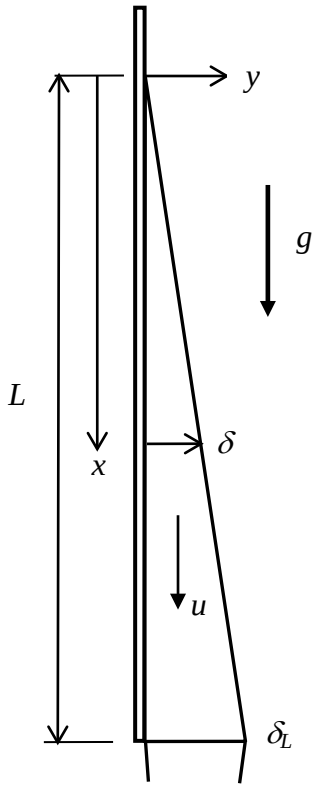
Mecânica dos Fluidos II (PME 3330)
Gabarito Prova Substitutiva - 2018

1. (4,0 pontos) Uma placa plana delgada é inserida em um líquido muito viscoso de viscosidade cinemática ν até uma profundidade *L*. Logo, a placa é levantada e mantida em posição vertical, como mostrado na figura, enquanto o líquido escorre. O escoamento pode ser aproximado como um escoamento plano, onde a espessura do filme de líquido resulta uma função da posição e do tempo, quer dizer, $\delta = \delta(x,t)$. Como aproximação para resolver o transiente, suporemos que a espessura do filme de líquido para um instante de tempo aumenta linearmente com a posição x ao longo da placa, quer dizer $\delta(x,t) = \frac{\delta_L(t)}{L} x$, onde $\delta_L(t)$ é a espessura na borda inferior da placa. Podemos supor também que a massa específica e viscosidade do ar são desprezíveis comparados com os correspondentes valores do líquido.

a) Supondo desprezível a aceleração na direção de escoamento e aplicando as condições de contorno pertinentes na equação de Navier-Stokes, demonstrar que o perfil de velocidade resulta: $u = \frac{g\,\delta^2}{\nu}\frac{y}{\delta}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{y}{\delta}\right)$.

b) Com o resultado do ponto anterior, demonstrar que a vazão volumétrica (por unidade de comprimento normal ao plano da figura) para uma posição x ao longo da placa resulta: $Q = \frac{1}{3}\frac{g\,\delta^3}{\nu}$.



c) Considerando o volume de controle deformável triangular do filme até o borde inferior da placa, demonstrar que a espessura $\delta_L(t)$ varia como $\frac{d\delta_L}{dt} = -2\frac{Q_L}{L}$, onde Q_L é a vazão volumétrica na borda inferior.

d) Resolver a equação no ponto anterior com a condição inicial $\delta_L(t=0) = \delta_{L0}$ e demonstrar que $\delta_L(t) = \frac{\delta_{L0}}{\left(1 + \frac{4}{3}\frac{g\,\delta_{L0}^2}{\nu L} t\right)^{1/2}}$.

e) Definindo o "tempo de escorrimento" T_ε como o tempo no qual a espessura do filme cai a uma fração ε da espessura inicial, ou seja $\frac{\delta_L(T_\varepsilon)}{\delta_{L0}} = \varepsilon$, demonstrar que $T_\varepsilon = \frac{3}{4}\frac{\nu L}{g\,\delta_{L0}^2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)$.

Formulário:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + G_x + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad ; \quad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

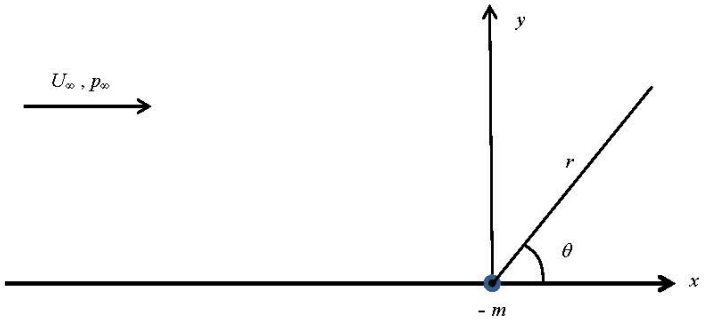
2. (3 pontos) Um fluido não viscoso, num escoamento incompressível e irrotacional, passa ao redor de uma parede na qual existe um sumidouro de intensidade $-m$ localizado na origem, como mostrado na figura. No infinito o escoamento é paralelo com velocidade uniforme U_∞ e pressão estática da corrente livre p_∞.

a) Fazer um desenho mostrando linhas de corrente representativas do escoamento.
b) Determinar as velocidades.
c) Determinar o campo de pressão.
d) Encontrar a distribuição de pressão adimensional $c_p = \frac{p(x) - p_\infty}{1/2\,\rho\,U_\infty^2}$ ao longo da parede como função de $x^* = x\,U_\infty/m$.

e) Fazer um gráfico da distribuição de pressão adimensional do item anterior.

Dicas:

1) Notar que para um ponto na parede na posição $x<0$ resultam $r\equiv -x$ e $\theta=\pi$, enquanto para um ponto na parede na posição $x>0$ resultam $r\equiv x$ e $\theta=0$.
2) Notar que $x=m/U_\infty$ resulta um ponto de estagnação.



Formulário:

Função corrente corrente uniforme horizontal: $\psi = U_\infty\, r \operatorname{sen}\theta$

Função corrente sumidouro: $\psi = -m\theta$; Componentes da velocidade: $v_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}$; $v_\theta = -\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$

Bernoulli: $p+\dfrac{1}{2}\rho U^2 = cte$

3. (3 pontos) Uma aeronave VANT (Veículo Aéreo Não-Tripulado) como a da figura foi projetada com uma asa de área planar A_p e envergadura b. A velocidade de cruzeiro da aeronave é U e o seu peso (totalmente carregada) é P. A seção transversal da asa é constante e utiliza um aerofólio retangular com arqueamento (cambagem) com ângulo de sustentação nula β. Assuma que a aeronave esteja voando a uma altura onde a massa específica do ar é ρ na sua velocidade de cruzeiro, totalmente carregada num voo nivelado. Nestas condições:

a) Calcular o ângulo de ataque α.
b) Calcular a potência requerida W, admitindo-se que o coeficiente de arrasto para o aerofólio infinito com esse mesmo ângulo de ataque vale $C_{D\infty}$.
c) Se ao longo da missão o consumo de combustível faz com que o peso da aeronave diminua para um valor $P'<P$, calcular a nova potência W' e o novo ângulo de ataque α', mantendo a velocidade de cruzeiro e supondo desprezível a variação de $C_{D\infty}$ com o ângulo de ataque. O que acontece como o novo coeficiente de sustentação C_L'? O novo ângulo de ataque deve ser maior ou menor que o original? Justificar.



Formulário:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A_p};\ C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A_p};\ C_L = \frac{2\pi \operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{1+\frac{2}{AR}};\ C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi AR}$$

$$AR = \frac{b}{c}\ ;\ A_p = bc\ ;\ W = DU_\infty$$

IMPORTANTE:

- Escrever de maneira legível.
- Anteceder as expressões matemáticas com um raciocínio ou com uma explicação do que vai ser feito. NÃO SERÃO ACEITAS EXPRESSÕES MATEMÁTICAS SEM UM RACIOCÍNIO!

GABARITO

1ª QUESTÃO

a) Da Eq. de Navier-Stokes na direção x, com inércia desprezível e pressão constante:

$$0 = g + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{g}{\nu} \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{g}{\nu}\frac{y^2}{2} + A\,y + B$$

Com as condições de contorno $u(y=0)=0$ e $\frac{\partial u}{\partial y}(y=\delta)=0$ resultam $B=0$ e $A=\frac{g\,\delta}{\nu}$. O perfil de velocidade resulta:

$$u = \frac{g\,\delta^2}{\nu}\frac{y}{\delta}\left(1-\frac{1}{2}\frac{y}{\delta}\right)$$

b) Calculamos a vazão que atravessa a espessura δ ($y^* = \frac{y}{\delta}$):

$$Q = \int_0^\delta u\,dy = \delta\int_0^1 u\,dy^* = \frac{g\,\delta^3}{\nu}\int_0^1 y^*\left(1-\frac{1}{2}y^*\right)dy^* = \frac{g\,\delta^3}{\nu}\left(\frac{y^{*2}}{2}-\frac{y^{*3}}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{g\,\delta^3}{3\nu}$$

c) Aplicando a conservação da massa no volume de controle triangular deformável, só tem fluxo através da espessura δ_L, resultando:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L\,\delta_L\right) + Q_L = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\delta_L}{dt} = -2\frac{Q_L}{L}$$

d) Substituindo na relação do item anterior e resolvendo para δ_L, resulta:

$$-\frac{L}{2}\frac{d\delta_L}{dt} = \frac{g\,\delta_L^3}{3\nu} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\delta_L}{\delta_L^3} = -\frac{2}{3}\frac{g}{L\nu}$$

Integrando com a condição inicial $\delta_L(0)=\delta_{L0}$, resulta:

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\delta_L^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\delta_{L0}^2} = -\frac{2}{3}\frac{g}{L\nu}t \quad ; \quad \frac{1}{\delta_L^2} = \frac{1}{\delta_{L0}^2} + \frac{4}{3}\frac{g}{L\nu}t \quad \Rightarrow \quad \delta_L(t) = \frac{\delta_{L0}}{\left(1+\frac{4}{3}\frac{g\,\delta_{L0}^2}{\nu L}t\right)^{1/2}}$$

e) Supondo $\frac{\delta_L(T_\varepsilon)}{\delta_{L0}} = \varepsilon$, resulta $\varepsilon = \frac{1}{\left(1+\frac{4}{3}\frac{g\,\delta_{L0}^2}{\nu L}T_\varepsilon\right)^{1/2}}$, da onde resulta $T_\varepsilon = \frac{3}{4}\frac{\nu L}{g\,\delta_{L0}^2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right)$.

2ª QUESTÃO

Solução:

a) As linhas de corrente correspondem a um semi-corpo de Rankine, com um ponto de estagnação à direita do sumidouro.

b) A função corrente resulta: $\psi = U_\infty r\, sen\,\theta - m\,\theta$

As velocidades resultam: $v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\infty\, cos\theta - \frac{m}{r}$; $v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty\, sen\theta$

c) Quadrado do módulo da velocidade: $V^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(U_\infty\, cos\theta - \frac{m}{r}\right)^2 + U_\infty^2\, sen^2\,\theta$

$$V^2 = U_\infty^2 - 2\,m U_\infty \frac{cos\theta}{r} + \frac{m^2}{r^2}$$

Por Bernoulli:

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p + \frac{1}{2}\rho V^2 \quad \Rightarrow \quad p - p_\infty = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left(1 - \frac{V^2}{U_\infty^2}\right) = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left(\frac{2\,m}{U_\infty}\frac{cos\,\theta}{r} - \frac{m^2}{U_\infty^2}\frac{1}{r^2}\right)$$

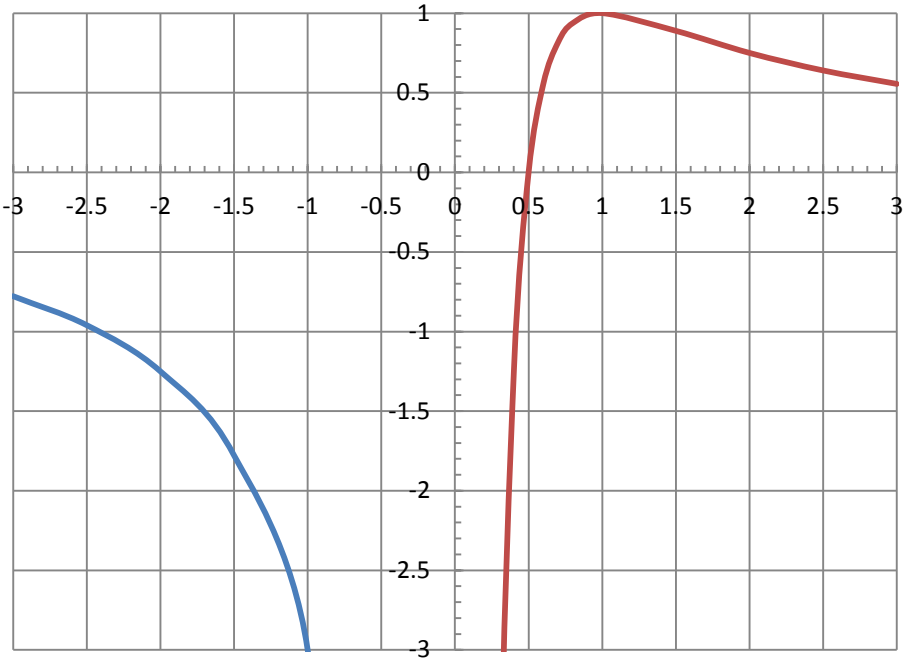
d) Adimensionalizando a distribuição de pressão, resulta:

$$c_p(r,\theta) = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \left(2\,\frac{cos\,\theta}{r^*} - \frac{1}{r^{*2}}\right), \text{ onde } r^* = \frac{r U_\infty}{m}.$$

Para a posição da parede, resulta: $c_p(x^*) = \frac{2}{x^*} - \frac{1}{x^{*2}}$, onde $x^* = \frac{x U_\infty}{m}$.

Vemos que $c_p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ e que $c_p(1) = 1$ (ponto de estagnação).

e) A distribuição resulta:



3ª QUESTÃO

Solução:

a) Sabendo que a sustentação deve ser igual ao peso e escrevendo a razão de aspecto em função da área planar e a envergadura $AR = \dfrac{b^2}{A_p}$ temos:

$$C_L = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho U^2 A_p} = \frac{2\pi \operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{1+\frac{2A_p}{b^2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left[\frac{P\left(1+\frac{2A_p}{b^2}\right)}{\pi \rho U^2 A_p}\right] - \beta$$

b) O coeficiente de sustentação resulta $C_L = \dfrac{2P}{\rho U^2 A_p}$; daqui a potência resulta:

$$W = DU = \frac{1}{2}\rho U^3 A_p \left(C_{D\infty} + \frac{C_L{}^2}{\pi AR}\right)$$

Eliminando C_L obtemos:

$$W = \frac{1}{2}\rho A_p C_{D\infty} U^3 + \frac{2P^2}{\pi AR \rho U A_p} = \frac{1}{2}\rho A_p C_{D\infty} U^3 + \frac{2P^2}{\pi \rho U b^2}$$

A nova potência resulta:

$$W' = \frac{1}{2}\rho A_p C_{D\infty} U^3 + \frac{2P'^2}{\pi \rho U b^2}$$

Como $P' < P$ e a velocidade de cruzeiro permanece constante, $W' < W$, $C_L' < C_L$, $C_D' < C_D$ e $\alpha' < \alpha$. Os novos valores resultam:

$$C_L' = \frac{2P'}{\rho U^2 A_p}$$

$$\alpha' = \arcsin\left[\frac{P'\left(1+\frac{2A_p}{b^2}\right)}{\pi \rho U^2 A_p}\right] - \beta$$