# Lista 5 - Solução

## Questão 1

a) $f(t) = \pi^t$

Podemos escrever $\pi^t$ como $\pi^t = e^{\ln \pi^t}$

A imagem desse original pode ser calculada da seguinte forma:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} . dt = \int_0^\infty e^{\ln \pi^t} . e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{t.\ln\pi - st} dt =$$

$$\int_0^\infty e^{(\ln\pi - s)t} dt = \left[ \frac{1}{\ln\pi - s} . e^{(\ln\pi - s)t} \right]_0^\infty$$

como $Re(s) > \ln\pi$ então $Re(s) - \ln\pi > 0 \Rightarrow \ln\pi - Re(s) < 0$, logo

$$\lim_{t \to \infty} \cancel{\frac{1}{\ln\pi - s} . e^{\overbrace{(\ln\pi - s)}^{<0}.t}}^{0} - \frac{1}{\ln\pi - s} . e^{(\ln\pi - s).(0)} = \frac{1}{s - \ln\pi}$$

$\boxed{F(s) = \frac{1}{s - \ln\pi}}$, onde $F(s)$ é analítica em toda a região $Re(s) > \ln\pi$

b) $f(t) = t^2 . \sin\omega t$

Utilizando a propriedade 8 ensinada em aula (Derivação de imagens):

$(-1)^n . t^n . f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F^{(n)}(s)$, onde $f(t)$, neste caso é $\sin\omega t$. Assim:

$(-1)^2 . t^2 . \sin\omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} F''(s)$

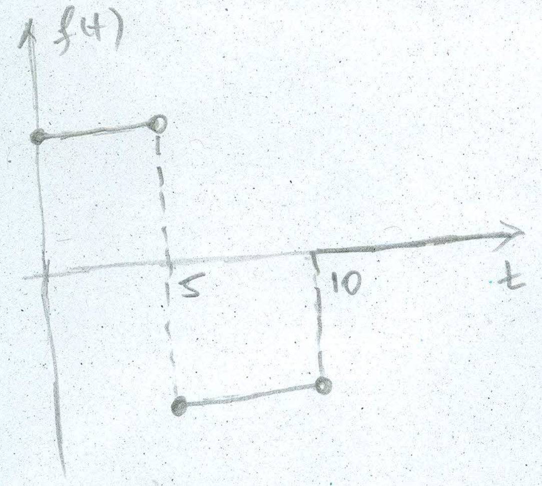
$$\sin\omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} \left[\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}\right] \Rightarrow F''(s) = \left[\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}\right]'' = \left[\frac{-2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}\right]' =$$

$$\frac{(-2s\omega)'\left[(s^2+\omega^2)^2\right] - (-2s\omega)\left[(s^2+\omega^2)^2\right]'}{(s^2+\omega^2)^4} = \frac{-2\omega\left[(s^2+\omega^2)^2\right] + 2s\omega \cdot 2(s^2+\omega^2) \cdot 2s}{(s^2+\omega^2)^4} =$$

$$\frac{-2\omega(s^2+\omega^2)+8s^2\omega}{(s^2+\omega^2)^3} = \frac{-2\omega s^2 - 2\omega^3 + 8s^2\omega}{(s^2+\omega^2)^3} = \frac{6s^2\omega - 2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^3}$$

2

c) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t < 5 \\ -1 & \text{para } 5 \leq t < 10 \\ 0 & \text{para } t \geq 10 \end{cases}$




A função $f(t)$ pode ser escrita como uma soma de funções de heaviside:

$$f(t) = h(t) - 2h(t-5) + h(t-10)$$

Utilizando a propriedade da linearidade, temos:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} + \mathcal{L}\{-2h(t-5)\} + \mathcal{L}\{h(t-10)\} =$$

$$\frac{1}{s} - \frac{2 \cdot e^{-5s}}{s} + \frac{e^{-10}}{s} \quad \therefore \quad \boxed{F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2 \cdot e^{-5s}}{s} + \frac{e^{-10}}{s}}$$

d) $f(t) = \dfrac{\sinh(t)}{t}$

Nesta questão, podemos utilizar a propriedade 9 (Integração de Imagem)

$$\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_s^{\infty} F(z)\,dz \,.$$ Precisamos, primeiramente achar a imagem da função $\sinh(t)$. Lembrando que $\sinh(t) = \dfrac{e^{t} - e^{-t}}{2}$

$$F(s)=\int_0^\infty \frac{e^t-e^{-t}}{2}\cdot e^{-st}\,dt=\int_0^\infty \frac{e^{t-st}}{2}dt-\int_0^\infty \frac{e^{-t-st}}{2}dt=\int_0^\infty \frac{e^{(1-s)t}}{2}dt-\int_0^\infty \frac{e^{-(1+s)t}}{2}dt=$$

$$\left[\frac{e^{(1-s)t}}{2(1-s)}\right]_0^\infty-\left[\frac{e^{-(1+s)t}}{-2(1+s)}\right]_0^\infty=\left[\cancel{\lim_{t\to\infty}\frac{e^{(1-s)t}}{2(1-s)}}^{\,0}-\frac{1}{2(1-s)}\right]-\left[\cancel{\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-(1+s)t}}{2(1+s)}}^{\,0}-\right.$$

$Re(s)$

$$\left.\frac{1}{2(1+s)}\right]=\frac{1}{2(s-1)}-\frac{1}{2(1+s)}=\frac{(s+1)-(s-1)}{2(s-1).(s+1)}=\frac{2}{2(s-1)(s+1)}=\frac{1}{s^2-1}\,\therefore$$

3

$$\frac{\sinh(t)}{t}\xrightarrow{\mathcal{L}}\int_s^\infty F(z)dz$$

$$\int_s^\infty F(z)dz=\int_s^\infty \frac{1}{z^2-1}dz=\int_s^\infty \frac{1}{(z+1)(z-1)}dz$$

$$\frac{1}{(z+1)(z-1)}=\frac{A}{(z+1)}+\frac{B}{(z-1)}=\frac{A(z-1)+B(z+1)}{(z+1)(z-1)}=\frac{Az-A+Bz+A}{(z+1)(z-1)}=$$

$$\frac{(A+B)z+1(-A+B)}{(z+1)(z-1)}$$ Tratando como identidade polinomial, temos:

$$\frac{1}{(z+1)(z-1)}=\frac{(A+B)z+1(-A+B)}{(z+1)(z-1)}$$ , ou seja,

$$\begin{cases}A+B=0\\-A+B=1\end{cases}\Rightarrow \boxed{B=1/2}\ \text{e}\ \boxed{A=-1/2}$$ Logo

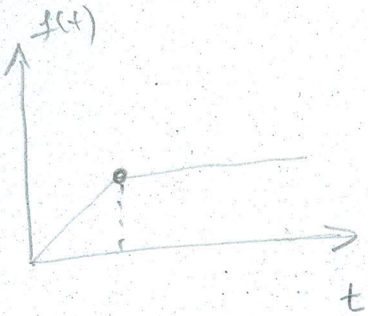
$$\int_s^\infty F(z)dz=\int_s^\infty \frac{1}{z^2-1}dz=\int_s^\infty -\frac{1}{2(z+1)}dz+\int_s^\infty \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)}dz=$$

$$\left[-\frac{1}{2}\ln|z+1|+\frac{1}{2}\ln|z-1|\right]_s^\infty=\lim_{z\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\ln|z+1|+\frac{1}{2}\ln|z-1|\right]-\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{s-1}{s+1}\right|\right]$$

$$\lim_{z\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\right] - \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{s-1}{s+1}\right|\right] = \lim_{z\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\overbrace{\frac{1}{z}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{1}{z}}_{\to 0}}\right|\right] - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{s-1}{s+1}\right| =$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{s+1}{s-1}\right| \quad \therefore \quad \boxed{\frac{\sinh(t)}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{s+1}{s-1}\right|} \;//$$

(e) $f(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \leq t < 3 \\ 3 & \text{para } 3 \leq t \end{cases}$




$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$f(t) = t - (t-3).h(t-3)$$

$$t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2} \qquad (t-3).h(t-3) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{e^{-3s}}{s^2} \quad \therefore$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^2} = \frac{1-e^{-3s}}{s^2} \qquad \boxed{F(s) = \frac{1-e^{-3s}}{s^2}} \;//$$

(f) $f(t) = \cos^2 t$

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \Rightarrow \cos^2 t = \frac{e^{2it}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{e^{-2it}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right)$$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$. Lembrando que $\cos wt \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2+w^2}$ $\therefore$

$$\frac{1}{2}\cos 2t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2+4}$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$\frac{1}{2}.h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2}\,\frac{1}{s} \quad \therefore \quad \boxed{F(s) = \frac{1}{2}.\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{2}.\frac{1}{s}} \;//$$

(g) $f(t) = e^{at} \cdot \cos wt$ para $w \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$

Aqui podemos aplicar a propriedade da mudança de origem da imagem, mas vamos tentar pelo método da "força bruta":

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \int_0^\infty e^{at} \cdot \cos wt \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty \cos wt \cdot e^{(a-s)t} dt =$$

$$\left[\frac{\cos wt \cdot e^{(a-s)t}}{(a-s)}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{(-w \cdot \sin wt) \cdot e^{(a-s)t}}{(a-s)} dt = \left[\frac{\cos wt \cdot e^{(a-s)t}}{(a-s)}\right]_0^\infty - \left\{\left[\frac{-w \sin wt \cdot e^{(a-s)t}}{(a-s)^2}\right] - \int_0^\infty \frac{(-w^2 \cdot \cos wt) e^{(a-s)t}}{(a-s)^2} dt\right\} \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \cos wt \cdot e^{(a-s)t} dt + \int_0^\infty \frac{w^2 \cos wt \cdot e^{(a-s)t}}{(a-s)^2} dt = \left[\frac{\cos wt \cdot e^{(a-s)t}}{(a-s)}\right]_0^\infty + \left[\frac{w \cdot \sin wt \cdot e^{(a-s)t}}{(a-s)^2}\right]_0^\infty \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \cos wt \cdot e^{(a-s)t} dt \left[1 + \frac{w^2}{(a-s)^2}\right] = \left[\frac{\cos wt \cdot e^{(a-s)t}}{(a-s)}\right]_0^\infty + \left[\frac{w \cdot \sin wt \cdot e^{(a-s)t}}{(a-s)^2}\right]_0^\infty$$

$$\int_0^\infty \cos wt \cdot e^{(a-s)t} dt = \left[\frac{(a-s)^2}{(a-s)^2 + w^2}\right] \cdot \left\{\left[\frac{\cos wt \cdot e^{(a-s)t}}{(a-s)}\right]_0^\infty + \left[\frac{w \cdot \sin wt \cdot e^{(a-s)t}}{(a-s)^2}\right]_0^\infty\right\}$$

$$= \left[\frac{(a-s)^2}{(a-s)^2 + w^2}\right] \cdot \frac{1}{(a-s)^2} \left\{\left[(a-s) \cdot \cos wt \cdot e^{(a-s)t}\right]_0^\infty + \left[w \cdot \sin wt \cdot e^{(a-s)t}\right]_0^\infty\right\} =$$

$$\frac{1}{(a-s)^2 + w^2} \left\{\left[0 - (a-s)\right] + \left[0 - 0\right]\right\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2}$$

$$\boxed{F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2}}$$ → Veja que o resultado é igual ao obtido em aula!

h) $f(t) = t^2 \cdot e^{t-3}$

Para achar a imagem ou $f(t)$, podemos utilizar a propriedade 8 (Derivação de imagens).

$$(-1)^n \cdot t^n \cdot g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G^{(n)}(s) = F(s)$$

Se tomarmos $g(t) = e^{t-3}$, então

$$(-1)^2 \cdot t^2 \cdot e^{t-3} \xrightarrow{\mathcal{L}} G''(s) = F(s)$$

$$G(s) = \int_0^\infty e^{t-3} \cdot e^{-st}\, dt = e^{-3} \int_0^\infty e^{(1-s) \cdot t}\, dt = e^{-3} \cdot \left[ \frac{e^{(1-s)t}}{(1-s)} \right]_0^\infty =$$

$$\frac{e^{-3}}{(1-s)} \quad \therefore \quad G'(s) = \frac{d}{ds} \cdot \left[ \frac{e^{-3}}{(1-s)} \right] = \frac{-e^{-3}}{(1-s)^2} \quad e$$

$$G''(s) = \frac{d}{ds} \left[ \frac{-e^{-3}}{(1-s)^2} \right] = \frac{(-e^{-3})'(1-s)^2 - (-e^{-3}) \left[ (1-s)^2 \right]'}{(1-s)^4} = \frac{e^{-3}(1-2s+s^2)'}{(1-s)^4} =$$

$$\frac{-2e^{-3}(1-s)}{(1-s)^4} = \frac{-2e^{-3}}{(1-s)^3} = \frac{2 \cdot e^{-3}}{(s-1)^3} \quad \therefore$$

6

$$\boxed{F(s) = \frac{2 \cdot e^{-3}}{(s-1)^3}}$$

4

i) $f(t) = e^{-3t} \cdot \sin 5t$

Para achar a imagem de $f(t)$, podemos utilizar a propriedade 3, mudança de origem da imagem

$$e^{at} \cdot g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s-a) = F(s)$$

Neste caso $a = -3$ e $g(t) = \sin 5t$. Lembrando que $\sin \omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

então $g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{5}{s^2+25}$ $\therefore$ $G(s+3) = \frac{5}{(s+3)^2+25}$ $\boxed{F(s) = \frac{5}{(s+3)^2+25}}$ 4

(j) $f(t) = 10t^2 - 5t + 8i - 3$

Para achar a imagem deste original, basta utilizarmos a propriedade 1 (Linearidade) e a propriedade 5 (Derivada do original em relação ao parâmetro). Lembre-se que a propriedade 5 nos dá:

$$\mathcal{L}\{t^n \cdot e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$ , mas se $a = 0$, então:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \therefore$$

$$10t^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{10 \cdot 2!}{s^3} = \frac{20}{s^3}$$

$$-5t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{-5 \cdot 1!}{s^2} = \frac{-5}{s^2}$$

$$-3+8i \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{-3+8i}{s} \therefore$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \boxed{F(s) = \frac{20}{s^3} - \frac{5}{s^2} - \frac{3}{s} + \frac{8i}{s}}$$ X

No entanto, a resposta correta deste problema não é a que foi dada abaixo e que todos vocês responderam. Repare na definição de transformada de Laplace. Ela exige que o original seja uma função real, de variável real. Enfim, embora se ache em alguns livros respostas para uma função complexa, elas não são adequadas pela definição matemática!

(k) $f(t) = h(t-3) \cdot \cosh(t-3)$, onde $h(t-3)$ é a função de Heaviside

Neste caso, podemos utilizar a propriedade atraso de originais:

$$\cosh(t-3) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-3s} G(s).$$ $$\cosh(t) \longrightarrow \frac{s}{s^2-1}$$

$$G(s) = \frac{s}{s^2-1} \therefore$$ $$\boxed{F(s) = e^{-3s} \cdot \frac{s}{s^2-1}}$$

Questão 2 - Determine o original correspondente às seguintes imagens utilizando as propriedades da transformada de Laplace

a) $F(s) = \frac{3 - s^2}{s^4}$

$F(s) = \frac{3}{s^4} - \frac{1}{s^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{s^4} - \frac{1}{s^2}$

$\frac{6}{s^4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t^3 \qquad \frac{1}{s^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t \quad \therefore$

$F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) \Rightarrow \boxed{f(t) = \frac{t^3}{2} - t}$

b) $F(s) = \frac{s+3}{(s-4)^2+4}$

$F(s) = \frac{s}{(s-4)^2+4} + \frac{3}{(s-4)^2+4} = \frac{s}{(s-4)^2+4} - \frac{4}{(s-4)^2+4} + \frac{4}{(s-4)^2+4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{(s-4)^2+4} =$

$\frac{s-4}{(s-4)^2+4} + \frac{2 \cdot 2}{(s-4)^2+4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{(s-4)^2+4}$

Propriedade 3.

$\frac{s-4}{(s-4)^2+4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{4t} \cdot \cos 2t$

$\frac{2}{(s-4)^2+4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{4t} \cdot \operatorname{sen} 2t \quad \therefore$

$F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) \qquad f(t) = e^{4t} \cdot \cos 2t + 2 \cdot e^{4t} \sin 2t + \frac{3}{2} e^{4t} \sin 2t$

$\boxed{f(t) = e^{4t} \cdot \cos 2t + \frac{7}{2} e^{4t} \sin 2t}$

8

9

c) $F(s) = \frac{s-2}{(s-3).(s-4)}$

Aqui, podemos calcular a transformada inversa de Laplace da seguinte forma:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s).e^{st} ds = \sum_{k=1}^{n} Res[F(s).e^{st}; s_k] \Rightarrow$$

$$Res[F(s).e^{st}, (s-3)] = \lim_{s \to 3} \frac{\cancel{(s-3)}.(s-2)}{\cancel{(s-3)}.(s-4)}.e^{st} = -e^{3t}$$

$$Res[F(s).e^{st}, (s-4)] = \lim_{s \to 4} \frac{\cancel{(s-4)}.(s-2)}{(s-3).\cancel{(s-4)}}.e^{st} = 2.e^{4t}$$

$$\boxed{f(t) = -e^{3t} + 2.e^{4t}}$$

d) $F(s) = \frac{e^{3s} - 1}{s.e^{3s}}$

$$F(s) = \frac{\cancel{e^{3s}}}{s\cancel{e^{3s}}} - \frac{1}{se^{3s}} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}$$

$$\frac{1}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t)$$

$$\frac{e^{-3s}}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t-3) \quad \therefore \quad F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{f(t) = h(t) - h(t-3)}$$

e) $F(s) = \frac{s.e^{-3s}}{(s-3)(s-4)}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s).e^{st} dt = \sum_{k=1}^{n} Res[F(s).e^{st}; s_k] \Rightarrow$$

$$Res[F(s).e^{st}, (s-3)] = \lim_{s \to 3} \frac{\cancel{(s-3)}.s.e^{-3s}.e^{st}}{\cancel{(s-3)}(s-4)} = \lim_{s \to 3} \frac{s.e^{-3s}.e^{st}}{(s-4)} = \frac{3.e^{-9}.e^{3t}}{-1} = -3e^{3t-9}$$

$$\text{Res}\left[F(s).e^{st},(s-4)\right] = \lim_{s\to 4} \frac{\cancel{(s-4)}s.e^{-3s}.e^{st}}{(s-3).\cancel{(s-4)}} = \frac{4.e^{-12}.e^{4t}}{1} = 4.e^{4t-12}$$

$$\boxed{f(t) = -3e^{3t-9} + 4.e^{4t-12}}$$

f) $F(s) = \frac{-6}{(s-3)^3}$

Utilizando a propriedade 5 (Derivação do original em relação a um parâmetro, temos:

$$t^n.e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \qquad \frac{-6}{2!}.\frac{2!}{(s-3)^3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t^2.e^{-3t}.\frac{(-6)}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(t) = -3t^2.e^{-3t}}$$

g) $F(s) = \frac{5s+1}{s^2-25} \qquad F(s) = \frac{5s+1}{(s+5)(s-5)}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s).e^{st}ds = \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left[F(s).e^{st}, s_k\right]$$

$$\text{Res}\left[F(s).e^{st},(s+5)\right] = \lim_{s\to -5} \frac{\cancel{(s+5)}(5s+1).e^{st}}{\cancel{(s+5)}(s-5)} = \frac{(-25+1)}{-10}.e^{-5t} = \frac{24}{10}.e^{-5t}$$

$$\text{Res}\left[F(s).e^{st},(s-5)\right] = \lim_{s\to 5} \frac{\cancel{(s-5)}(5s+1)}{(s+5)\cancel{(s-5)}}.e^{st} = \frac{26}{10}.e^{5t}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{12}{5}.e^{-5t} + \frac{13}{5}.e^{5t}}$$

h) $F(s) = \frac{1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{3})}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s).e^{st}ds = \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left[F(s).e^{st}, s_k\right]$$

$$\operatorname{Res}[F(s).e^{st}, (s+\sqrt{2})] = \lim_{s\to\sqrt{2}} \frac{\cancel{(s+\sqrt{2})}\,1.\,e^{st}}{\cancel{(s+\sqrt{2})}(s-\sqrt{3})} = \frac{e^{-\sqrt{2}t}}{-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{Res}[F(s).e^{st}, (s-\sqrt{3})] = \lim_{s\to\sqrt{3}} \frac{\cancel{(s-\sqrt{3})}.\,1.\,e^{st}}{(s+\sqrt{2}).\cancel{(s-\sqrt{3})}} = \frac{e^{\sqrt{3}t}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{e^{\sqrt{2}t}}{-\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{e^{\sqrt{3}t}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$$

4

(i) $F(s) = \dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s).e^{st}\,dt = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[F(s).e^{st}; s_k]$$

$$\operatorname{Res}[F(s).e^{st}, s_k] = \lim_{s\to -a} \frac{\cancel{(s+a)}.\,1.\,e^{st}}{\cancel{(s+a)}(s+b)} = \frac{e^{-at}}{b-a}$$

$$\operatorname{Res}[F(s).e^{st}, s_k] = \lim_{s\to -b} \frac{\cancel{(s+b)}.\,1.\,e^{st}}{(s+a)\cancel{(s+b)}} = \frac{e^{-bt}}{a-b}$$

$$f(t) = \frac{e^{-at}}{b-a} + \frac{e^{-bt}}{a-b}$$

(k) $F(s) = \operatorname{atan}\dfrac{1}{s}$

Utilizando a propriedade 8 (derivação de imagens), temos:

$$\frac{dF(s)}{ds} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -t.\,f(t) \qquad F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(t)$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\operatorname{atan}\left(\frac{1}{s}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{s}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{s}\right)' = -\frac{\cancel{s^2}}{s^2+1}\cdot\frac{1}{\cancel{s^2}} = -\frac{1}{s^2+1}$$

$$-\frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -\sin t = -t.\,f(t) \therefore \boxed{f(t) = \frac{\sin t}{t}}$$

4

Questão 3 Sabendo que a imagem de um certo original $f(t)$ é $F(s) = \frac{s}{s^3+8}$, pede-se:

a) Determine a imagem de $f'(t)$;

Utilizando a propriedade 6, derivação de originais, temos:

$$f'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} [sF(s) - f(0)]$$

Pelo teorema o valor inicial, temos:

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s \cdot s}{s^3+8} = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{s^3} \cdot \frac{1}{1+\frac{8}{s^3}} = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+\underbrace{\frac{8}{s^3}}_{\to 0}} = 0$$

$\therefore f(0) = 0$ $\boxed{f'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s^2}{s^3+8}}$ //

b) Determine a imagem de $f''(t)$.

Utilizando a propriedade 6, derivação de originais, temos:

$$f''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} [s^2 \cdot F(s) - s f(0) - f'(0)]$$

Pelo teorema do valor inicial:

$$f'(0) = \lim_{s\to\infty} [s^2 F(s) - s f(0)] = \lim_{s\to\infty} \frac{s^3}{s^3+8} = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{1+\frac{8}{s^3}} = 1 \therefore$$

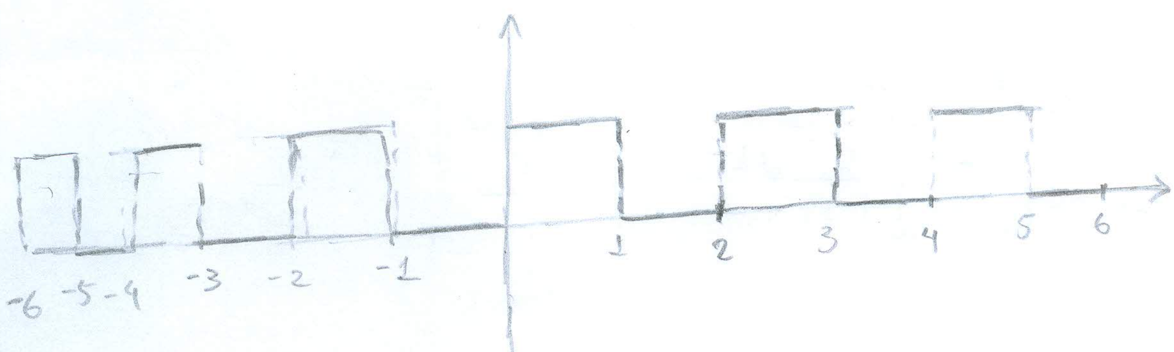
$f'(0) = 1$. Assim, $f''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \boxed{\frac{s^3}{s^3+8} - 1}$ //

↳ imagem de $f''(t)$

Questão 4 - Seja $f(t)$ uma função periódica de período $T = 2$, tal que

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{para } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico desta função no intervalo $-6 \leq t < 6$;




b) Calcule a transformada de Laplace de $f(t)$.

Utilizando a propriedade de atraso de originais, temos:

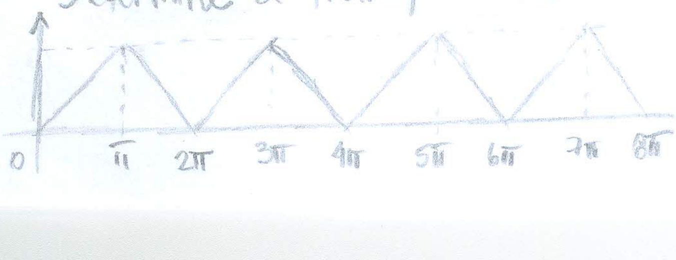
$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{G(s)}{1 - e^{-Ts}}$$ , onde $T$ é o período da função.

e $G(s)$ é a imagem de $g(t) = h(t) - h(t-1)$.

$$h(t) - h(t-1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

$$\boxed{F(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2s}}}$$

Questão 5 - Determine a transformada de Laplace da função periódica abaixo



$$g(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ -t + 2\pi & \text{para } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{G(s)}{1 - e^{-Ts}} \qquad T = 2\pi$$

$$G(s) = \int_0^T g(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = \underbrace{\int_0^\pi t \cdot e^{-st} \cdot dt}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_\pi^{2\pi} (-t+2\pi) \cdot e^{-st} dt}_{\mathrm{II}} \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} \rightarrow \int_0^\pi t \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{t \cdot e^{-st}}{-s}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{e^{-st}}{(-s)} dt = \left[\frac{t \cdot e^{-st}}{-s}\right]_0^\pi + \left[\frac{e^{-st}}{-s^2}\right]_0^\pi =$$

$$\frac{\pi \cdot e^{-s\pi}}{-s} - \frac{e^{-s\pi}}{s^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{1 - e^{-s\pi}}{s^2} - \frac{\pi \cdot e^{-s\pi}}{s}$$

$$\mathrm{II} \rightarrow \int_\pi^{2\pi} (-t+2\pi) \cdot e^{-st} dt = \int_\pi^{2\pi} -t \cdot e^{-st} dt + \int_\pi^{2\pi} 2\pi \cdot e^{-st} dt \Rightarrow$$

$$\left[\frac{-t \cdot e^{-st}}{(-s)}\right]_\pi^{2\pi} - \int_\pi^{2\pi} \frac{-e^{-st}}{(-s)} dt + \left[\frac{-2\pi e^{-st}}{s}\right]_\pi^{2\pi} = \left[\frac{2\pi \cdot e^{-s2\pi}}{s} - \frac{\pi \cdot e^{-s\pi}}{s}\right] - \left[\frac{-e^{-st}}{(-s^2)}\right]_\pi^{2\pi}$$

$$\left[-\frac{2\pi \cdot e^{-2\pi s t}}{s} + \frac{2\pi e^{-st}}{s}\right]_\pi^{2\pi} = \cancel{\boxed{\frac{2\pi \cdot e^{-2\pi s}}{s}}} - \frac{\pi \cdot e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2} \cancel{\boxed{-\frac{2\pi \cdot e^{-2\pi s}}{s}}} + \frac{2\pi \cdot e^{-\pi s}}{s} =$$

$$\frac{\pi \cdot e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2}$$

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = G(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s\pi}}{s^2} - \cancel{\frac{\pi \cdot e^{-s\pi}}{s}} + \cancel{\frac{\pi \cdot e^{-\pi s}}{s}} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2} - \frac{2e^{-\pi s}}{s^2}}$$

$$F(s) = \left[ \frac{\frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2\pi s}}{s} - \frac{2e^{-\pi s}}{s^2}}{1 - e^{-2\pi s}} \right]$$

Questão 6 - Calcule a transformada de Laplace de $h(t) = \cos t * \sin t$

Aqui, podemos utilizar a propriedade 10, imagem da convolução:

$$h(t) = f(t) * g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s).G(s)$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \Rightarrow \cos t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2+1}$$

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s) \Rightarrow \sin t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2+1}$$

$$\therefore H(s) = F(s).G(s) = \left(\frac{s}{s^2+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

4

Exercício 2

k → Faltou ser resolvido! Aqui vai...

j $F(s) = \dfrac{1}{(s^2-4s+5)}$

$$\frac{1}{s^2+4s+5} = \frac{1}{(s-2)^2+1}$$

Aqui podemos utilizar a propriedade de deslocamento de origem da imagem

$$e^{at}.f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s-a) \therefore \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2+1}\right\} = e^{2t}.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = e^{2t}.\sin t \therefore \boxed{f(t) = e^{2t}.\sin t}$$

4

15