Solução P3 - 2018

1

Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas

SANCTI PAVLI CÆLVM AGER MEVS

NOME ______________________ N.º USP ____________

CURSO ______________________

DISCIPLINA ______________________

DATA ___/___/___

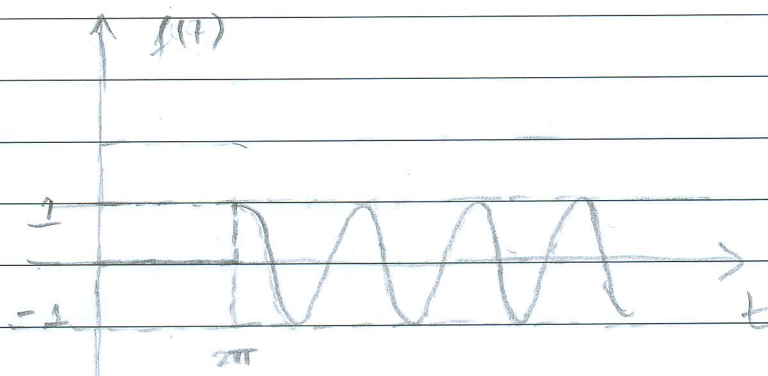
NOTA	EXAMINADORES

Q1 a) (II), (V) e (VI)

b) Para a função $f(t) = \cos(t-2\pi)$ ser considerada um original, ela deve estar multiplicada por uma função de Heaviside, ou seja,

$f(t) = \cos(t-2\pi) . h(t-2\pi)$

c)



$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-\tau s} F(s)$ (Propriedade fornecida na prova)

$\cos t \longrightarrow F(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$

$\therefore f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-2\pi s} \dfrac{s}{s^2+1}$

Q2 a) $f(t) = t^2 \sin 5t$

$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = ?$

$(-1)^n t^n g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G^n(s)$

$(-1)^2 t^2 \sin 5t \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(\frac{5}{s^2+25}\right)'' = \frac{-10(-3s^2+25)}{(s^2+25)^3}$

b) $F(s) = \frac{5s^3 + 5s^2 - 11(s+3)}{(s+3)s^3}$

$\frac{5\cancel{s^3}}{(s+3)\cancel{s^3}} + \frac{5s^2}{(s+3)s^3} - \frac{11\cancel{(s+3)}}{\cancel{(s+3)}s^3} = \overset{I}{\frac{5}{(s+3)}} + \overset{II}{\frac{5}{s(s+3)}} - \overset{III}{\frac{11}{s^3}}$

I $\rightarrow \frac{5}{(s+3)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 5.e^{-3t}$

II $\rightarrow \frac{5}{s(s+3)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$ (Usando a tabela informada na prova: $\frac{1}{s(s-a)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a}(e^{at}-1)$)

$\frac{5}{-3}(e^{-3t}-1)$

III $\rightarrow \frac{-11}{s^3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s).e^{st}.ds = \sum_{k=1}^{n} Res\left[F(s).e^{st}, (s-s_k)\right]$

$Res\left[F(s).e^{st}, (s-s_k)\right] = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{s\to 0}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{s^3.(-11).e^{st}}{s^3}\right] =$

$\frac{1}{2!}\lim_{s\to 0}\frac{d^2}{ds^2}\left[(-11)e^{st}\right] = \frac{1}{2}\lim_{s\to 0}(-11)t^2.e^{st} = \frac{-11t^2}{2}$

Usando a propriedade da Linearidade:

$$\boxed{f(t) = 5.e^{-3t} - \frac{5}{3}(e^{-3t}-1) - \frac{11}{2}t^2}$$

c) $F(s) = \frac{s}{(s+2)(s+3)}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s).e^{st}\,ds = \sum_{k=1}^{n} Res[F(s).e^{st}, (s-s_k)]$$

$$Res[F(s).e^{st}, s+2] = \lim_{s \to -2}\left[\frac{\cancel{(s+2)}.s.e^{st}}{\cancel{(s+2)}.(s+3)}\right] = -2e^{-2t}$$

$$Res[F(s).e^{st}, s+3] = \lim_{s \to -3}\left[\frac{(s+3).s.e^{st}}{(s+3)(s+2)}\right] = \frac{-3.e^{-3t}}{(-1)} = 3e^{-3t}$$

$$\boxed{f(t) = -2e^{-2t} + 3e^{-3t}}$$

Q3 -

$$y'(t) + 2y(t) = \cos 3t \xrightarrow{\mathcal{L}} sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{s}{s^2+9} \Rightarrow$$

$$Y(s)(s+2) = \frac{s}{(s^2+9)} + 5 \Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{s}{(s^2+9)(s+2)}^{\mathrm{I}} + \frac{5}{(s+2)}^{\mathrm{II}}}$$

↳ Imagem da solução

Por fração parcial, temos:

$$\mathrm{I} \to \frac{s}{(s^2+9)(s+2)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{Bs+C}{(s^2+9)}$$

Agora, basta multiplicarmos pelo denominador:

$$\frac{s\,\cancel{(s^2+9)}\cancel{(s+2)}}{\cancel{(s^2+9)}\cancel{(s+2)}} = \frac{A\cancel{(s+2)}(s^2+9)}{\cancel{(s+2)}} + \frac{(Bs+C)(s+2)\cancel{(s^2+9)}}{\cancel{(s^2+9)}} \Rightarrow$$

$s = A(s^2+9) + (Bs+C)(s+2) \Rightarrow$

$s = As^2 + A9 + Bs^2 + 2Bs + Cs + 2C \Rightarrow$

$s = As^2 + Bs^2 + 2Bs + Cs + 2C + A9 \Rightarrow$

Por identidade polinomial, temos:

$A + B = 0 \Rightarrow A = -B$

$2B + C = 1$

$2C + 9A = 0 \qquad 2C = -9A \Rightarrow C = -\frac{9}{2}(A) \Rightarrow C = \frac{9}{2}B$

$2B + \frac{9}{2}B = 1 \Rightarrow 4B + 9B = 2 \Rightarrow 13B = 2 \Rightarrow B = \frac{2}{13}$

$A = -\frac{2}{13}$, $B = \frac{2}{13}$ e $C = \frac{9}{13}$. Dessa forma:

$\frac{A}{(s+2)} = -\frac{2}{13} \frac{1}{(s+2)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -\frac{2}{13} \cdot e^{-2t}$

$\frac{Bs}{(s^2+9)} = \frac{2}{13} \frac{s}{(s^2+9)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{2}{13} \cdot \cos 3t$

$\frac{C}{(s^2+9)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{3}{(s^2+9)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{3} \frac{9}{13} \sin 3t$

$\mathrm{I} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -\frac{2}{13} \cdot e^{-2t} + \frac{2}{13} \cos 3t + \frac{3}{13} \sin 3t$

$\mathrm{II} = \frac{5}{(s+2)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 5 \cdot e^{-2t}$

$y(t) = -\frac{2}{13} \cdot e^{-2t} + \frac{2}{13} \cdot \cos 3t + \frac{3}{13} \sin 3t + 5 \cdot e^{-2t}$

(5)

Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas

NOME		N.º USP	
CURSO			
DISCIPLINA			
DATA	___/___/___		

NOTA	EXAMINADORES

b) $y(0) = 5$

$$y(0) = -\frac{2}{13} \cdot e^{-2(0)} + \frac{2}{13} \cdot \cos[3(0)] + \frac{3}{13} \sin[3(0)] + 5 \cdot e^{-2(0)}$$

$$y(0) = -\frac{2}{13} + \frac{2}{13} + 0 + 5 = 5$$

$$y'(t) = \frac{4e^{-2t}}{13} - \frac{6}{13}\sin 3t + \frac{3 \cdot 3}{13} \cdot \cos 3t - 10 \cdot e^{-2t}$$

$$\frac{4e^{-2t}}{13} - \frac{6}{13}\sin 3t + \frac{9}{13}\cos 3t - 10 \cdot e^{-2t} + 2\left(-\frac{2}{13} \cdot e^{-2t} + \frac{2}{13}\cos 3t + \frac{3}{13}\sin 3t + 5 \cdot e^{-2t}\right) \Rightarrow$$

$$\cancel{\frac{4 \cdot e^{-2t}}{13}} - \cancel{\frac{6}{13}\sin 3t} + \frac{9}{13}\cos 3t - \cancel{10 \cdot e^{-2t}} - \cancel{\frac{4}{13} \cdot e^{-2t}} + \frac{4}{13}\cos 3t + \cancel{\frac{6}{13}\sin 3t} + \cancel{10 \cdot e^{-2t}} = \frac{9}{13}\cos 3t + \frac{4}{13}\cos 3t = \frac{13}{13}\cos 3t = \cos 3t$$

Q4 -

$$y''(t) + y'(t) = 3 \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) = 3$$

$$s^2 Y(s) + sY(s) = \frac{3}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{3}{(s^2+s)} \Rightarrow \boxed{Y(S) = \frac{3}{s^2(s+1)}}$$

↳ Imagem da solução!

$$Y(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

6

Usando a tabela fornecida na prova:

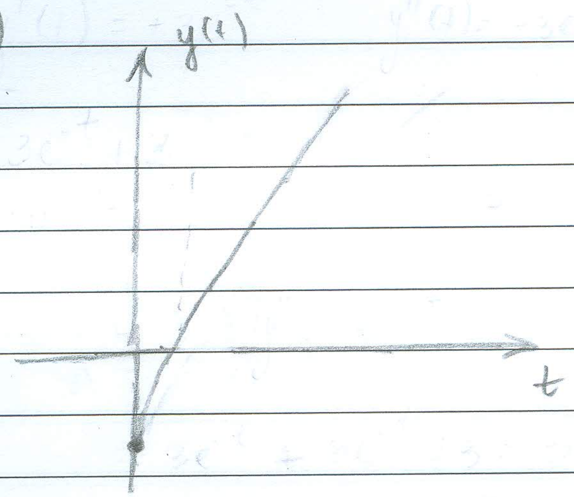
$$\frac{1}{s^2(s-a)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{a^2}(e^{at}-1-at)$$

$$\frac{3}{s(s+1)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{3}{(-1)^2}\left(e^{-t}-1-(-1)t\right) = 3e^{-t}-3+3t$$

$$\boxed{y(t) = 3e^{-t}+3t-3}$$

↳ Solução da E.D.O sujeita às condições iniciais.

b)



o fator predominante é $3t$. Veja que quando $t\to\infty$, $3e^{-t}\to 0$ e $3t\to\infty$

Q5-

$$u(x,t) = [p\cos(qx)+(1-p)\sin(qx)]\cdot\cos rt$$

$$u_{tt} = 25\,u_{xx}$$

$$u(0,t)=0$$

$$u(10,t)=0$$

$u(0,t) = p\cdot\cos rt = 0 \therefore \boxed{p=0}$ ou $\boxed{\cos rt = 0}$ → Solução trivial

$u(10,t) = [p\cdot\cos(10q)+(1-p)\sin(10q)]\cdot\cos rt = 0$. Como $p=0$

→ Solução trivial

$u(10,t) = \sin 10q\cos rt = 0 \Rightarrow \boxed{\sin 10q = 0}$ ou $\boxed{\cos rt = 0}$

$\sin 10q = 0 \Rightarrow 10q = k\pi \Rightarrow \boxed{q = \frac{k\pi}{10}}$ → $k\neq 0$ para soluções não triviais.

Substituindo os valores de p e q na solução teremos:

$$u(x,t) = \sin\frac{K\pi x}{10} \cdot \cos rt$$

→ Essa solução particular atende as condições de contorno. Agora, falta-nos determinar o valor de r. Para isso, basta substituir a solução particular acima na equação de onda:

$$u_{tt} = -\sin\frac{K\pi x}{10} \cdot r^2 \cdot \cos rt$$

$$u_{xx} = -\left(\frac{K\pi}{10}\right)^2 \sin\left(\frac{K\pi x}{10}\right) \cdot \cos rt$$

$$-\cancel{\sin\left(\frac{K\pi x}{10}\right)} \cdot r^2 \cdot \cancel{\cos rt} = -25\left(\frac{K\pi}{10}\right)^2 \cancel{\sin\left(\frac{K\pi x}{10}\right)} \cdot \cancel{\cos rt}$$

Como $\cos rt \neq 10$ e $\sin\left(\frac{K\pi x}{10}\right) \neq 0$, então:

$$r^2 = 25\left(\frac{K\pi}{10}\right)^2 \Rightarrow r = 5 \cdot \frac{K\pi}{10} \Rightarrow \boxed{r = \frac{K\pi}{2}}$$

$K \neq 0$ para soluções não triviais

$$\boxed{\text{Logo, } p = 0,\ q = \frac{K\pi}{10} \text{ e } r = \frac{K\pi}{2} \text{, com } K \neq 0 \text{ para soluções não-triviais}}$$

$$\boxed{u(x,t) = \sin\frac{K\pi}{10}x \cdot \cos\frac{K\pi}{2}t}$$