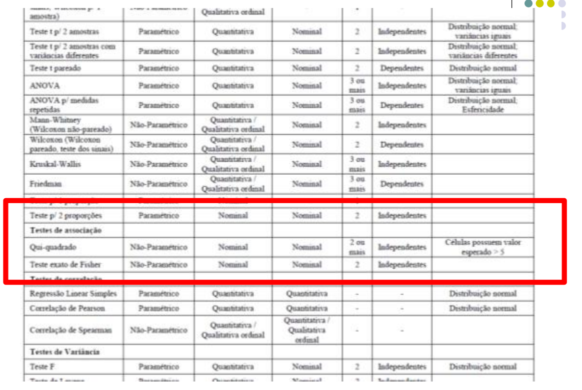
Associação e Proporções

Tabelas de Contingência

Teste de χ^2

Aula de hoje



Teste t p/ 2 amostras	Paramétrico	Quantitativa	Nominal	2	Independentes	Distribuição normal; variâncias iguais
Teste t p/ 2 amostras com variâncias diferentes	Paramétrico	Quantitativa	Nominal	2	Independentes	Distribuição normal; variâncias diferentes
Teste t pareado	Paramétrico	Quantitativa	Nominal	2	Dependentes	Distribuição normal
ANOVA	Paramétrico	Quantitativa	Nominal	3 ou mais	Independentes	Distribuição normal; variâncias iguais
ANOVA p/ medidas repetidas	Paramétrico	Quantitativa	Nominal	3 ou mais	Dependentes	Distribuição normal; Esfericidade
Mann-Whitney (Wilcoxon não-pareado)	Não-Paramétrico	Quantitativa / Qualitativa ordinal	Nominal	2	Independentes	
Wilcoxon (Wilcoxon pareado, teste dos sinais)	Não-Paramétrico	Quantitativa / Qualitativa ordinal	Nominal	2	Dependentes	
Kruskal-Wallis	Não-Paramétrico	Quantitativa / Qualitativa ordinal	Nominal	3 ou mais	Independentes	
Friedman	Não-Paramétrico	Quantitativa / Qualitativa ordinal	Nominal	3 ou mais	Dependentes	
Teste p/ 2 proporções	Paramétrico	Nominal	Nominal	2	Independentes	
Testes de associação						
Qui-quadrado	Não-Paramétrico	Nominal	Nominal	2 ou mais	Independentes	Células possuem valor esperado > 5
Teste exato de Fisher	Não-Paramétrico	Nominal	Nominal	2	Independentes	
Regressão Linear Simples	Paramétrico	Quantitativa	Quantitativa	-	-	Distribuição normal
Correlação de Pearson	Paramétrico	Quantitativa	Quantitativa	-	-	Distribuição normal
Correlação de Spearman	Não-Paramétrico	Quantitativa / Qualitativa ordinal	Quantitativa / Qualitativa ordinal	-	-	
Testes de Variância						
Teste F	Paramétrico	Quantitativa	Nominal	2	Independentes	Distribuição normal

Teste de χ^2

- Quando estamos comparando amostras cuja variável de interesse é qualitativa com nível de mensuração nominal, podemos utilizar o teste de χ^2.
- O teste de χ^2 permite testar se há **associação** entre duas variáveis nominais.

Tabela 2x2 (valores esperados – dados hipotéticos)

Valores esperados (proporções iguais)

sexo

sedentarismo	f	m	Total
Não	?	?	50
Sim	?	?	50
Total	50	50	100

Tabela 2x2 (valores esperados – dados hipotéticos)

Valores esperados (proporções iguais)

sexo

sedentarismo	f	m	Total
Não	25	25	50
Sim	25	25	50
Total	50	50	100

Tabela 2x2 (valores esperados – dados reais)

Valores esperados (proporções iguais)

sexo

sedentarismo	f	m	Total
Não	?	?	104
Sim	?	?	67
Total	65	106	171

Tabela 2x2 (valores esperados – dados reais)

Valores esperados (proporções iguais)

sedentarismo		sexo: f	sexo: m	Total
	Não	39,5	64,5	104
	Sim	25,5	41,5	67
	Total	65	106	171

Associação – Exemplo 1

- Hawkins e col. (1993) estudaram o efeito da castração neonatal na prevalência de diabetes em camundongos. Camundongos foram aleatoriamente alocados em 2 grupos: experimental e controle. Os pesquisadores estavam interessados em comparar, após algum tempo, a proporção de animais diabéticos nesses dois grupos.

Tipos de Variáveis

- Variável dependente
  - Diabetes (Qualitativa nível de mensuração nominal)
    - Presente
    - Ausente
- Variável independente (Qualitativa nível de mensuração nominal)
  - Amostras (Grupos)
    - Castrado
    - Não castrado

Tipos de Variáveis

Independente → Dependente

- Na busca de identificação de associação estamos procurando determinar como a variável independente *explica (modula*) a variável dependente

Obs: Não confundir com dependência entre grupos (amostras)

Tabelas de Contingência 2x2

- Em análises desse tipo, consideram-se os grupos como amostras de duas populações e usam-se as proporções, p_1 e p_2, como estimativa das proporções populacionais, π_1 e π_2. Pode-se testar a hipótese de que estas duas proporções sejam as mesmas de duas maneiras
  - Utilizando o teste de χ^2
  - Utilizar a aproximação normal para a distribuição binomial e calcular a estatística (Comparação de 2 proporções)
- Os dois testes produzem resultados idênticos

Tabelas de Contingência

- Os resultados do exemplo anterior podem ser resumidos numa tabela 2x2, também conhecida como tabela de contingência
- Princípio do Teste
  - Se não há associação entre variável dependente e a independente, devemos esperar que a proporção de sucessos (diabetes) seja a mesma nos dois grupos

Exemplo 1

- Camundongo não obeso diabético (NOD) desenvolve diabetes autoimune que é usada como modelo para o diabetes juvenil humano insulino-dependente. Nos camundongos da colônia de Hawkins, a incidência para machos e fêmeas era de 24% e 73%, respectivamente. Hawkins investigou a causa desta diferença entre os sexos avaliando o efeito da castração precoce na incidência de diabetes em camundongos NOD machos.

Exemplo 1

- De 100 camundongos NOD machos, 50 foram castrados um dia após o nascimento e outros 50 foram submetidos a uma falsa cirurgia. Os camundongos foram mantidos por 140 dias, e amostras de sangue foram colhidas a cada duas semanas a partir do 42 dia. Diabetes foi diagnosticada como estando presente quando três amostras consecutivas apresentaram níveis de glicose superiores a 200mg/dl. O experimento permitiu verificar que a castração provocou um aumento na incidência de diabetes (52%) quando comparado com animais não castrados (24%) no dia 112.

- Teste de hipóteses:

  H_0: **Não há associação** entre diabetes e castração neonatal (ou seja, as **proporções** de camundongos com diabetes **são iguais** nos castrados e nos controles)

  H_1: **Há associação** entre diabetes e castração neonatal (ou seja, as **proporções** de camundongos com diabetes **não são iguais** nos castrados e nos controles)

Teste de χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\frac{(o_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

o_{ij} : contagem observada

e_{ij} : contagem esperada

Graus de liberdade : $df = (r-1)(k-1)$

r : número de linhas da tabela

k : número de colunas da tabela

Teste χ^2

Valores observados

	Castrados	Controle	Total
Com diabetes	26	12	38
Sem diabetes	24	38	62
Total	50	50	100

Valores esperados

	Castrados	Controle	Total
Com diabetes	19	19	38
Sem diabetes	31	31	62
Total	50	50	100

χ^2=8,319 p=0,004

Teste χ^2 (freqüências observadas)

		Grupo 1	Grupo 2	Total
Resultado	Sucesso	a	b	a+b
	Fracasso	c	d	c+d
Total		a+c	b+d	n=a+b+c+d
Proporção observada de sucessos		p_1=a/(a+c)	p_2=b/(b+d)	p=(a+b)/(a+b+c+d)

Teste χ^2 (freqüências esperadas)

		Grupo	
		1	2
Resultado	Sucesso	(a+c)(a+b)/n	(b+d)(a+b)/n
	Fracasso	(a+c)(c+d)/n	(b+d)(c+d)/n

equivalente a

		Grupo	
		1	2
Resultado	Sucesso	e_{11}	e_{12}
	Fracasso	e_{21}	e_{22}

Exemplo 1

Chi-Square Test: castrados, controle

```
Expected counts are printed below observed counts
Chi-Square contributions are printed below expected counts

      castrados  controle  Total
    1        26        12     38
          19.00     19.00
          2.579     2.579

    2        24        38     62
          31.00     31.00
          1.581     1.581

Total        50        50    100

Chi-Sq = 8.319, DF = 1, P-Value = 0.004
```

Rejeita-se H_0. Há evidências de que a castração neonatal esteja associada à incidência de diabetes em camundongos NOD.

Teste de comparação de duas proporções

Hipóteses do teste:

$$H_0 : p_1 = p_2$$
$$H_1 : p_1 \neq p_2$$

- Proporção de castrados com diabetes (p_1): $$p_1 = \frac{26}{50} = 0{,}52$$
- Proporção de animais submetidos à falsa cirurgia com diabetes (p_2): $$p_2 = \frac{12}{50} = 0{,}24$$

Teste de comparação de duas proporções

Resultados do Minitab:

Test and CI for Two Proportions

Sample	X	N	Sample p
1	26	50	0.520000
2	12	50	0.240000

Estimate for p(1) - p(2): 0.28
95% CI for p(1) - p(2): (0.0978182, 0.462182)
Test for p(1) - p(2) = 0 (vs not = 0): Z = 3.01 P-Value = 0.003

Para um nível de significância de 5%, rejeitamos a hipótese nula de proporções iguais e dizemos que foi observada uma diferença estatística significativa entre as proporções (P=0,003). Essa decisão é idêntica à tomada ao se utilizar o teste de χ^2.

Exemplo 2 (Aula prática de 2 proporções)

- Exemplo: Pesquisadores decidiram avaliar se a proporção de cães machos é idêntica em cães domiciliados e não-domiciliados. Fizeram um levantamento em um certo município, e observaram que, dos 510 cães domiciliados amostrados, 301 eram machos, e, dentre os 230 não-domiciliados recolhidos nas ruas, 97 eram machos.
- Pelo teste de comparação de duas proporções:

  H_0: A proporção de cães machos **é igual** em cães domiciliados e em não-domiciliados

  H_1: A proporção de cães machos **não é igual** em cães domiciliados e em não-domiciliados

Exemplo 2

- Teste de comparação de duas proporções:

Test and CI for Two Proportions

Sample	X	N	Sample p
1	301	510	0,590196
2	97	230	0,421739

Difference = p (1) - p (2)
Estimate for difference: 0,168457
95% CI for difference: (0,0916781; 0,245236)
Test for difference = 0 (vs not = 0): Z = 4,30 P-Value = 0,000

P < 0,001

Exemplo 2: Teste de χ^2

- Hipóteses do teste:
  H_0: Não há associação entre o sexo do cão e ser ou não domiciliado
  H_1: Há associação entre o sexo do cão e ser ou não domiciliado

	domiciliados	*não domiciliados*	*Total*
Macho	301	97	398
Fêmea	209	133	342
Total	510	230	740

Exemplo 2: Teste de χ^2

Chi-Square Test: domiciliados, naodomiciliados

```
Expected counts are printed below observed counts

Chi-Square contributions are printed below
expected counts

       domiciliados  naodomiciliados  Total
   1            301               97    398
             274.30           123.70
              2.599            5.764

   2            209              133    342
             235.70           106.30
              3.025            6.708

Total           510              230    740
Chi-Sq = 18.097, DF = 1, P-Value = 0.000
```

P < 0,001

Exemplo 2

- Conclusão: Tanto pelo Teste de Comparação de 2 Proporções quanto pelo Teste de χ^2, a hipótese nula é rejeitada, ou seja, foi observada uma associação entre as duas variáveis, o que é equivalente a observar uma diferença entre as proporções.

Exemplo 3

- (Adaptado de Petrie e Watson, 1999) Um centro de inseminação artificial comparou três diferentes métodos de treinamento em técnicas de inseminação em gado bovino. As freqüências observadas de vacas prenhes e não-prenhes estão indicadas na tabela a seguir. Há alguma evidência de que os três métodos de treinamento mostram diferentes taxas de sucesso na inseminação?

	método 1	**método 2**	**método 3**
vacas prenhes	275	192	261
vacas não-prenhes	78	64	123

Exemplo 3: Hipóteses

- Teste de hipóteses:

H_0 : Não há associação entre método de inseminação artificial e prenhez

H_1 : Há associação entre método de inseminação artificial e prenhez

Chi-Square Test: metodo1; metodo2; metodo3
Expected counts are printed below observed counts

```
      metodo1  metodo2  metodo3   Total
  1     275      192      261      728
      258.80   187.68   281.52

  2      78       64      123      265
       94.20    68.32   102.48

Total   353      256      384      993

Chi-Sq =  1.015 +  0.099 +  1.496 +
          2.787 +  0.273 +  4.110 = 9.780
DF = 2, P-Value = 0.008
```

Exemplo 3: Interpretação

- Como se observa pelo valor de *p* (*p*=0,008), temos evidências para rejeitar a hipótese nula de que as taxas de sucesso são idênticas para os três métodos, para um nível de significância de 5%.

Exemplo com mais categorias

- Um pesquisador está interessado em saber se existe uma predisposição de raça para a ocorrência de sarna sarcóptica em cães. Foram selecionados 300 animais aleatoriamente num município, sendo procedidos exames para verificar a presença de sarna. Nos animais selecionados identificou-se a presença de animais da raça poodle, cocker e SRD (dados hipotéticos).
- H_0: A proporção de animais com sarna **é igual** nas diferentes raças
  H_1: A proporção de animais com sarna **não é igual** nas diferentes raças

	Sarna +	Sarna -	Total
Poodle	2	48	50
Cocker	3	67	70
SRD	40	140	180
Total	45	255	300

Exemplo com mais categorias

- H_0: A proporção de animais com sarna é igual nas diferentes raças
  H_1: A proporção de animais com sarna não é igual nas diferentes raças
- Essas hipóteses podem ser escritas como:
  H_0: Não há associação entre raça e ocorrência de sarna
  H_1: Há associação entre raça e ocorrência de sarna

Teste de χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\frac{(o_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

o_{ij} : contagem observada

e_{ij} : contagem esperada

- Sob H_0, pode-se mostrar que a distribuição amostral de qui-quadrado tem aproximadamente distribuição de qui-quadrado com gl=$(r-1)(k-1)$ graus de liberdade (r = número de linhas, k = número de colunas da tabela de χ^2)

Teste χ^2 (freqüências observadas)

		Variável 2		
		Categoria 1	Categoria 2	Total
Variável 1	Categoria 1	a	b	a+b
	Categoria 2	c	d	c+d
	Categoria 3	e	f	e+f
Total		a+c+e	b+d+f	n=a+b+c+ +d+e+f

Teste χ^2 (freqüências esperadas)

		Variável 2	
		Cat. 1	Cat. 2
Variável 1	Categoria 1	(a+c+e)(a+b)/n	(b+d+f)(a+b)/n
	Categoria 2	(a+c+e)(c+d)/n	(b+d+f)(c+d)/n
	Categoria 3	(a+c+e)(e+f)/n	(b+d+f)(e+f)/n

equivalente a

		Variável 2	
		Cat. 1	Cat. 2
Variável 1	Categoria 1	e_{11}	e_{12}
	Categoria 2	e_{21}	e_{22}
	Categoria 3	e_{31}	e_{32}

Teste de χ^2

Observado	Sarna +	Sarna -	Total
Poodle	2	48	50
Cocker	3	67	70
SRD	40	140	180
Total	45	255	300

Esperado	Sarna +	Sarna -	Total
Poodle	7,5	42,5	50
Cocker	10,5	59,5	70
SRD	27	153	180
Total	45	255	300

Teste de χ^2

$$\chi^2 = \frac{(2-7{,}5)^2}{7{,}5} + \frac{(48-42{,}5)^2}{42{,}5} + \frac{(3-10{,}5)^2}{10{,}5} + \frac{(67-59{,}5)^2}{59{,}5} + \frac{(40-27)^2}{27} + \frac{(140-153)^2}{153} =$$
$$= 4{,}033 + 0{,}712 + 5{,}357 + 0{,}945 + 6{,}259 + 1{,}105 = 18{,}411$$
$$\chi^2 = 18{,}411$$

```
              C9       C10     Total
    1          2        48        50
            7,50     42,50

    2          3        67        70
           10,50     59,50

    3         40       140       180
           27,00    153,00

Total         45       255       300

Chi-Sq =   4,033 +  0,712 +
           5,357 +  0,945 +
           6,259 +  1,105 = 18,411
DF = 2, P-Value = 0,000
```

Interpretação

- Como p<0,001, há uma associação entre raça e ocorrência de sarna, ou seja, há diferença entre as raças quanto à predisposição à sarna.

Teste Exato de Fisher

- Quando pelo menos um dos valores esperados for **menor que 5**, recomenda-se o uso do Teste Exato de Fisher.
- O Teste Exato de Fisher é recomendado para amostras pequenas (N<20).

Teste Exato de Fisher: Exemplo

- Exemplo: ("Uma Senhora Toma Chá") Em um chá da tarde em Cambridge, uma senhora diz que é capaz de dizer se o leite foi colocado primeiro ou se o chá foi colocado primeiro em uma xícara de chá com leite (ou vice-versa). O próprio R. A. Fisher conduziu o experimento de oferecer 8 xícaras para que a senhora dissesse se chá ou leite foi colocado primeiro.

Exemplo: Teste Exato de Fisher

O que a senhora diz

Colocado primeiro ("verdade")	Chá primeiro	Leite primeiro	
Chá	3	1	4
Leite	1	3	4
	4	4	8

Teste Exato de Fisher

O que a senhora diz

"Verdade"	chá	leite	Total
chá	a	b	a+b
leite	c	d	c+d
Total	a+c	b+d	n

A probabilidade de uma tabela com $\{a,b,c,d\}$ ocorrer é

$$P\{a,b,c,d\} = \frac{\binom{a+b}{a}\binom{c+d}{c}}{\binom{n}{a+c}} = \frac{(a+b)!(c+d)!(a+c)!(b+d)!}{n!a!b!c!d!}$$

Teste Exato de Fisher

O que a senhora diz

		chá	leite	Total
"Verdade"	chá	3	1	4
	leite	1	3	4
	Total	4	4	8

A probabilidade de uma tabela com $\{a = 3, b = 1, c = 1, d = 3\}$ ocorrer é

$$p_1 = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{1}}{\binom{8}{4}} = \frac{(4)!(4)!(4)!(4)!}{8!3!1!1!3!} = \frac{16}{70} = 0{,}229$$

Teste Exato de Fisher

O que a senhora diz

		chá	leite	Total
"Verdade"	chá	4	0	4
	leite	0	4	4
	Total	4	4	8

A probabilidade de uma tabela mais extrema com $\{a = 4, b = 0, c = 0, d = 4\}$ ocorrer é

$$p_2 = \frac{\binom{4}{4}\binom{4}{0}}{\binom{8}{4}} = \frac{1}{70} = 0{,}014$$

Teste Exato de Fisher

$$\begin{array}{|cc|}\hline 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|cc|}\hline 4 & 0 \\ 0 & 4 \\ \hline \end{array}$$

A probabilidade de obtermos ou a tabela observada ou uma tabela com valores mais extremos é de $p = p_1 + p_2 = 0{,}229 + 0{,}014 = 0{,}243$.
Este é o valor de p monocaudal, que seria o mais adequado em uma análise para saber se a senhora acertou.
Observação: Se o interesse fosse em um teste bicaudal, o valor de p do teste exato de Fisher seria de $2 \times 0{,}243 = 0{,}486$.

Exemplo: Teste Exato de Fisher

```
> .Table  # Counts
      chá leite
chá     3     1
leite   1     3

> .Test$expected # Expected Counts
      chá leite
chá     2     2
leite   2     2

> fisher.test(.Table,alternative="greater")
   Fisher's Exact Test for Count Data

data:  .Table
p-value = 0.2429
alternative hypothesis: true odds ratio is greater than 1
95 percent confidence interval:
 0.3135693       Inf
sample estimates:
odds ratio
  6.408309
```

monocaudal !

No R Commander: *Statistics > Contingency tables > Enter and analyze two-way table*

O automático no R Commander é o teste bicaudal (mais utilizado)!

Exemplo: Teste Exato de Fisher

- Como P>0,05, não se rejeita a hipótese nula de que a senhora não tem habilidade para distinguir entre leite e chá primeiro.
- No entanto, conta a lenda que a senhora acertou todas as 8 xícaras. Qual seria o valor de p nessa situação?

Resp: p = 0,014 (monocaudal)

Referências

- Associação:
  - A. Petrie e P. Watson. *Statistics for Veterinary and Animal Science*. Blackwell, 1999.
  - E. Massad et al. (Ed.) *Métodos Quantitativos em Medicina*. Barueri, Manole, 2004.
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Chi-squared_distribution
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Pearson%27s_chi-squared_test
- Leitura:
  - D. Salsburg. *Uma Senhora Toma Chá*. Zahar, 2009.
  - https://onlinecourses.science.psu.edu/stat504/print/book/export/html/89
  - http://www.coe.utah.edu/~cs3130/lectures/L15-HypothesisTests1.pdf
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Lady_tasting_tea