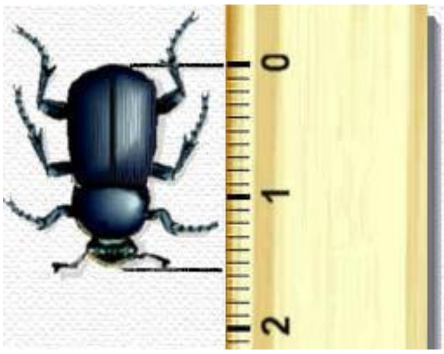


Figura 2.1. Qual das alternativas abaixo melhor representa a medida do tamanho do besouro?

a) Entre 0 e 1 cm
b) Entre 1 e 2 cm
c) Entre 1,5 e 1,6 cm
d) Entre 1,54 e 1,56 cm
e) Entre 1,546 e 1,547 cm

Você acertou se optou pela alternativa d). No resultado de uma medição, o algarismo mais à direita é sempre o duvidoso (não esqueça: o algarismo duvidoso é também um algarismo significativo.). Resumindo: Qualquer medida deve incluir além dos dígitos exatos (1,5 nesse caso) uma estimativa do dígito duvidoso. Uma vez que a régua foi marcada em milímetros você deve estimar o comprimento fracionário (em décimos de mm) que melhor expressa a medida. Você pode não saber ao certo se o valor é 1,54, 1,55 ou mesmo 1,56. **Essa é a expressão da sua incerteza** e por isso o último dígito é duvidoso.

Só para confirmar: Qual o diâmetro da moeda na Figura 2.2?

Figura 2.2. Qual o diâmetro da moeda?

a) Entre 2 e 3 cm
b) Entre 2,6 e 2,7 cm
c) Entre 2,60 e 2,63 cm
d) Entre 2,600 e 2,632 cm

Na Figura 2.2., a *metade da menor divisão* da régua é também uma estimativa da incerteza da medida (que inclui a incerteza de calibração da régua).

Assim, o diâmetro da moeda deve ser expresso como:

$$D = 2{,}62 \pm 0{,}05 \text{ cm}$$

ou, se você preferir

$$D = 2{,}61 \pm 0{,}05 \text{ cm}$$

o último dígito é o duvidoso.

> Algarismos significativos são todos os algarismos que compõem o valor de uma grandeza, excluindo zeros à esquerda usados para acerto de unidades. Zeros à direita são dígitos significativos. O último dígito à direita é o duvidoso.

2.1. Expressão da Incerteza.

Voltemos ao exemplo da Figura 2.2. Quando escrevemos $D = 2{,}62 \pm 0{,}05$ cm, estamos afirmando que o valor medido está entre 2,57 e 2,67 cm. Observe que só podemos calcular o intervalo de confiança se alinharmos as casas decimais. Na Figura 2.4 é fácil perceber que não é possível operar valores indefinidos.

$$\begin{array}{r} 2{,}62 \\ +\ 0{,}05 \\ \hline 2{,}67 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}62 \\ -\ 0{,}05 \\ \hline 2{,}57 \end{array}$$

Figura 2.3. Calculando o intervalo de confiança. O valor medido está entre 2,57 e 2,67 cm.

$$\begin{array}{r} 2{,}6 \\ +\ 0{,}05 \\ \hline 2{,}6? \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}624 \\ +\ 0{,}05 \\ \hline 2{,}67? \end{array}$$

Figura 2.4. Não é possível operar valores indefinidos.

Quando expressamos o valor e a incerteza de uma grandeza, o número de casas decimais do valor e da incerteza associada devem ser iguais. Não confunda número de casas decimais com número de algarismos significativos. O valor de D (2,62 cm) tem 3 algarismos significativos, enquanto que sua incerteza (0,05 cm) tem apenas 1 algarismo significativo. Ambos têm duas casas decimais.

2.1.1. A incerteza da incerteza

Resta saber com quantos algarismos significativos devemos expressar a incerteza de uma medida. O que estamos perguntando é qual a *incerteza da incerteza* de uma medida. A resposta é um pouco complicada. Aqui daremos apenas o resultado final. Queremos saber *o desvio padrão do desvio padrão de uma medida* que denominamos *s(s(m))*. Não se preocupe com o formalismo por enquanto. Importante é o resultado descrito na Tabela 2.3. apresentado por Helene e Vanin (1981). Para N medidas de uma mesma grandeza, *o desvio padrão do desvio padrão* vale:

$$s(s(m)) = \frac{s}{\sqrt{2(N-1)}} \qquad (2.1)$$

onde s é a incerteza associada, ou seja o desvio padrão das medidas (veja definição em 3.2). A Tabela 1.3. resume a incerteza relativa do desvio padrão usando a Eq. 1.1. para alguns valores de *N*.

Tabela 2.3. Incerteza relativa da incerteza em função do número de medidas, *N*.

N	*s(s(m))/s*
3	0,5
5	0,4
10	0,2
30	0,1

Na Tabela 2.3. vimos que a incerteza da incerteza de 3 ou 5 medidas é da ordem de 50%. Apenas quando temos mais de 30 medidas, a incerteza da incerteza é menor que 10%. Ora, uma incerteza de 50% significa que se s = 1, o intervalo de confiança vale {0,5 ; 1,5}. No outro extremo, se s = 8, o intervalo de confiança é dado por {4 ; 12}. Resumindo: em nossos trabalhos de laboratório, onde usamos tipicamente 5 medidas de uma mesma grandeza para obter uma média, de nada adianta escrever a incerteza com dois algarimos significativos, pois a incerteza já é incerta em 50%. Apenas quando trabalhamos com médias de mais de 30 medidas podemos justificar usar dois algarismos significativos para expressar a incerteza. Para N $\approx$ 30 por exemplo 18 < s=20 < 22, ou 72 < s=80 < 88.

Para expressar o resultado de uma medida (N<10):

1) Usar o mesmo número de casas decimais na medida e na sua incerteza;

2) Expressar a incerteza com apenas UM algarismo significativo, aplicando as regras de arredondamento convencionais.

A regra de "**1 algarismo significativo"** para a expressão da incerteza será adotada para simplificar seu primeiro contato com a teria de erros e incertezas. Existem regras mais elaboradas que deverão ser usadas quando a incerteza é obtida com mais precisão.

2.2. Observações sobre algarismos significativos na incerteza

2.2.1. Usar um ou dois algarismos significativos na incerteza

Usar apenas um algarismo significativo na incerteza pode gerar erros de propagação ao combinar ou recalcular suas medidas. Segundo (Vuolo 1992), se o primeiro dígito da incerteza for 1 ou 2 devemos usar 2 algarismos significativos. Quando o primeiro dígito for >2, podemos usar apenas um algarismo significativo para expressar a incerteza de uma medição. Uma regra usual para medidas precisas, quando a incerteza do desvio padrão for pequena, é usar dois algarismos significativos. Outro formato, encontrado com frequência crescente, é expressar as incertezas tipo A e tipo B explicitamente, na forma $x \pm s_A \pm s_B$.

2.2.2. Instrumentos digitais

Num instrumento digital, um circuito interno realiza uma medida analógica que é amostrada por um certo período de tempo e convertida para um valor digital, que por sua vez expressa o valor médio no período amostrado. A precisão da medida depende

Figura 2.5. Um medidor digital

do sensor analógico, do conversor analógico-digital e do tempo de amostragem. No manual do instrumento, a incerteza pode estar expressa da seguinte forma: [0,2% leitura + 1D]. Isso significa que a incerteza da medida vale 0,2% da leitura + 1 no último dígito. No caso da medida ilustrada na Figura 2.5 teremos: 0,2% de 12,3 + 0,1 = 0,024 + 0,1 = 0,1. Concluindo, a medida com sua incerteza será expressa como 12,3 ± 0,1.

Sem saber a precisão de um instrumento digital, não resta alternativa senão supor uma incerteza nominal de ± 1 no último dígito (aliás, é o resultado obtido acima). Assim, sem consultar o manual, a medida do instrumento na Figura 2.5 vale (12,3 ± 0,1). Apesar do primeiro dígito da incerteza ser "1", não podemos expressar a incerteza com 2 algarismos significativos e escrever (12,3 ± 0,10). O dígito duvidoso é um dígito não mostrado à direita do "3", que foi escondido pelo fabricante porque flutua no limite de precisão do instrumento. Poderíamos então supor que a incerteza do instrumento fosse ± 0,05, mas a expressão da medida ficaria novamente sem sentido (12,3 ± 0,05). Podemos tentar inventar um zero à direita e escrever (12,30 ± 0,05) ou, alternativamente, escrever (12,35 ± 0,05) onde supomos que "5" seria o dígito escondido mais provável entre 0 e 9. Nada disso faz sentido. Uma vez que o dígito duvidoso foi escondido pelo fabricante, as regras para expressar a incerteza da medida não podem ser aplicadas.

2.3. Erro e incerteza

Os termos "*erro*" e "*incerteza*" não são sinônimos. Representam conceitos muito diferentes que não devem ser confundidos nem mal empregados.

Erro: O erro é a diferença entre o valor medido e o valor verdadeiro de uma medida. Em geral não é conhecido porque o valor verdadeiro não é conhecido. O erro de uma medida decorre de imperfeições do instrumento e do processo de medida. O erro costuma ser classificado em dois componentes: erro aleatório (ou tipo A) e erro sistemático (ou tipo B). O erro aleatório tem origem em variações imprevisíveis no processo de medida. O erro aleatório pode ser reduzido, aumentando o número de observações. O erro sistemático, tipo B, em geral não pode ser determinado através de procedimentos estatísticos. Caso seja identificado, deve ser corrigido.

Incerteza: É uma estimativa do erro. É um valor, que associado ao resultado de uma medição, caracteriza a dispersão dos valores medidos. Em geral define um intervalo de confiança em torno da medida (ou da média) que, com alguma probabilidade, contém o valor verdadeiro.

3. ESTATÍSTICAS[5]

São procedimentos matemáticos que permitem obter estimativas da grandeza buscada e a incerteza associada, em geral realizados em condições de repetitividade:

3.1. Média

A média aritmética é a melhor estimativa central de um conjunto de medições. É o valor mais provável da grandeza medida:

Média de N medidas de uma grandeza, x_i:	$m = \frac{1}{N}\sum x_i$	(3.1)

OCTAVE[6]	Sugerimos usar o OCTAVE em seus cálculos. Use o ponto como separador decimal.
X = [x1, x2, x3, ...]	Define o vetor com suas medidas
mean(X)	Calcula a média do vetor X

[5] As distribuições de probabilidades foram supostas gaussianas.

[6] OCTAVE É um software GNU livre e uma linguagem de programação de alto nível, para computação numérica. Pode ser instalado em seu computador ou utilizado on line: https://octave-online.net/

Na Tabela 3.1. estão 40 medidas do tempo de queda de um corpo medidos com um cronômetro com precisão nominal de 0,01 s :

Tabela 3.1. Tempos de queda[7] de um corpo, (s) usando um cronômetro com precisão nominal de 0.01 s.

10.37	8.03	14.09	11.65	6.87	6.90	10.26	11.00	13.59	11.48
11.35	10.24	8.20	10.29	9.93	7.67	9.78	13.98	9.89	11.66
10.56	6.78	10.13	12.05	9.72	8.28	8.54	9.78	12.49	5.87
6.02	11.53	9.21	13.63	10.56	12.15	9.90	5.79	13.22	9.28

O valor mais provável do tempo de queda do corpo é dado pela média: $\bar{t} = \frac{1}{40}\sum t = 10{,}07\ s$.

Para calcular a incerteza, graficamos as medidas em ordem de registro, na Figura 3.1. A dispersão das medidas em torno da média (linha vermelha tracejada) é evidente.

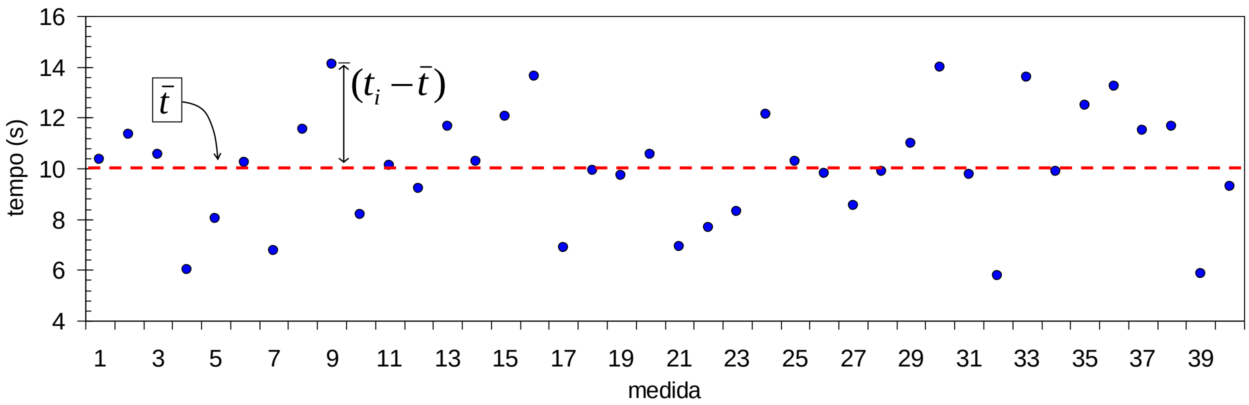


Figura 3.1. 40 medidas do tempo de queda de um corpo. A linha vermelha tracejada mostra a média das medidas.

[7] Recomendamos usar o ponto como separador decimal para maior compatibilidade com softwares internacionais.

3.2. Desvio Padrão

Uma tentativa para medir a dispersão em torno da média poderia ser calcular a soma das distâncias dos pontos até a média, *m*, como indicado na Figura 3.1:

Dispersão linear média: $$\overline{D} = \frac{1}{N}\sum(x_i - m) \qquad (3.2)$$

Infelizmente o resultado é nulo! (demonstre isso). A razão é simples: uma média que se preze deve estar equidistante dos pontos.

A dispersão das medidas em torno do valor verdadeiro, denominada *desvio padrão,* é dada pela raiz quadrada da média das distâncias quadráticas. Para um conjunto finito, com N medidas e média *m*, a *estimativa do desvio padrão,* indicada por *s,* é dada por:

Estimativa do desvio padrão de *N* medidas (amostra)	$$s = \sqrt{\left(\frac{1}{N-1}\right)\sum_{i=1}^{N}(x_i - m)^2}$$	(3.3)

O *desvio padrão*, σ, é a medida da incerteza de *infinitas medidas* (coisa impossível). No cálculo da estimativa do desvio padrão de *N* medidas, a soma foi normalizada para *N-1* medidas. A inclusão da média na somatória Eq. 3.3 remove um grau de liberdade do conjunto (*com a inclusão da média no somatório basta saber N-1 medidas, pois a enésima medida pode ser calculada usando a média)* temos portanto apenas *N-1* valores independentes.

OCTAVE	
X = [x1, x2, x3, ...]	Define o vetor com suas medidas
std(X)	Calcula o desvio padrão do vetor X

A estimativa do desvio padrão dos tempos de queda do corpo: $s_t = 2.25$ segundos. Com um algarismo significativo $s_t = 2$ segundos. Estatisticamente, o *desvio padrão* define o intervalo em torno da média que contém 68,3% das medidas.

Podemos escrever o *intervalo de confiança* que contém 68,3% das medidas de tempo como t = 10 ± 2 segundos. No gráfico da Figura 3.2, temos 25/40 = 63% medidas entre ± 1 desvio padrão, valor próximo do esperado de 68%.

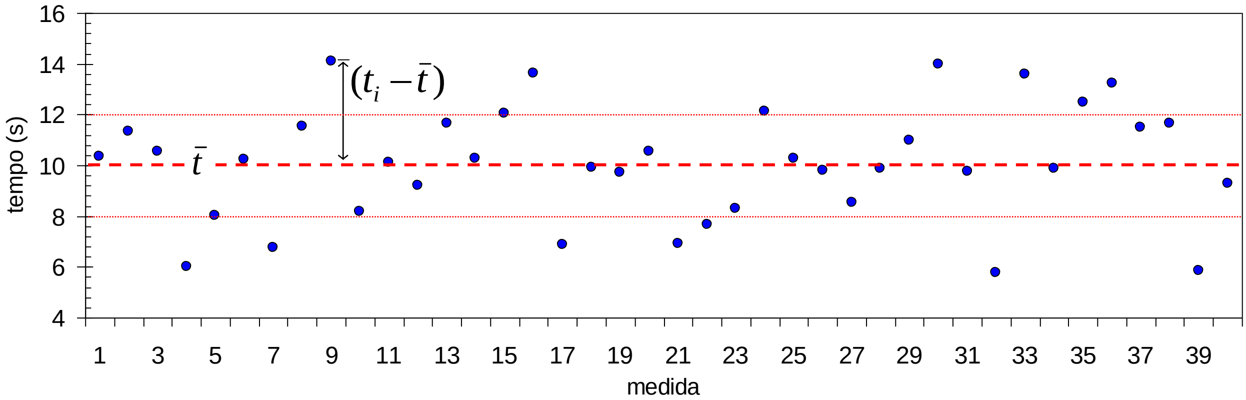


Figura 3.2. 40 medidas do tempo de queda de um corpo. A linha vermelha tracejada mostra a média das medidas. A faixa definida pelas linhas pontilhadas é o intervalo de confiança de 1 desvio padrão.

Se fizermos <u>outro conjunto de 40 medidas</u>, cerca de 27 delas estarão no intervalo t = 10 ± 2 s e cerca de 13 medidas estarão fora desse intervalo. Não há como melhorar esse resultado. A dispersão das medidas é parte do processo de medida.

Há uma outra forma de interpretar esse resultado: dada uma medida *x*, e seu desvio padrão *s*, o intervalo *x* ± *s* tem probabilidade de 68,3% de conter o valor verdadeiro (supondo que não haja erros sistemáticos). Assim, devemos expressar o resultado da segunda medida de tempo mostrada na Tabela 3.1, como: $t_2 = 8 \pm 2$ segundos. Note que tivemos que fazer várias medidas para determinar o desvio padrão de uma única medida.

3.3. Desvio Padrão da Média

Afirmamos anteriormente que a média é a melhor estimativa central de um conjunto de medições. No limite de infinitas medidas e na ausência de erros sistemáticos, a média tende ao valor verdadeiro. Uma média deve ser mais precisa que cada medida individual. Na Figura 3.3 graficamos 40 médias de 40 medidas do tempo de queda de um corpo onde fica evidente que as médias de 40 medidas são mais precisas que medidas simples mostradas na Figura 3.2.

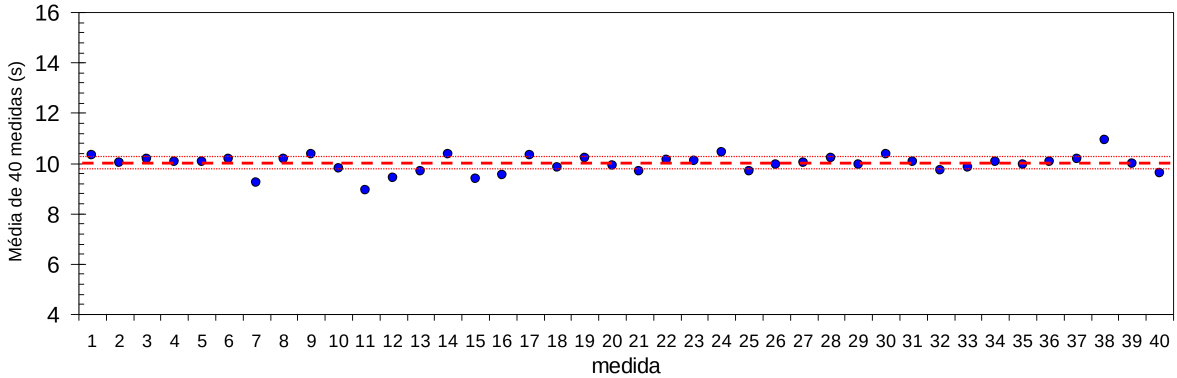


Figura 3.3. 40 médias de 40 medidas do tempo de queda de um corpo.

O desvio padrão das 40 médias de 40 medidas na Figura 3.3 vale $s_m = 0{,}3s$ escrito com 1 algarismo significativo. Em analogia ao item 3.2, podemos escrever para uma média m e desvio padrão de média s_m, o intervalo $m \pm s_m$ com probabilidade de 68,3% de conter o valor verdadeiro (mais uma vez supondo que não haja erros sistemáticos). Assim, podemos expressar a média do conjunto de medições: $\bar{t}_{40} = 10{,}0 \pm 0{,}3$ segundos. Fizemos 40 medidas para determinar o desvio padrão e aproveitamos para calcular uma média mais precisa que cada medida individual. Na Figura 3.3 vimos que o intervalo de confiança da média é menor que o de uma única medida. Isso permitiu escrever a média de 40 tempos de queda com 3 algarismos significativos. Importante: ao publicar uma média é imprescindível publicar também o número de medidas, *N*, caso contrário é impossível comparar dois processos de medida com diferente número de medições.

Revisando: Usando um cronômetro com precisão nominal de 0,01 segundos fizemos as medidas de tempo mostradas na Tabela 3.1 com 2 casas decimais. Desconfiamos que nossa medida não era assim tão precisa e fizemos 40 medidas para determinar o desvio padrão das medidas s = 2 segundos. Escrevemos o intervalo de confiança das medidas de tempo $t_i \pm 2$ segundos. Uma vez que fizemos 40 medidas para determinar o desvio padrão e na esperança de obter um resultado mais preciso, calculamos a média das 40 medidas de tempo: $\bar{t}_{40} = 10{,}0$ s. Para determinar o desvio padrão da média fizemos mais 39 médias de 40 medidas e obtivemos: s_m = 0,3 segundos. Calculamos o desvio padrão das 40 médias com o qual escrevemos o intervalo de confiança da média e respectivo desvio padrão da média, $\bar{t}_{40} = 10{,}0 \pm 0{,}3$ segundos.

Será que existe um método menos trabalhoso para calcular o desvio padrão da média? Podemos provar que se o desvio padrão de uma medida vale s, o desvio padrão da média de N medidas é dado por:

Desvio padrão da média de N medidas	$s_{m,N} = \dfrac{s}{\sqrt{N}}$	(3.6)

No nosso caso $s = 2$ segundos. O desvio padrão da média de 40 medidas deveria ser $s_m = 2/\sqrt{40} = 2/6{,}3 = 0{,}3$ segundos. Exatamente o valor calculado Na Eq. 3.5. Um procedimento muito mais simples que fazer N médias e calcular seu desvio padrão.

É comum encontrar a afirmação que fazemos muitas medidas para melhorar um resultado. Isso é parcialmente verdadeiro. A incerteza de um processo de medida é uma característica do processo expresso pelo desvio padrão, que independe do número de medidas. É verdade que ao realizar muitas medidas pode-se obter um valor médio mais próximo do valor mais provável, uma vez que o desvio padrão da média (que expressa a incerteza da média) varia com $1/\sqrt{n}$. Entretanto, não é comum usar essa abordagem num laboratório. Na prática, quando se deseja uma medida com incerteza menor, procura-se simplesmente um procedimento ou um instrumento melhor (um micrômetro no lugar de um paquímetro, por exemplo). A principal razão para repetir uma medida várias vezes é estimar o desvio padrão.

OCTAVE	
X = [x1, x2, x3, ...]	define o vetor com suas medidas
std(X)/sqrt(N)	calcula o desvio padrão do vetor X dividido pela raiz quadrada de N (substituir N pelo número de medidas, ou definir N anteriormente)

4. PROPAGAÇÃO DE ERROS E INCERTEZAS

4.1. Introdução

Em nosso exemplo anterior usamos um cronômetro com precisão de 0,01 segundos para medir o tempo de queda de um corpo. Concluímos que a incerteza estatística do nosso processo de medida era s = 2 segundos e, após 40 medidas pudemos escrever que o tempo mais provável é:

Valor mais provável de 40 medidas : $\bar{t}_{40} = 10{,}0 \pm 0{,}3$ segundos

Usamos um cronômetro bastante preciso (σ_{cron} = 0,01 s) para obter uma média menos precisa (s_m = 0,3 s).

Temos que combinar a incerteza do cronômetro com a incerteza da nossa medida. A incerteza combinada é definida na Eq. 4.1:

Incerteza combinada
$$s_{comb}^2 = \sigma_{cron}^2 + s^2 \qquad (4.1)$$

onde s pode ser o *desvio padrão* ou o *desvio padrão da média*, dependendo da incerteza que se queira combinar.

A incerteza combinada expressa o seu resultado final. A Eq. 4.1 supõe que a incerteza do cronômetro e das medidas são independentes, o que geralmente é o caso. Casos mais complicados e a justificativa da Eq. 4.1 podem ser encontrados no Guia do Inmetro (GUM, 2008).

OCTAVE	
X = [x1, x2, x3, ...]	Define o vetor com suas medidas
N = 40	Define o número de medidas (40 por exemplo)
stdm= std(X)/sqrt(N)	Define stdm (desvio padrão da média)
s_instr = 0.01	define a incerteza do instrumento (0.01 no caso)
scomb=sqrt(stdm^2+(s_instr)^2)	Calcula o desvio padrão combinado da média.

No caso discutido $s_{comb}^2 = (0{,}01)_{cron}^2 + (0{,}3)_m^2$ resulta em s_{comb} = 0,3 segundos. Isso mostra que a incerteza do cronômetro não afetou nosso tempo médio de 40 medidas, o que é bom. Se o cronômetro usado fosse de pior qualidade, com meio segundo de precisão, $s_{comb}^2 = (0{,}5)_{cron}^2 + (0{,}3)_m^2$ teríamos, s_{comb} = 0,6 segundos. A baixa precisão do cronômetro pouco afetou as medidas individuais com desvio padrão *s* = 2 segundos, mas fazer 40 medidas para obter um resultado melhor foi de pouca utilidade

A incerteza expressa a qualidade (e o preço) do instrumento de medida e sua calibração. Na fábrica são produzidos milhares de cronômetros, em média todos iguais. Mas no varejo, ao comparar diferentes cronômetros, um indica um valor um pouco maior, outro um pouco menor. A incerteza combinada permite comparar medidas feitas com cronômetros diferentes levando em conta a incerteza de calibração. Em geral (mas não necessariamente) a incerteza expressa pelo instrumento e o desvio padrão de calibração são semelhantes. Seria um desperdício se assim não fosse. (*Quem compraria um aparelho muito preciso e caro mal calibrado? Por que calibrar cuidadosamente um aparelho pouco preciso?*). O desvio padrão da calibração de um instrumento de medida costuma ser da mesma ordem que sua incerteza nominal (indicada na escala).

4.2. Propagação de Incertezas: regra geral

É comum usar o resultado de uma medição para derivar outra grandeza. Por exemplo, medimos o diâmetro de um círculo para saber sua área. Sabemos a incerteza da medida e desejamos saber a incerteza da grandeza derivada. Queremos propagar a incerteza.

O problema pode ser posto assim: dada uma função $W = W(x, y, z)$ onde x, y, z são grandezas experimentais com incertezas dadas por σ_X, σ_y, σ_Z e independentes entre si, quanto vale σ_W ? A independência entre σ_X, σ_y, σ_Z é necessária para a validade das fórmulas a seguir e não será discutida por enquanto. Na Figura 4.1., o problema está numa forma gráfica, com *W* apenas função de *x*. A linha cheia representa a função *W(x)*.

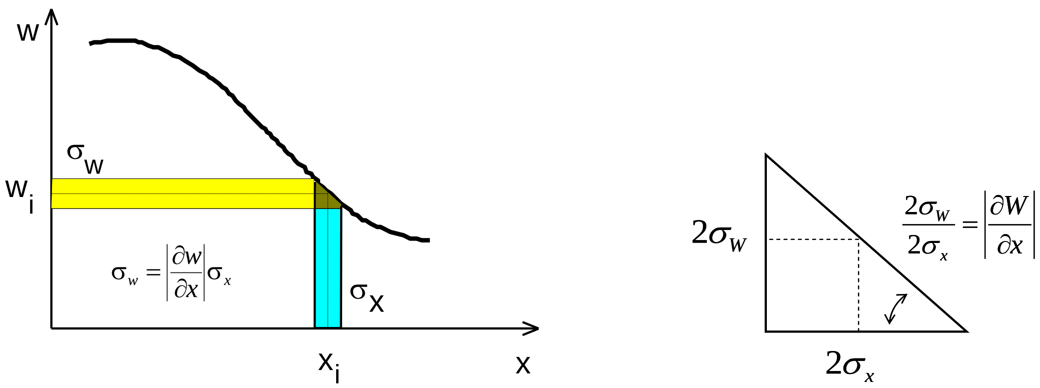


Figura 4.1. Propagando a incerteza em *x* para *w(x)*.

A incerteza de *W*, pode ser obtida pela projeção da incerteza de *x*. Para pequenos σ_x, temos em primeira ordem:

$$\sigma_W = \left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|\sigma_x \qquad (4.2)$$

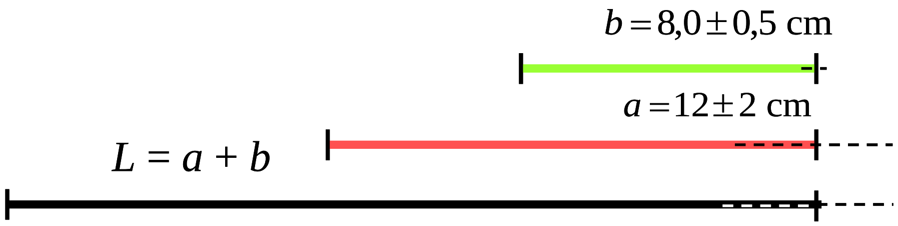
Supondo variáveis independentes entre si (LI), podemos escrever uma fórmula geral (visualize uma soma de catetos em n dimensões):

Formula geral para propagar incertezas não correlacionadas.

$$\sigma_W^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \ldots \qquad (4.3)$$

4.2.1. Exemplo1: Adição

Determinar o comprimento do segmento soma e sua incerteza:



A incerteza do segmento soma pode ser calculada aplicando a Eq. 4.3:

$$\sigma_L^2 = \left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2$$

$$= \quad 1.\sigma_a^2 + 1.\sigma_b^2$$

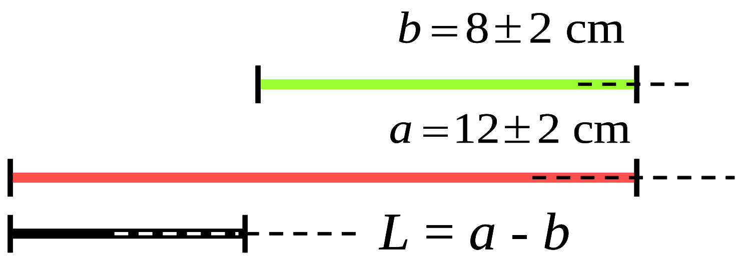
$$\sigma_L^2 = 2^2 + 0{,}5^2$$

$$\sigma_L = 2{,}06$$

$L = (20 \pm 2)$ cm

4.2.2. Exemplo 2: Subtração

Calcular o comprimento do segmento diferença e sua incerteza:



$$\sigma_L^2 = \left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2$$
$$= \quad 1.\sigma_a^2 + 1.\sigma_b^2$$

$$\sigma_L^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$
$$\sigma_L = 2{,}8$$

L = (4 ± 3) cm

Na **soma**, a grandeza e a incerteza aumentaram, mas na **diferença** de duas grandezas experimentais, apesar do resultado ser menor em módulo, a incerteza final é maior que a das partes.

Resumo para soma ou subtração	$\sigma_W^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \ldots$	(4.4)

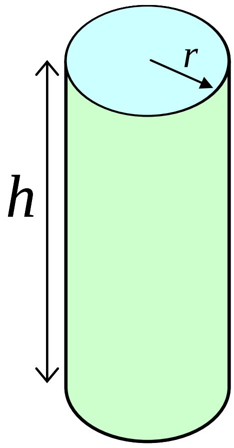
Esse resultado justifica em parte a definição da incerteza combinada na Eq. 4.1. Todo instrumento de medida tem alguma incerteza associada. Mesmo que esteja "perfeitamente calibrado" o instrumento adiciona "uma incerteza" à sua medida:

$$\varepsilon = 0 \pm \sigma_{instr} \,.$$

Essa incerteza, deve ser adicionada à sua medida, combinando com a incerteza avaliada.

4.2.3. Exemplo 3: Multiplicação

Para calcular a incerteza no volume do cilindro aplicamos a Eq. 4.3:



$$V = \pi r^2 h$$
$$r = 2{,}0 \pm 0{,}4\,\text{cm}$$
$$h = 10{,}0 \pm 0{,}5\,\text{cm}$$

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)^2 \sigma_\pi^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2$$
$$= (r^2 h)^2 \sigma_\pi^2 + (\pi 2rh)^2 \sigma_r^2 + (\pi R^2)\sigma_h^2$$

dividindo por V^2

$$\frac{\sigma_V^2}{V^2} = \frac{(r^2h)^2\sigma_\pi^2 + (\pi 2rh)^2\sigma_r^2 + (\pi r^2)\sigma_h^2}{(\pi r^2 h)^2}$$

$$\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2$$

Resolvendo cada um dos termos acima:

$$\left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right) = 0 \quad \text{(i)} \qquad 2\left(\frac{\sigma_r}{r}\right) = 2\frac{0{,}4}{2{,}0} = 0{,}4 \quad \text{(ii)} \qquad \left(\frac{\sigma_h}{h}\right) = \frac{0{,}5}{10{,}0} = 0{,}05 \quad \text{(iii)}$$

Somando (i), (ii) e (iii) em quadratura: $\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{0^2 + 0{,}4^2 + 0{,}05^2} = \sqrt{0{,}1625} = 0{,}40$

portanto: $\sigma_V = (\pi r^2 h)\cdot 0{,}40 = 125{,}7 \cdot 0{,}40 = 50$

Finalmente, ajustando a notação, os significativos e as casas decimais:

$$V = (1{,}3 \pm 0{,}5)\times 10^2\, cm^3$$

Os resultados acima são mais gerais do que parece à primeira vista. Para as quatro operações, podem ser resumidos como segue:

Na soma ou na subtração, a incerteza absoluta do resultado é a raiz quadrada de soma em quadratura das **incertezas absolutas**.	$\sigma_W^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \ldots$

Na multiplicação ou na divisão, a incerteza relativa do resultado é dada pela raiz quadrada da soma em quadratura das **incertezas relativas**.	$\left(\frac{\sigma_W}{W}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2 + \dots$

Uma regra prática pode ser obtida notando que o resultado de propagação de incertezas não precisa ser feito com precisão numérica maior que cerca de 10% pois apenas quando operamos médias de mais de 30 medidas a incerteza da incerteza é menor que 10% (veja Tabela 2.3). Uma vez que $(1/3)^2 \sim 1/10$, qualquer termo *menor que 1/3 do maior termo* na soma em quadratura é da ordem da incerteza da incerteza. Ele pouco contribui no resultado final e pode ser desprezado.

Tome o exemplo 4.2.1., a soma de dois segmentos: calculamos o resultado de $\sigma_L^2 = 2^2 + 0{,}5^2 = 4{,}25$. Dado que $0.5^2 << 2^2$, ou seja, se desprezarmos o termo menor, o resultado seria $\sigma_L^2 = 4{,}0$, que arredondado para um significativo resulta $\sigma_L = 2\,cm$, o mesmo obtido anteriormente.

No Quadro 4.1, a seguir, estão resumidos os principais casos de propagação de incertezas. Em particular vale destacar a fórmula para multiplicação por constante:

$W = a(x \pm \sigma_x)$ temos $\sigma_W = |a|\sigma_x$. e, $\frac{\sigma_W}{W} = \frac{\sigma_x}{x}$

ou seja, a multiplicação por constante não altera a incerteza relativa.

OCTAVE	Calcular o produto W = 2.(44±4).(555±5)
x = 44	define o valor de x
sx = 4	define a incerteza sx
y = 555	define o valor de y
sy = 5	define a incerteza sy
W = 2*x*y	calcula o produto
sw2=(sx/x)^2+(sy/y)^2	calcula a soma quadrática das incertezas relativas
sW = W*sqrt(sw2)	calcula a incerteza absoluta sW

No OCTAVE a seta para cima na linha de comando permite definir, editar e rever um lote de comandos. Para abrir uma linha nova use "shift" ENTER. No OCTAVE também é possível fazer operações com matrizes e vetores. Veja o exemplo abaixo em que queremos calcular o tempo de vários deslocamentos em queda livre: $t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$

OCTAVE	
D=[d1, d2, d3...]	define o vetor D com os valores d1, d2...
g=9.7864	define g
T=sqrt(2*D/g)	Calcula o vetor T com os tempos t1, t2...

Existem vários aplicativos para celular (e tablet) que calculam uma estatística descritiva de um conjunto de dados. Veja sua “loja de aplicativos”. Em particular, destacamos uma calculadora que propaga incertezas: “calcPM”.

Um site útil para propagar incertezas numa função qualquer: http://www.colby.edu/chemistry/PChem/scripts/error.html.

Recomendamos sempre testar um programa ou “site” com algum resultado conhecido. Evita surpresas.

Quadro 4.1. Principais Fórmulas para Propagação de Incertezas

$W = W\left((x \pm \sigma_x),(y \pm \sigma_y),(z \pm \sigma_z)...\right)$ a, b,p, q constantes	Expressões para σ_W
$W = x + y \qquad W = x - y$ **soma ou subtração**	$\sigma_W^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$
$W = a\,x\,y$ **multiplicação**	$\left(\dfrac{\sigma_W}{W}\right)^2 = \left(\dfrac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$W = a\left(\dfrac{y}{x}\right)$ **divisão**	$\left(\dfrac{\sigma_W}{W}\right)^2 = \left(\dfrac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$W = x^m$ **potência simples**	$\left\lvert\dfrac{\sigma_W}{W}\right\rvert = \left\lvert m\dfrac{\sigma_x}{x}\right\rvert$
$W = a\,x$ **multiplicação por constante**	$\left\lvert\dfrac{\sigma_W}{W}\right\rvert = \left\lvert\dfrac{\sigma_x}{x}\right\rvert$ ou $\sigma_W = \lvert a\rvert\sigma_x$
$W = a\,x + b$	$\left\lvert\dfrac{\sigma_W}{W}\right\rvert = \left\lvert\dfrac{\sigma_x}{x}\right\rvert$ ou $\sigma_W = \lvert a\rvert\sigma_x$
$W = a\,x^p y^q$	$\left(\dfrac{\sigma_W}{W}\right)^2 = \left(p\dfrac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q\dfrac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$W = a\,sen(bx)$	$\sigma_W = \lvert ab\cos(bx)\rvert\sigma_x$ x e σ_{x} em radianos
$W = W\left((x \pm \sigma_x),(y \pm \sigma_y),(z \pm \sigma_z)...\right)$ **função qualquer**	$\sigma_W^2 = \left(\dfrac{\partial W}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2 + \left(\dfrac{\partial W}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2 + \left(\dfrac{\partial W}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2 + ...$

5. REFERÊNCIAS E BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

Alvin Hudson, Rex Nelson. *University Physics*, 2nd Ed. Saunders College Publishing. 1990.

Frota, Maurício Nogueira, Ohayon, Pierre. eds. *Padrões e Unidades de Medida - Referências Metrológicas da França e do Brasil*. INMETRO - Rio de Janeiro: Qualitymark Ed. 1999. 120p

Helene, Otaviano A.M. e Vanin, Vito R. *Tratamento estatístico de dados em física experimental*. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP. 1981.

INMETRO, SBM. *Guia para expressão da incerteza de medição*. ABNT, Rio de Janeiro. (1998). 120p

Saad, Fuad Daher, Yamamura, Paulo; Watanabe, Kazuo . *Introdução a interpretação gráfica de dados, gráficos e equações*. 25p. IFUSP (sem data).

Vuolo, José Henrique. *Fundamentos da teoria de erros*. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP. 2a Ed. 1992.

Yamamura, Paulo e Watanabe, Kazuo *Instrumentos de Medição in Manuais Didáticos de Física*. 18p. IFUSP (sem data).