Solução da Lista 6

Questão 1 - Determine os pólos das seguintes funções:

a) $\dfrac{1}{(z+2i)^2}$

Pólo de ordem 2 em $z=-2i$

b) $\dfrac{1}{z(z+i)^3}$

Pólo simples em $z=0$ e pólo de ordem 3 em $z=-i$

c) $\dfrac{2}{z-1}+\dfrac{8}{(z-2)(z-1)(z+4)} = \dfrac{2(z-2)(z+4)+8}{(z-1)(z-2)(z+4)}$

Pólo simples em $z=1$, $z=2$ e $z=-4$

d) $\dfrac{e^{z-1}}{z^2(z-3)^3(z-1)^2}$

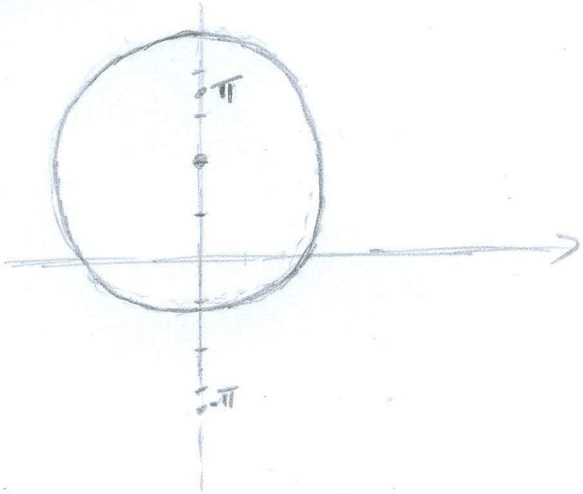
Pólo de ordem 2 em $z=0$

Pólo de ordem 3 em $z=3$

Pólo de ordem 2 em $z=1$

Questão 2 - Fazendo uso do teorema dos resíduos, calcule:

a) $\oint_C \dfrac{e^z}{z^2+\pi^2}\,dz$, ~~onde~~ C é uma circunferência de raio 3, centrada em $z=0+2i$



A função $\dfrac{e^z}{z^2+\pi^2}$ tem pólos em

$z = \pm\pi i$ No entanto, só o polo $z = \pi i$ está dento do caminho C.

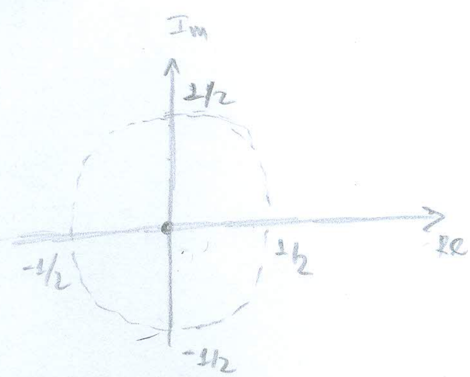
Logo:

$$\oint_C \frac{e^z\,dz}{z^2+\pi^2} = 2\pi i.\ \mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^2+\pi^2},\ z=\pi i\right]$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^2+\pi^2},\ z=\pi i\right] = \lim_{z\to\pi i}\frac{\cancel{(z-\pi i)}e^z}{\cancel{(z-\pi i)}(z+\pi i)} = \frac{e^{\pi i}}{2\pi i} \quad \therefore$$

$$\boxed{\oint_C \frac{e^z}{z^2+\pi^2}dz = e^{\pi i} = -1}$$

b) $\oint_C \dfrac{1}{z^2+z^4}dz$, onde C é uma circunferência de raio $1/2$, centrada na origem do plano complexo



$f(z) = \dfrac{1}{z^2+z^4}$ tem pólo em $z=0$ de ordem 2 e pólo em $z=i$ de ordem 1 e pólo em $z=-i$ de ordem 1.

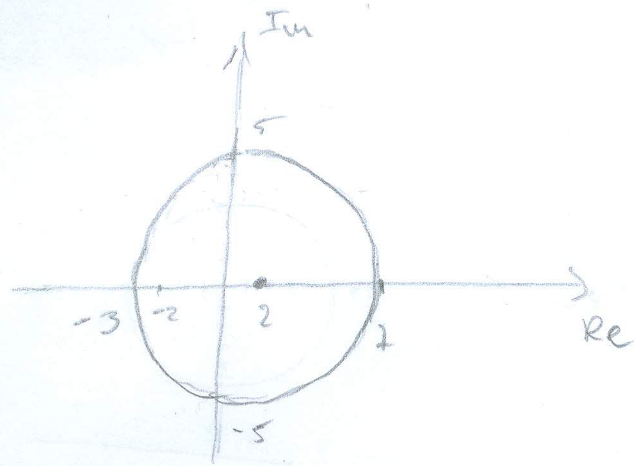
No entanto, somente o pólo duplo em $z=0$ está contido dentro do contorno C. Assim

$$\oint_C \frac{1}{z^2+z^4}dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}\left[f(z),\ z=0\right] = 2\pi i\ \frac{1}{(2-1)!}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2\cdot 1}{z^2(1+z^2)}\right] =$$

$$2\pi i.\ \lim_{z\to 0} -\frac{2z}{(z^2+1)^2} = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\oint_C \frac{1}{z^2+z^4}dz = 0}$$

2

c) $\oint_C \frac{z}{z^3+8}dz$, onde C é uma circunferência de raio 5, centrada em $z = 2+0i$



$f(z) = \frac{z}{z^3+8}$ tem pólos em

$z = -2$, $z = 1+\sqrt{3}i$ e $z = 1-\sqrt{3}i$

Para acharmos os pólos da função $f(z) = \frac{z}{z^3+8}$ devemos proceder da seguinte maneira:

$z^3+8=0 \Rightarrow z = \sqrt[3]{-8} = -2$. Dessa forma, determinamos o primeiro pólo. Os demais podem ser determinados da seguinte forma:

identidade polinomial.

$(z+2).(z-A)(z-B) \equiv z^3+8 \Rightarrow$

$(z^2 - Az + 2z - 2A)(z-B) \equiv z^3+8 \Rightarrow$

$z^3 - Bz^2 - Az^2 + ABz + 2z^2 - 2Bz - 2Az + 2AB \equiv z^3+8 \Rightarrow$

$$\begin{cases} -B-A+2=0 \\ AB-2B-2A=0 \\ 2AB=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ 2AB=8 \end{cases} \Rightarrow A = 2-B$$

$\therefore$

$(2-B)B = 4 \Rightarrow$

$2B - B^2 - 4 = 0 \Rightarrow -B^2+2B-4=0 \Rightarrow B = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(-1).(-4)}}{2.(-1)} \Rightarrow$

$B = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{-2}$ ⟨ $B_1 = 1+\sqrt{3}i$, $B_2 = 1-\sqrt{3}i$

$\therefore$

$A_1 = 2-(1+\sqrt{3}i) = 1-\sqrt{3}i$ e $A_2 = 2-(1-\sqrt{3}i) = 1+\sqrt{3}i$

Se escolhermos $A_2 = 1+\sqrt{3}i$ para pólo, o conjugado dele, $B_1 = 1-\sqrt{3}i$ também é pólo. Assim

$$f(z) = \frac{z}{z^3+8} = \frac{z}{(z+2).(z-1-\sqrt{3}i)(z-1+\sqrt{3}i)}$$

Como todos os pólos estão dentro do contorno C, então:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i . \sum_{k=1}^{n} Res\left[f(z), s_k\right]$$

$$Res\left[f(z),(s+2)\right] = \lim_{z\to -2} \frac{(\cancel{z+2}).\ z}{(\cancel{z+2})(z-1-\sqrt{3}i)(z-1+\sqrt{3}i)} = \frac{-2}{(-3-\sqrt{3}i)(-3+\sqrt{3}i)}$$

$$Res\left[f(z),(s-1-\sqrt{3}i)\right] = \lim_{z\to 1+\sqrt{3}i} \frac{(\cancel{z-1-\sqrt{3}i})\ z}{(z-2)(\cancel{z-1-\sqrt{3}i})(z-1+\sqrt{3}i)} = \frac{(1+\sqrt{3}i)}{(-1+\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}i)}$$

$$Res\left[f(z),(s-1+\sqrt{3}i)\right] = \lim_{z\to -1+\sqrt{3}i} \frac{(\cancel{z-1+\sqrt{3}i})\ z}{(z-2)(z-1-\sqrt{3}i)(\cancel{z-1+\sqrt{3}i})} = \frac{(-1+\sqrt{3}i)}{(-3+\sqrt{3}i)(-2)}$$

$$\therefore \quad \oint_C \frac{z}{z^3} = 2\pi i \left\{ \frac{-2}{(-3-\sqrt{3}i)(-3+\sqrt{3}i)} + \frac{(1+\sqrt{3}i)}{(-1+\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}i)} + \frac{(-1+\sqrt{3}i)}{(-3+\sqrt{3}i)(-2)} \right\}$$

Questão 3 - Dada a equação diferencial $y''(t) + y'(t) = 3$, pede-se

a) Fazendo uso da transformada de Laplace, determine $y(t)$, solução particular da E.D.O. dada, sujeita às condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Aplicando a transformada de Laplace, temos:

$$\mathcal{L}\{y''(t) + y'(t)\} = \mathcal{L}.\{3\} \Rightarrow s^2.Y(s) - s.\cancel{y(0)}^{0} - \cancel{y'(0)}^{0} + sY(s) - \cancel{y(0)}^{0} = \frac{3}{s}$$

$$s^2Y(s) + sY(s) = \frac{3}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{3}{s(s^2+s)} \Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{3}{s^2(s+1)}}$$

↳ imagem do original

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma+i\infty}^{\gamma+i\infty} Y(s).e^{st}ds = \sum_{k=1}^{n} Res\left[Y(s).e^{st}, s_k\right]$$

$\frac{3}{s^2(s+1)}$ tem pólo em $s=0$ de ordem 2 e pólo em $s=-1$ de ordem 1.

Assim;

$$Res[Y(s).e^{st}, s=0] = \lim_{s\to 0} \frac{1}{(2-1)!} \cdot \frac{d}{dz}\left[\frac{\cancel{s^2}.3.e^{st}}{\cancel{s^2}.(s+1)}\right] = \lim_{s\to 0} \frac{d}{dz}\left[\frac{3.e^{st}}{(s+1)}\right] =$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{3t.e^{st}(s+1) - 3e^{st}}{(s+1)^2} = 3t - 3$$

$$Res[Y(s).e^{st}, s=-1] = \lim_{s\to -1} \frac{\cancel{(s+1)}.3.e^{st}}{\cancel{(s+1)}.s^2} = 3.e^{-t}$$

$$\boxed{y(t) = 3.e^{-t} + 3t - 3}$$

↳ solução particular da E.D.O.

b) Verifique se a solução obtida em (a) satisfaz à E.D.O. e as condições iniciais.

Verificando se a solução obtida satisfaz à E.D.O.

$y'(t) = -3.e^{-t} + 3$

$y''(t) = 3.e^{-t}$

$3.e^{-t} - 3.e^{-t} + 3 = 3$ ∴ logo, a solução obtida é de fato solução da E.D.O

$y(0) = 3.e^{-(0)} + 3(0) - 3 = 0$

$y'(0) = -3.e^{-(0)} + 3 = 0$

A solução obtida também satisfaz às condições iniciais.

Questão 4 - Dada a equação diferencial $y''(t) + 9y(t) = \sin 4t$, pede-se:

a) Fazendo uso da transformada de Laplace, determine $y(t)$, solução particular da E.D.O. dada, sujeita às condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 5$.

Aplicando a transformada de Laplace, temos:

$$\mathcal{L}\{y''(t) + 9y(t)\} = \mathcal{L}\{\sin 4t\} \Rightarrow$$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 9Y(s) = \frac{4}{s^2+16} \Rightarrow$$

$$s^2 Y(s) - 5 + 9Y(s) = \frac{4}{s^2+16} \Rightarrow \quad Y(s)(s^2+9) = \frac{4}{(s^2+16)} + 5 \Rightarrow$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{4}{(s^2+16)(s^2+9)} + \frac{5}{(s^2+9)}}$$

↳ Imagem do original $y(t)$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} Y(s).e^{st}\,ds = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[Y(s).e^{st}, s_k\right]$$

$$Y(s) = \frac{4}{(s^2+16)(s^2+9)} + \frac{5}{(s^2+9)} = \underbrace{\frac{4}{(s-4i)(s+4i)(s-3i)(s+3i)}}_{=Y_1(s)} + \underbrace{\frac{5}{(s-3i)(s+3i)}}_{=Y_2(s)}$$

$Y_1(s)$ tem pólos em $s = 4i$, $s = -4i$, $s = 3i$ e $s = -3i$, todos de 1ª ordem

$Y_2(s)$ tem pólos em $s = 3i$ e $s = -3i$, todos de 1ª ordem.

$$y_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} Y_1(s).e^{st}\,ds = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[Y_1(s).e^{st}, s_k\right]$$

$$\operatorname{Res}\left[Y_1(s).e^{st}, s = 3i\right] = \lim_{s \to 3i} \frac{\cancel{(s-3i)}.4.e^{st}}{\cancel{(s-3i)}(s-4i)(s+4i)(s+3i)} = \frac{4.e^{3it}}{-i.7i.6i} = \frac{4.e^{3it}}{42i} = \frac{2.e^{3it}}{21i}$$

$$Res\left[Y_1(s).e^{st}, s=-3i\right] = \lim_{s\to -3i} \frac{\cancel{(s+3i)}.4.e^{st}}{\cancel{(s+3i)}(s-3i)(s+4i)(s-4i)} = \frac{4.e^{-3t}}{-6i.i.-7i} =$$

$$\frac{4.e^{-3it}}{-42i} = \frac{-2.e^{-3it}}{21}$$

$$Res\left[Y_1(s).e^{st}, s=4i\right] = \lim_{s\to 4i} \frac{\cancel{(s-4i)}\,4.e^{st}}{\cancel{(s-4i)}(s-3i)(s+3i)(s+4i)} = \frac{4.e^{4i}}{i.7i.8i} =$$

$$\frac{4.e^{4i}}{-56i} = \frac{e^{4i}}{-14i}$$

$$Res\left[Y_1(s).e^{st}, s=-4i\right] = \lim_{s\to -4i} \frac{\cancel{(s+4i)}.4.e^{st}}{\cancel{(s+4i)}(s-3i)(s+3i)(s-4i)} = \frac{4.e^{-4i}}{-7i(-i).(-8i)} =$$

$$\frac{4.e^{-4i}}{56i} = \frac{e^{-4i}}{14i}$$

$$y_1(t) = \frac{2.e^{3it}}{21i} - \frac{2.e^{-3it}}{21i} + \frac{e^{4it}}{-14i} + \frac{e^{-4it}}{14i} = \frac{4\sin 3t}{21} - \frac{2}{14}.\sin 4t =$$

$$\frac{4\sin 3t}{21} - \frac{1}{7}.\sin 4t$$

7

$$Y_2(s) = \frac{5}{(s-3i)(s+3i)}$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} Y_2(s).e^{st}ds = \sum_{k=1}^{n} Res\left[Y_2(s).e^{st}, s_k\right]$$

$$Res\left[Y_2(s).e^{st}, s=3i\right] = \lim_{s\to 3i} \frac{\cancel{(s-3i)}.e^{st}.5}{\cancel{(s-3i)}.(s+3i)} = \lim_{s\to 3i} \frac{e^{st}.5}{(s+3i)} = \frac{5.e^{3it}}{6i}$$

$$Res\left[Y_2(s).e^{st}, s=-3i\right] = \lim_{s\to -3i} \frac{\cancel{(s+3i)}.e^{st}.5}{\cancel{(s+3i)}(s-3i)} = \lim_{s\to -3i} \frac{5e^{st}}{(s-3i)} = \frac{5.e^{-3it}}{-6i}$$

$$y_2(t) = \frac{5}{3}\sin 3t$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \frac{4\sin 3t}{21} - \frac{1}{7}.\sin 4t + \frac{5}{3}\sin 3t = \frac{117}{63}\sin 3t - \frac{1}{7}\sin 4t$$

$$\boxed{y(t) = \frac{117}{63}\sin 3t - \frac{1}{7}\sin 4t}$$ → solução particular sujeita às condições iniciais.

b) Verifique se a solução obtida em (a) satisfaz a E.D.O e as condições iniciais

(8)

$$y'(t) = \frac{117.3\cos 3t}{63} - \frac{1}{7}.4\cos 4t$$

$$y''(t) = \frac{-117.9}{63}\sin 3t + \frac{4.4}{7}\sin 4t$$

$$-\frac{117}{21}.\sin 3t + \frac{16}{7}\sin 4t + 9\left(\frac{117}{63}\sin 3t - \frac{1}{7}\sin 4t\right) = \sin 4t \Rightarrow$$

$$-\frac{117}{7}.\sin 3t + \frac{117}{7}\sin 3t + \frac{16}{7}.\sin 4t - \frac{9}{7}\sin 4t = \sin 4t$$

$$\frac{7}{7}\sin 4t = \sin 4t$$

∴ A solução particular é de fato solução da E.D.O.

$$y(t) = \frac{117}{63}\sin 3t - \frac{1}{7}\sin 4t \Rightarrow y(0) = 0$$

$$y'(t) = \frac{117.3\cos 3t}{63} - \frac{4}{7}\cos 4t \Rightarrow y'(0) = \frac{117}{21} - \frac{4}{7} = \frac{117-12}{21} = \frac{105}{21} = 5$$

Questão 5

a) Aplicando a transformada de Laplace, temos:

$$\mathcal{L}\{y''(t) + \lambda y'(t)\} = \mathcal{L}\{g\}$$

pólos $s=0$ de 2ª ordem
$s=-\lambda$ de 1ª ordem

$$s^2Y(s) - s\cancel{y(0)}^{0} - \cancel{y'(0)}^{0} + \lambda(sY(s) - \cancel{y(0)}^{0}) = \frac{g}{s}$$

$$Y(s)(s^2+\lambda s) = \frac{g}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{g}{s(s^2+\lambda s)} = \frac{g}{s^2(s+\lambda)}$$ → Imagem da solução.

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} Y(s).e^{st}ds = \sum_{k=1}^{n} Res[Y(s).e^{st}, s_k]$$

$$Res[Y(s)e^{st}, s=0] = \lim_{s\to 0}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[\frac{\cancel{s^2}.g.e^{st}}{\cancel{s^2}.(s+\lambda)}\right] = \lim_{s\to 0}\frac{g.t.e^{st}(s+\lambda) - g.e^{st}}{(s+\lambda)^2} = \frac{\lambda g.t}{\lambda^2} - \frac{g}{\lambda^2}$$

$$\text{Res}\left[Y(s).e^{st}, s=-\lambda\right] = \lim_{s\to-\lambda} \frac{\cancel{(s+\lambda)}.\,g.e^{st}}{\cancel{(s+\lambda)}.\,s^2} = \frac{g e^{-\lambda t}}{\lambda^2}$$

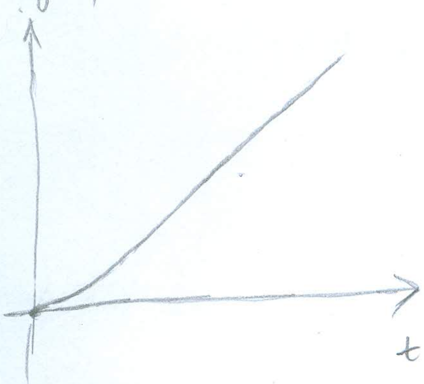
$$\boxed{y(t) = \frac{g.t}{\lambda} - \frac{g}{\lambda^2} + \frac{g.e^{-\lambda t}}{\lambda^2}}$$

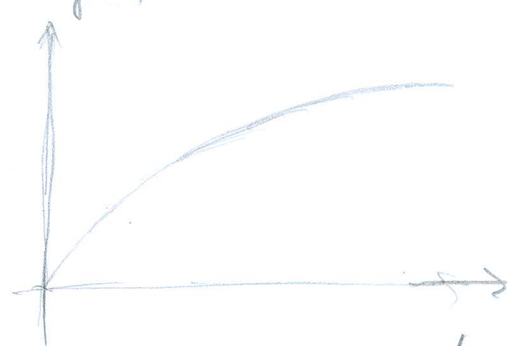
↳ solução particular

9

b)

$$y'(t) = \frac{g}{\lambda} - \frac{g.\lambda.e^{-\lambda t}}{\lambda^2} = \frac{g}{\lambda} - \frac{g.e^{-\lambda t}}{\lambda}$$





c)

$$y''(t) = g.e^{-\lambda t} \quad \text{quando } \lambda \to 0 \quad y''(t) \to g \therefore$$

$$y''(t) = g \quad e \quad y'(t) = gt + C_1 \quad e \quad y(t) = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Para as condições iniciais:

$$y'(0) = g.(0) + C_1 = 0 \therefore C_1 = 0$$

$$y(0) = \frac{g.(0)^2}{2} + C_1(0) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Assim

$y(t) = \frac{gt^2}{2}$ e $y'(t) = gt$ Assim como nas equações (2) e (3).

Questão 6 - Dada a equação diferencial $y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = 2t + 3e^{-2t}.\cos 3t$.

a) Fazendo uso da transformadada de Laplace, determine $y(t)$, solução particular da E.D.O. dada, sujeita às condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = -1$

Aplicando a transformada de Laplace, temos:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{4y'(t)\} + \mathcal{L}\{13y(t)\} = \mathcal{L}\{2t + 3e^{-2t}.\cos 3t\} \Rightarrow$$

10

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 13Y(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+9} \Rightarrow$$

$$Y(s)(s^2+4s+13) + 1 = \frac{2}{s^2} + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+9} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{2}{s^2(s^2+4s+13)}}_{=Y_1(s)} + \underbrace{\frac{3(s+2)}{[(s+2)^2+9](s^2+4s+13)}}_{=Y_5(s)} - \underbrace{\frac{1}{(s^2+4s+13)}}_{=Y_3(s)}$$

$$Y_1(s) = \frac{2}{s^2(s^2+4s+13)}$$ Nós podemos escrever este termo como uma soma de frações parciais:

$$Y_1(s) = \frac{2}{s^2(s^2+4s+13)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{(s^2+4s+13)}$$

Para achar os coeficientes A, B, C e D, multiplicamos os dois lados da equação acima pelo denominador do primeiro termo, ou seja, por $s^2(s^2+4s+13)$

$$\frac{2.\cancel{s^2}\cancel{(s^2+4s+13)}}{\cancel{s^2}\cancel{(s^2+4s+13)}} = \frac{As^{\cancel{2}}(s^2+4s+13)}{\cancel{s}} + \frac{B\cancel{s^2}(s^2+4s+13)}{\cancel{s^2}} + \frac{(Cs+D)s^2\cancel{(s^2+4s+13)}}{\cancel{(s^2+4s+13)}}$$

$$2 = As^3 + 4As^2 + 13As + Bs^2 + 4Bs + 13B + Cs^3 + Ds^2$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 4A+B+D=0 \\ 13A+4B=0 \\ 13B=2 \end{cases}$$

$B = \frac{2}{13}$, $13A = -\frac{4.2}{13} \Rightarrow A = -\frac{8}{169}$, $C = \frac{8}{169}$ e

$-\frac{32}{169} + \frac{2}{13} + D = 0 \Rightarrow D = \frac{32}{169} - \frac{2}{13} = \frac{32-26}{169} = \frac{6}{169}$

$$\therefore Y_1(s) = -\frac{8}{169s} + \frac{2}{13s^2} + \frac{(8/169)s + (6/169)}{s^2+4s+13} \Rightarrow$$

$$Y_1(s) = -\frac{8}{169s} + \frac{2}{13s^2} + \frac{(8/169)s + (6/169)}{(s+2)^2+9} = -\frac{8}{169s} + \frac{2}{13s^2} + \frac{8}{169}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\right) - \frac{10}{169}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+9}$$

$$y_1(t) \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} -\frac{8}{169}h(t) + \frac{2t}{13} + \frac{8}{169}e^{-2t}\cdot\cos 3t - \frac{10}{169}\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{-2t}\cdot\sin 3t$$

$$\therefore y_1(t) = -\frac{8}{169}\cdot h(t) + \frac{2\cdot t}{13} + \frac{8}{169}\cdot e^{-2t}\cdot\cos 3t - \frac{10}{169}\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{-2t}\cdot\sin 3t$$

$$Y_2(s) = \frac{3(s+2)}{[(s+2)^2+9](s^2+4s+13)} = \frac{3(s+2)}{[(s+2)^2+9]^2}$$

Repare que $\frac{3(s+2)}{((s+2)^2+9)^2}$ parece ser uma imagem deslocada, ou seja,

$$e^{at}f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s-a). \therefore F(s-a) \longrightarrow e^{-2t}\cdot f(t) \text{ onde}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{(s^2+9)^2}\right\}.$$ Nós podemos, dessa forma, utilizar

a expressão 29.3.22 da tabela de Transformadas no edisciplinas para calcular o original dessa imagem:

$$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{t}{2\omega}\cdot\sin\omega t$$

$$f(t) = \frac{3\cdot t}{2\cdot 3}\cdot\sin 3t \Rightarrow f(t) = \frac{t}{2}\cdot\sin 3t \;\therefore$$

$$\boxed{y_2(t) = e^{-2t}\cdot\frac{t}{2}\cdot\sin 3t}$$

$$Y_3(s) = \frac{-1}{(s^2+4s+13)} = \frac{-1}{(s+2)^2+9}$$

Na tabela de transformadas colocada no edisciplinas.usp.br, imagens com essa característica tem o seguinte original

$$\frac{1}{(s+a)^2+w^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{w}.e^{-at}.\sin wt \quad (29.3.26)$$

$$\frac{-1}{(s+2)^2+9} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -\frac{1}{3}.e^{-2t}.\sin 3t \therefore$$

12

$y_3(t) = -\frac{1}{3}.e^{-2t}.\sin 3t$. Logo:

$$y(t) = y_1(t)+y_2(t)+y_3(t) = -\frac{8}{169}+\frac{2t}{13}+\frac{8}{169}.e^{-2t}.\cos 3t - \frac{10}{169}.\frac{1}{3}.e^{-2t}.\sin 3t + e^{-2t}.\frac{t}{2}.\sin 3t - \frac{1}{3}.e^{-2t}.\sin 3t$$

↳ Solução particular da E.D.O.

b) Verifique se a solução obtida satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = -\frac{8}{169}+\cancel{\frac{2(0)}{13}}^{0}+\frac{8}{169}.e^{-2(0)}.\cos 3(0) - \frac{10}{169}.\frac{1}{3}.e^{-2(0)}.\cancel{\sin(3.0)}^{0}+e^{-2(0)}.\cancel{\frac{(0)}{2}}^{0}-\frac{1}{3}.e^{-2(0)}.\cancel{\sin(3.0)}^{0} =$$

$$\boxed{y(0) = -\frac{8}{169}+\frac{8}{169} = 0}$$

$$y'(t) = \frac{2}{13}+\frac{8}{169}\left[-2.e^{-2t}.\cos 3t - 3e^{-2t}.\sin 3t\right] - \frac{10}{169}.\frac{1}{3}\left[-2.e^{-2t}.\sin 3t + 3.e^{-2t}.\cos 3t\right] +$$

$$\frac{1}{2}\left[-2.e^{-2t}.t.\sin 3t + e^{-2t}(\sin 3t + 3t.\cos 3t)\right] - \frac{1}{3}\left[-2e^{-2t}.\sin 3t + 3.e^{-3t}.\cos 3t\right]$$

$$y'(0) = \frac{2}{13} - \frac{2.8}{169} - \frac{10}{169}.\frac{1}{3}.3 - \frac{1}{3}.3 = \frac{2}{13}-\frac{16}{169}-\frac{10}{169}-1 = \frac{2}{13}-\frac{26}{169}-1 = \frac{2}{13}-\frac{2}{13}-1$$

$$\boxed{y'(0) = -1}$$

Questão 7 - Dada a equação diferencial $y''(t) + y(t) = \delta(t - 2\pi)$, pode-se

a) Fazendo uso da transformada de Laplace, determine $y(t)$, solução particular da E.D.O. dada, sujeita às condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$:

$$\mathcal{L}\{y''(t) + y(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t - 2\pi)\}$$

$$s^2 Y(s) - \cancel{s y(0)} - \cancel{y'(0)} + Y(s) = e^{-2\pi s} \Rightarrow$$

$$Y(s)(s^2+1) = e^{-2\pi s} \Rightarrow Y(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+1)}$$ pólos em $s = i$ e $s = -i$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} Y(s) \cdot e^{st}\, ds = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[Y(s) \cdot e^{st}, s_k\right] =$$

13

$$\operatorname{Res}\left[Y(s) \cdot e^{st}, s = i\right] = \lim_{s \to i} \frac{\cancel{(s-i)} \cdot e^{-2\pi s} \cdot e^{st}}{\cancel{(s-i)} \cdot (s+i)} = \lim_{s \to i} \frac{e^{(t-2\pi)s}}{(s+i)} = \frac{e^{(t-2\pi)i}}{2i}$$

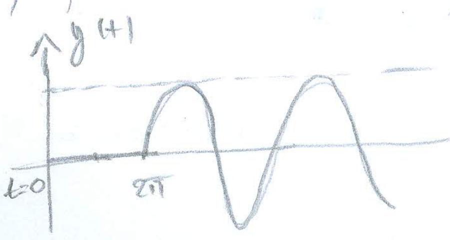
$$\operatorname{Res}\left[Y(s) \cdot e^{st}, s = -i\right] = \lim_{s \to -i} \frac{(s+i) \cdot e^{-2\pi s} \cdot e^{st}}{(s+i)\,(s-i)} = \lim_{s \to -i} \frac{e^{(t-2\pi)s}}{(s-i)} = -\frac{e^{(t-2\pi)i}}{2i}$$

$$y(t) = \frac{e^{(t-2\pi)i} - e^{(t-2\pi)i}}{2i} = \sin(t - 2\pi)$$

$$\boxed{y(t) = \sin(t - 2\pi) \rightarrow \text{solução particular}}$$

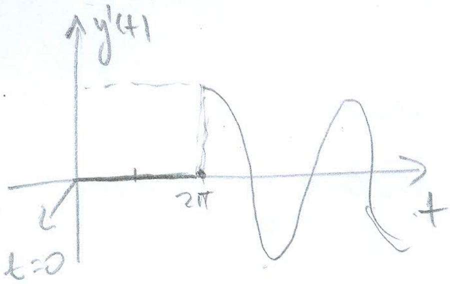
b) Verifique se a solução obtida em (a) satisfaz a E.D.O. e as condições iniciais.

$y(0) = 0$ em $t = 0$, pois $\sin(t - 2\pi) \cdot h(t - 2\pi)$



$y'(0)=0$ em $t=0$, pois $\cos(t-2\pi).h(t-2\pi)$

↳ função de Heaviside



$$y'(t) = \cos(t-2\pi) \qquad y''(t) = -\sin(t-2\pi)$$

$$-\sin(t-2\pi) + \sin(t-2\pi) = \delta(t-2\pi)$$

Como a delta de Dirac está deslocado de 2π, então:

$$\delta(t-2\pi) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \neq 2\pi \\ \infty & \text{para } t = 2\pi \end{cases}$$

Satisfaz a E.D.O

<u>Questão 8</u> - Da a equação diferencial $y'''(t) + 4y''(t) + 4y'(t) - 3y(t) = e^{-2t}$, pede-se:

a) Fazendo uso do conceito de resposta impulsiva, determine $y(t)$, solução particular da E.D.O. de terceira ordem dada, sujeita às condições iniciais $y(0)=0$, $y'(0)=0$ e $y''(0)=0$

$$\mathcal{L}\{y'''(t) + 4y''(t) + 4y'(t) + 3y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-2t}\}$$

$$[s^3Y(s) - s^2\cancel{y(0)}^{0} - s\cancel{y'(0)}^{0} - \cancel{y''(0)}^{0}] + 4[s^2Y(s) - s\cancel{y(0)}^{0} - \cancel{y'(0)}^{0}] + 4[sY(s) - \cancel{y(0)}^{0}] - 3Y(s) =$$

$$\frac{1}{s+2} \Rightarrow Y(s)(s^3 + 4s^2 + 4s - 3) = \frac{1}{(s+2)} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s^3+4s^2+4s-3)}$$

Vamos agora achar a resposta impulsiva associada a E.D.O. acima, sujeito às condições $u(0)=u'(0)=u''(0)=0$

$$[s^3U(s) - s^2\cancel{u(0)} - su'(0) - u(0)] + 4[s^2U(s) - s\cancel{u(0)} - u'(0)] + 4[sU(s) - u(0)]$$

$$-3U(s) = 1 \Rightarrow U(s)(s^3+4s^2+4s-3) = 1 \Rightarrow \boxed{U(s) = \frac{1}{(s^3+4s^2+4s-3)}}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)} \cdot U(s) \Rightarrow Y(s) = F(s) \cdot U(s)$$

↳ imagem da resposta impulsiva

$$Y(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = f(t) * u(t)$$

$f(t) = e^{-2t}$ e $u(t) = ?$ $U(s)$ não possui soluçã analítica!

b). Como $U(s)$ não possui soluçã analítica, fica difícil provar as condições solicitadas no exercício.