

# APÊNDICE 3

(Texto retirado do *Guia de Experiências* de 2005)

Discutiremos vários aspectos de circuitos onde estão presentes resistores, capacitores e indutores. Iremos explorar particularmente algumas soluções das equações que governam a evolução desses sistemas do ponto de vista eletromagnético, descrevendo os seus comportamentos típicos.

## ***A.1 Analogia entre circuito R-L-C e o sistema massa-mola amortecido***

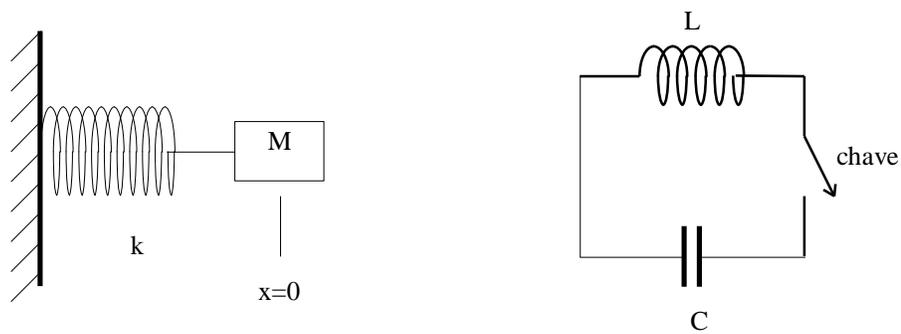
Vamos estabelecer inicialmente a analogia entre o sistema massa-mola e o circuito L-C. A figura 1 apresenta alguns dos pontos de analogia. O capacitor é análogo à mola, uma vez que ele, como a mola, armazena energia: a mola na forma de energia potencial elástica,

$$U = \frac{kx^2}{2}$$

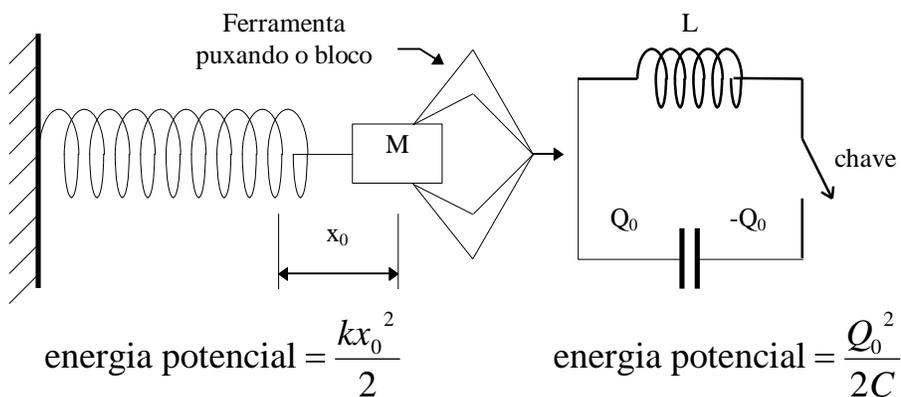
e o capacitor na forma de energia potencial elétrica,

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

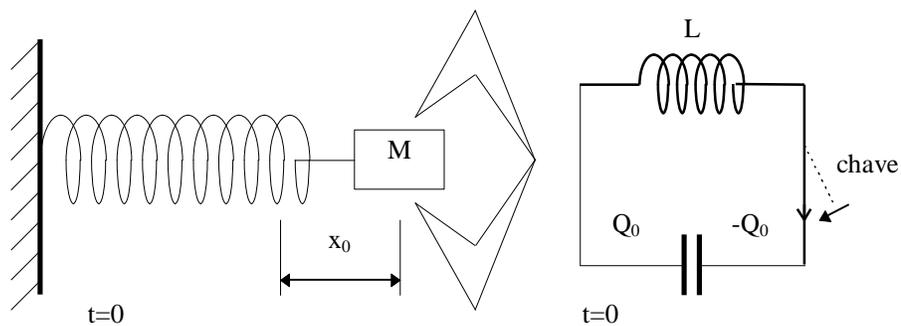
onde o parâmetro  $k$ , constante elástica da mola, é análogo a  $1/C$ , com  $C$  a capacitância do capacitor e a coordenada  $x$ , elongação da mola, é análoga à carga  $Q$  armazenada em uma das placas do capacitor.



a) Sistema massa-mola e seu equivalente elétrico, o circuito LC.



b) Esticar a mola corresponde a carregar o capacitor.



c) Abandonar a mola equivale a fechar a chave.

**Figura 1.** Alguns pontos de analogia entre o sistema massa mola e o circuito elétrico formado por um indutor e um capacitor.

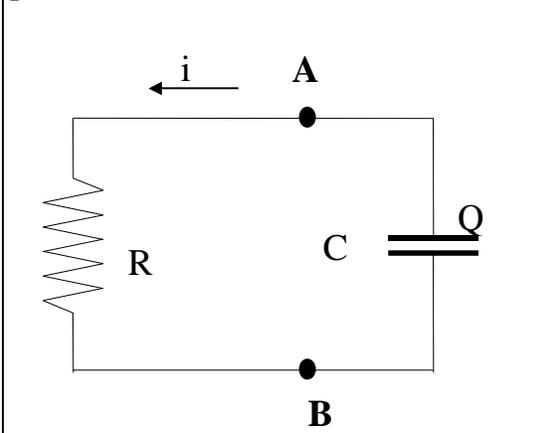
Há também uma analogia entre a massa e a indutância. A massa mede a inércia, determinando a intensidade da força necessária para produzir no objeto a aceleração desejada; a indutância mede o grau de dificuldade em alterar a corrente, determinando a força eletromotriz necessária para produzir no indutor o valor desejado de  $\frac{di}{dt}$ . Esta semelhança pode ser explorada também do ponto de vista da energia armazenada. Uma massa em movimento armazena uma energia cinética  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ , enquanto a energia armazenada no campo magnético produzido por um indutor é  $E_m = \frac{1}{2}Li^2$ , sendo que a analogia fica completa quando vemos que  $i = \frac{dq}{dt}$  e  $v = \frac{dx}{dt}$  aparecem de forma análoga nessas expressões de energia.

A resistência em um circuito elétrico é responsável pela dissipação de energia sob a forma de calor da mesma forma que o atrito é responsável pela dissipação da energia em um sistema mecânico, também como calor. A analogia fica completa se considerarmos uma força viscosa linear com a velocidade, quando a potência dissipada é  $\frac{dE}{dt} = \lambda v^2$  ( $E \equiv$  energia), onde  $\lambda$  é a constante da força viscosa. Essa expressão tem a mesma forma da potência dissipada num resistor,  $\frac{dE}{dt} = Ri^2$ .

## **A.2 Circuitos R-C. Equação dinâmica e sua solução.**

A figura 2 representa esquematicamente o circuito RC, onde marcamos dois pontos, escolhemos um sentido para a corrente positiva e sinais relativos para as cargas nas placas do capacitor, de maneira a definir as referências para a equação que descreve o comportamento da corrente.

**Figura 2.** Representação esquemática do circuito RC, com as indicações necessárias às definições dos sinais das cargas nas placas do capacitor e da corrente no circuito.



por exemplo, se a carga da placa superior é  $-5 \text{ nC}$ , a da inferior é  $+5 \text{ nC}$ . Para a corrente, escolhemos  $i$  positiva quando flui no sentido anti-horário e negativa quando flui no sentido horário. Precisamos, agora, calcular a diferença de potencial elétrico em cada pedaço do circuito.

**RESISTOR.** Dentro do resistor há um campo elétrico, que consideraremos positivo quando aponta de cima para baixo na figura 2. A integral desse campo dará o resultado que conhecemos da lei de Ohm,

$$\varphi_B - \varphi_A = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = -Ri \quad (1)$$

**FIOS.** Dentro dos condutores, a densidade de corrente é proporcional ao campo elétrico,  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  mas, como a condutividade é muito grande, mesmo um pequeno campo elétrico produz uma grande corrente, de maneira que a integral do campo elétrico no interior dos condutores é desprezível. Assim, desde que a resistência total dos fios seja muito menor que  $R$ , podemos desprezar a contribuição dos fios para a diferença de potencial.

A diferença de potencial elétrico entre dois pontos  $X$  e  $Y$  é definida por

$$\varphi_Y - \varphi_X = -\int_X^Y \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

onde  $\vec{E}$  e  $d\vec{l}$  são vetores. A integral de linha em um circuito fechado, começando do ponto  $A$  indo até  $B$  no sentido anti-horário, passando pelo resistor, continuando de  $B$  até  $A$  no mesmo sentido, passando pelo capacitor, deve ser nula, porque volta-se ao ponto de partida. Na figura procuramos especificar a convenção para o sinal da carga em cada placa do capacitor: quando a carga da placa superior é  $+Q$ , a da placa inferior é  $-Q$ ,

**CAPACITOR.** A integral do campo elétrico é, simplesmente,

$$\varphi_A - \varphi_B = - \int_X^Y \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{C} \quad (2)$$

**REUNINDO AS PARCELAS.** A convenção de sinal adotada dá conta do sinal tanto desta última equação quanto da equação (1). Se  $Q$  for positivo, esta última integral será positiva e a corrente fluirá no sentido anti-horário (as cargas positivas vão em direção à placa negativa); caso  $Q$  seja negativa, a integral será negativa e agora as cargas da placa inferior vão se deslocar para a placa positiva. O sinal da equação (2), neste circuito com apenas dois componentes, termina por definir o sentido da corrente, desde que a carga no capacitor determinará o sentido da corrente no resistor. Assim, qualquer que seja o sinal da carga da placa superior do capacitor ou o sentido da corrente, as expressões (1) e (2) estão corretas. Somando estas duas última equações, obtemos

$$\varphi_B - \varphi_A + \varphi_A - \varphi_B = -Ri + \frac{Q}{C} = 0 \quad (3)$$

Considerando que a convenção adotada para  $Q$  e  $i$  corresponde à relação

$$i = - \frac{dQ}{dt} \quad (4)$$

podemos eliminar  $i$  da equação (3) obtendo a equação que descreve o comportamento do circuito R-C,

$$\boxed{R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0} \quad (5)$$

Para entender o comportamento do circuito, falta encontrar sua solução geral e impor as condições iniciais, o que é fácil desde que é uma equação de 1ª ordem. A solução é

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (6)$$

onde  $Q_0$  é a carga do capacitor em  $t=0$  e  $1/(RC)$  é a constante de tempo característica do circuito. Para confirmar que a função dada em (6) resolve a equação (5), basta substituí-la diretamente na equação diferencial.

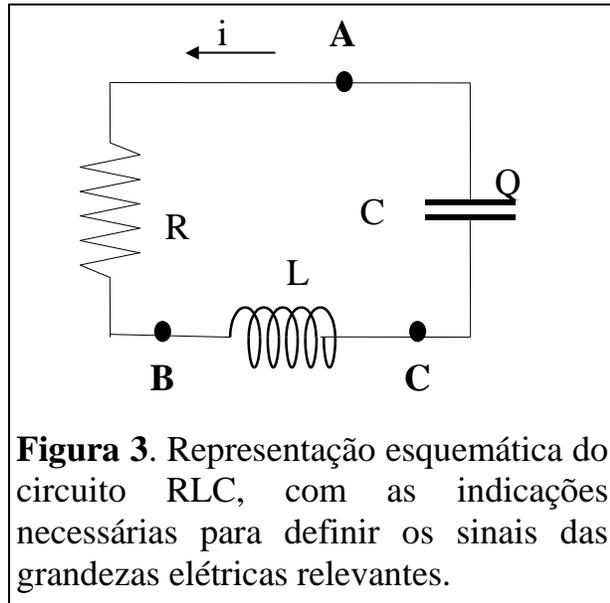
A equação (5) descreve o comportamento do circuito desconectado de qualquer fonte de tensão, de maneira que a função dada em (6) descreve a evolução do sistema a partir do momento em que a carga do capacitor é  $Q_0$ . Poderíamos explorar outras situações específicas para o circuito R-C, por exemplo, acrescentando uma fonte de tensão variável ligada entre o capacitor e o resistor. Faremos isso para o circuito R-L-C mas não para o R-C apenas, porque nada de muito interessante é obtido neste caso e a solução da equação (6) já contém as características essenciais do comportamento deste sistema.

### A.3 Circuito R-L-C. Equação dinâmica

Seguiremos aqui o mesmo caminho utilizado na descrição do circuito R-C, mantendo inclusive a convenção de sinais. A figura 3 representa esquematicamente a situação.

Neste circuito, podemos utilizar a diferença de potencial calculada na fórmula (1) para o resistor sem qualquer alteração. Para o capacitor, utilizamos o resultado (2) trocando o ponto B por C, de acordo com a definição dos pontos mostrada na figura 3. Somando essas duas diferenças de potencial, determinamos

$$\phi_B - \phi_C = -Ri + \frac{Q}{C} \quad (7)$$



Esta diferença de potencial é igual à força eletromotriz induzida entre os pontos B e C pelo indutor L.

Para determinar com que sinal a força eletromotriz  $L di/dt$  deve ser considerada quando a utilizarmos na equação (7), é preciso compreender qualitativamente a situação. A força eletromotriz criada por um indutor procura sempre opor-se à variação da corrente no circuito. Assim, se a corrente  $i$  estiver crescendo,  $(di/dt) > 0$ , de maneira que o sinal correto é

$$\phi_C - \phi_B = -L \frac{di}{dt} \quad (8)$$

ou seja, o indutor atua no sentido de empurrar as cargas positivas de B para C pelo circuito, opondo-se à variação da corrente. Com uma interpretação simétrica a esta, vemos que a equação (8) também tem o sinal correto quando a corrente está diminuindo. Comparando (8) e (9) obtemos

$$-Ri + \frac{Q}{C} - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (9)$$

Finalmente, devemos lembrar que, na convenção adotada,  $i = -\frac{dQ}{dt}$  (fórmula 4). Usando esta relação para eliminar  $i$  da equação acima, obtemos

$$\boxed{L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0} \quad (10)$$

que é a equação que descreve o comportamento dinâmico da carga no capacitor num circuito R-L-C.

#### **A.4 Soluções da equação (10)**

Nesta seção, apresentaremos as soluções do ponto de vista matemático, ficando para a próxima descrevê-las do ponto de vista físico.

As soluções dessa equação são do tipo

$$Q(t) = Q_0 e^{-pt}$$

Para determinar os coeficientes  $p$  basta resolver a equação característica, no caso a equação do 2º grau proveniente da substituição da solução na equação diferencial, após fatoração da exponencial. Obtém-se

$$p = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}{2L} \quad (11)$$

sendo que o comportamento do sistema depende do valor do radicando, conforme detalhamos a seguir.

**RADICANDO POSITIVO.** Os dois valores de  $p$  são reais e negativos, resultando numa solução  $Q(t)$  que é uma combinação linear de duas exponenciais reais, decrescentes com o tempo. Os coeficientes das exponenciais devem ser encontrados levando-se em consideração as condições iniciais do circuito: carga (ou tensão) no capacitor e corrente no circuito. No geral,  $Q(t) \rightarrow 0$  mais ou menos rapidamente, dependendo dos sinais dos coeficientes das duas exponenciais.

**RADICANDO NULO.** Neste caso, a raiz é real, dupla e negativa,  $p = -R/2L$ . A carga no capacitor decresce exponencialmente, normalmente chegando a zero rapidamente. A segunda solução da equação diferencial é

$$Q = Q_0' t e^{-pt}$$

onde o  $p$  é o mesmo da outra solução.

**RADICANDO NEGATIVO.** Resulta em dois valores complexos para  $p$ . A solução é oscilatória, com amplitude que reduz-se com o tempo. A solução pode ser representada numa forma fechada,

$$Q = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t + \delta) \quad (12)$$

onde

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (13)$$

sendo que  $Q_0$  e  $\delta$  devem ser determinados a partir das condições iniciais, o que muitas vezes é difícil de realizar na prática, porque a corrente, sendo a derivada da carga, será a soma de dois termos envolvendo funções transcendentais. O caso particular das condições de contorno:

$$Q(t=0) = q_0; \quad \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

tem solução relativamente simples, com

$$\cot \delta = -\sqrt{\frac{4L}{R^2 C} - 1} \text{ e } Q_0 = \frac{q_0}{\cos \delta}$$

Muitas das características do comportamento do sistema independem, porém, dos valores exatos de  $Q_0$  e  $\delta$ , de maneira que esta dificuldade não tem maiores conseqüências. Repare que a frequência de oscilação aparente do sistema é dada pela fórmula (13).

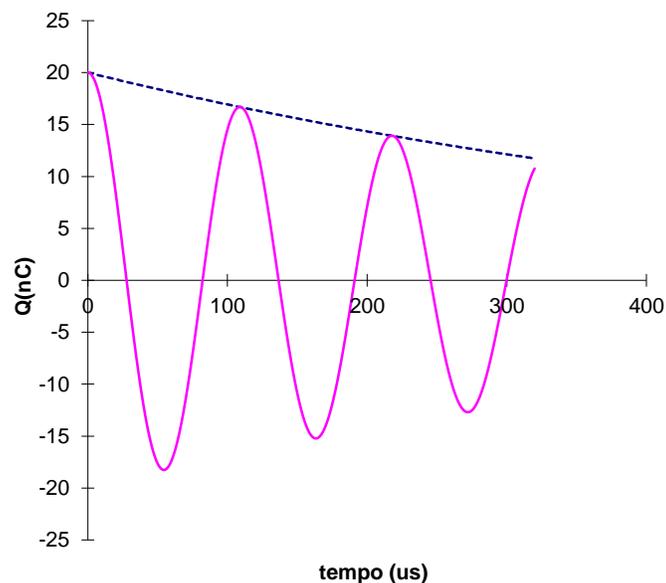
### A.5 Oscilações livres

A equação (10) descreve a dinâmica de um circuito R-L-C sem fonte externa de tensão - veja a figura 3 para a representação desse circuito. Na seção anterior descrevemos brevemente como resolver essa equação. Aqui, apresentaremos mais alguns detalhes.

#### (i) Oscilação Amortecida

Quando  $R < 2\sqrt{L/C}$  a solução corresponde à fórmula (12). A figura 4 apresenta o gráfico, utilizando os parâmetros:  $R=100\Omega$ ,  $C=0,01\mu\text{F}$  e  $L=30\text{mH}$  e as condições iniciais:  $Q(t=0) = q_0$ ;  $i = -\frac{dQ}{dt}\Big|_{t=0} = 0$ .

Figura 4. Oscilação Amortecida



Neste caso, interpretamos o fenômeno como a oscilação da carga no capacitor oscila com a frequência angular em torno daquela dada pela relação (13), com uma amplitude que decai exponencialmente com uma constante de tempo  $2L/R$ . Esta interpretação contém uma imprecisão: a rigor, dizemos que uma oscilação tem frequência  $\omega$  quando após um período  $T=2\pi/\omega$  as condições repetem-se exatamente, isto é,  $Q(t' + T) = Q(t')$  e

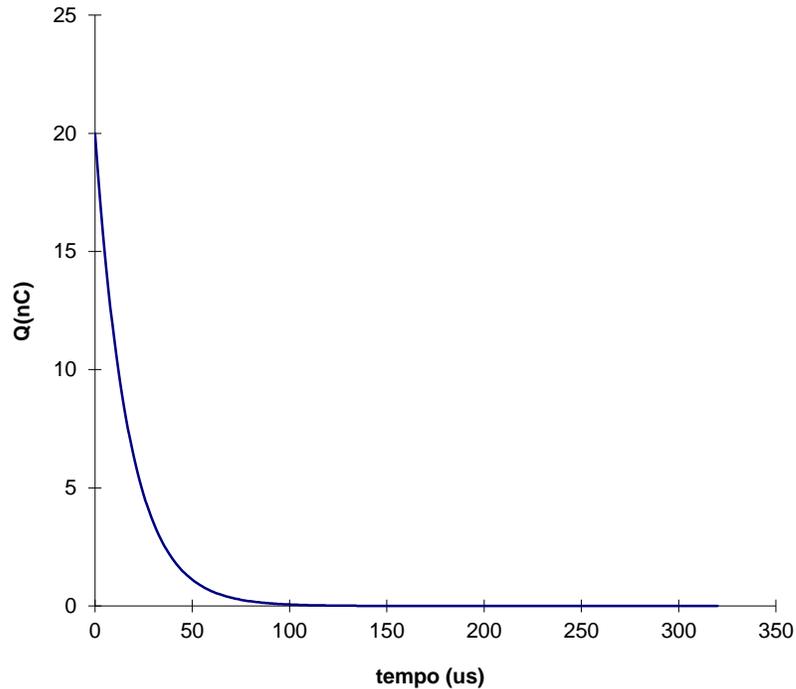
$\left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t'} = \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t'+T}$  para qualquer  $t'$ . Isto não pode acontecer quando a amplitude máxima da oscilação cai com o tempo, de maneira que é preciso uma certa cautela nesta nossa interpretação.

Na dedução da equação (10) consideramos apenas o amortecimento provocado pela dissipação de energia na resistência por efeito joule, ou seja, transformação de energia elétrica em calor. Um outro efeito que poderia causar perda de energia é a irradiação, uma vez que tanto o indutor como o capacitor criam campos (elétrico e magnético) que variam com o tempo e, portanto, criam ondas eletromagnéticas que podem se propagar, carregando energia consigo. A irradiação eletromagnética, porém, não é importante nas faixas de frequência e dimensões típicas dos circuitos que usamos para estudar oscilações em circuitos R-L-C no nosso curso de Laboratório. Quando as dimensões dos circuitos aproximam-se do comprimento de onda, o efeito de irradiação precisa ser levado em consideração.

### (ii) Amortecimento crítico

Partindo de um circuito que apresenta oscilação amortecida e aumentando a resistência, chega-se à situação em que  $R = 2\sqrt{L/C}$ , quando a corrente no circuito deixa de apresentar oscilação. O gráfico da figura 5 apresenta a carga em função do tempo em um circuito onde  $L=30\text{mH}$ ,  $C=0,01\mu\text{F}$  e  $R=3464\Omega$ , sendo a carga do capacitor no instante inicial igual a  $20\text{nC}$ . Note que o tempo neste gráfico está na mesma escala da figura 4.

Figura 5. Amortecimento Crítico



(iii) Amortecimento super-crítico

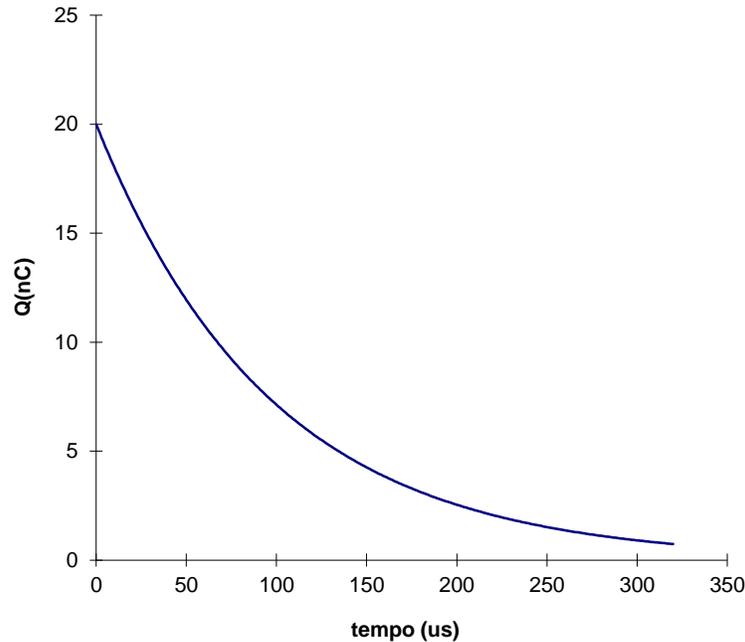
Quando a resistência do circuito é superior àquela necessária ao amortecimento crítico, ela dificulta a passagem de corrente, fazendo com que o tempo que o sistema necessita para retornar ao equilíbrio aumente. Ou seja, neste caso a resistência será tão alta, em comparação com outros parâmetros do circuito, que o capacitor levará um tempo maior para se descarregar, pois a corrente estará fortemente limitada pelo resistor.

Se  $R > 2\sqrt{L/C}$  a solução da equação (10) é

$$Q(t) = Q_1 e^{-\frac{R}{2L}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}\right)t} + Q_2 e^{-\frac{R}{2L}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}\right)t} \quad (14)$$

A rigor, ambos os termos exponenciais são necessários para compor a solução. Entretanto, o primeiro deles é mais importante e, freqüentemente, o outro é desprezado. Qualitativamente, podemos justificar isso considerando que o coeficiente no expoente do primeiro termo é menor que o do segundo e, portanto, é o termo que dominará com o passar do tempo. O quadro adiante apresenta uma justificativa detalhada.

**Figura 6. Super-Amortecimento**



A figura 6 mostra o gráfico de descarga do capacitor num circuito RLC onde  $C=0,01\mu\text{F}$ ,  $L=30\text{mH}$  e  $R=10\text{k}\Omega$ , considerando-se  $Q_1=20\text{nC}$  e desprezando-se o termo  $Q_2$ .

Considere a expressão da carga do capacitor dada pela equação (14). Determine a corrente  $i = -dQ/dt$  no circuito. Em seguida, imponha a condição de que no instante inicial a corrente é nula. Isso dará uma relação entre  $Q_1$  e  $Q_2$ . Com essa relação a expressão para a carga em função do tempo será

$$Q(t) = Q_1 \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}}{2\sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}} \left( e^{-\frac{R}{2L}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}\right)t} - \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}} e^{-\frac{R}{2L}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}\right)t} \right).$$

Observe que  $Q_1$  não é a carga para  $t=0$ . Uma análise desta equação mostra que, desde que o radicando seja próximo de 1, o que é o caso quando  $R$  é grande, o primeiro termo é dominante. Esse é exatamente o termo que corresponde a uma redução mais lenta da carga do capacitor. Portanto, será ele o termo dominante a longo prazo no caso do amortecimento super-crítico.

## A.6 Oscilações Forçadas

Consideremos agora um circuito RLC alimentado por uma fonte de tensão externa, como mostrado na figura ao lado.

A equação que descreve o comportamento dinâmico deste circuito é

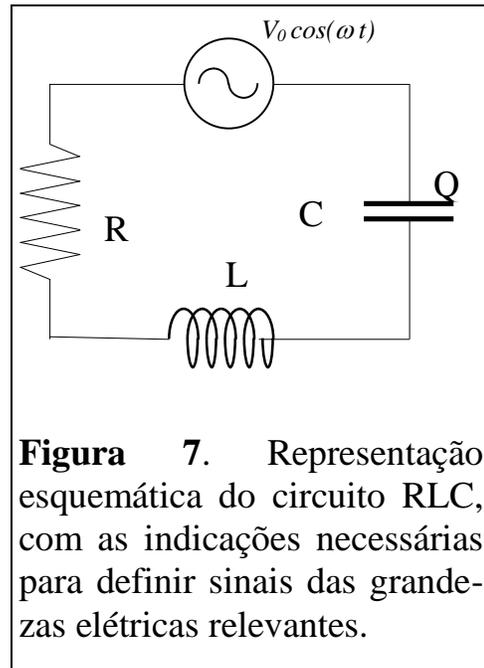
$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \cos(\omega t) \quad (15)$$

onde a frequência  $\omega$  é aquela da fonte de tensão, que não deve ser confundida com a frequência natural do sistema, dada pela equação (13), apesar do mesmo símbolo. A solução dessa equação é a soma de dois termos distintos. O primeiro é dado por uma das equações (11), (12) ou (13), a escolha dependendo da relação entre R, L e C. Sobre para o segundo termo, então, dar  $V_0 \cos(\omega t)$  quando substituído na equação (10) (lembrando de novo, esta frequência  $\omega$  nada tem a ver com R, L e C, ela é a frequência da fonte de tensão), de maneira que a soma dos dois termos resolve a equação (15). Há uma diferença muito importante entre os dois termos da solução. Um deles corresponde a uma carga  $Q(t)$  que diminui com o tempo, praticamente desaparecendo após algum tempo. Esse termo é um transitório que não determina o comportamento a longo prazo do sistema. O outro, ao contrário, define o estado estacionário resultante da ação da tensão externa a longo prazo. A seguir, concentraremos nesta solução estacionária, que observaremos no experimento de ressonância.

Após o fim do transitório, a carga no capacitor deve oscilar com a mesma frequência da fonte de tensão externa. A solução estacionária deve ser, portanto, do tipo

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (16)$$

Substituindo essa expressão na equação (15), obtemos (17)



**Figura 7.** Representação esquemática do circuito RLC, com as indicações necessárias para definir sinais das grandezas elétricas relevantes.

$$\tan \varphi = \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \quad (17)$$

e

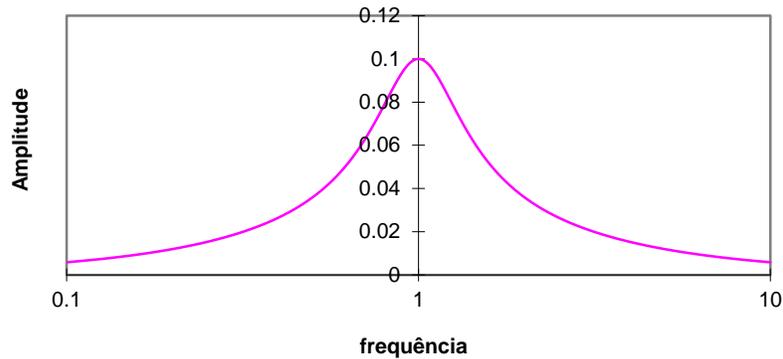
$$Q_0 = -\frac{V_0}{\omega R} \sin \varphi \quad (18')$$

substituindo  $\sin \varphi$  obtido da equação (16) chegamos a (18)

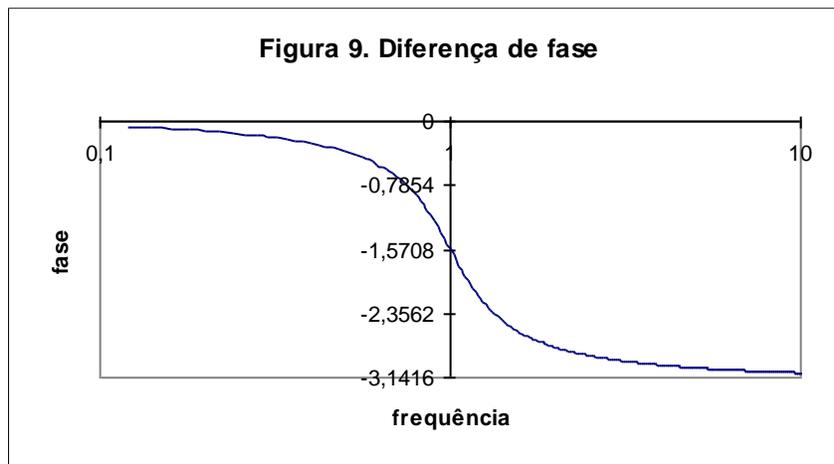
$$Q_0 = \frac{-V_0}{\omega \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad (18)$$

Veja que a amplitude da oscilação do estado estacionário depende de forma muito significativa da frequência da fonte de tensão externa. Se a frequência  $\omega$  do gerador for escolhida de maneira que  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ , o denominador da equação (18) assume seu valor mínimo e, portanto, a carga no capacitor oscila com amplitude máxima. Note também que não é apenas a amplitude de oscilação que depende da frequência da fonte externa mas, também, a diferença de fase entre a oscilação estacionária e a fonte externa, como pode ser visto pela equação (16). As figuras 8 e 9 mostram, respectivamente, a amplitude e a diferença de fase entre a oscilação estacionária e a tensão na fonte em função da frequência para um circuito onde  $R=1000\Omega$ ,  $C=0,01\mu\text{F}$  e  $L=30\text{mH}$ . A frequência está em unidades de  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

**Figura 8. Amplitude de Oscilação.**



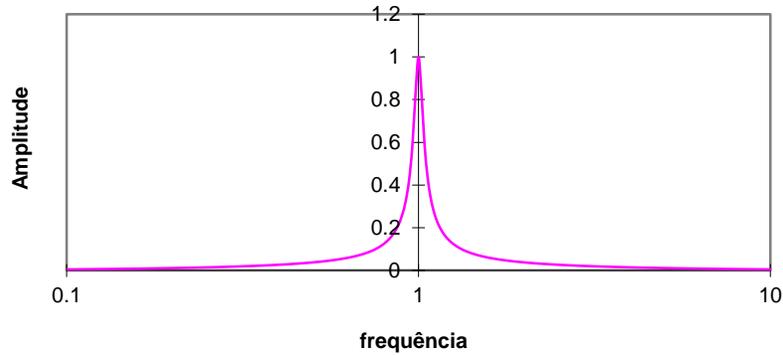
**Figura 9. Diferença de fase**



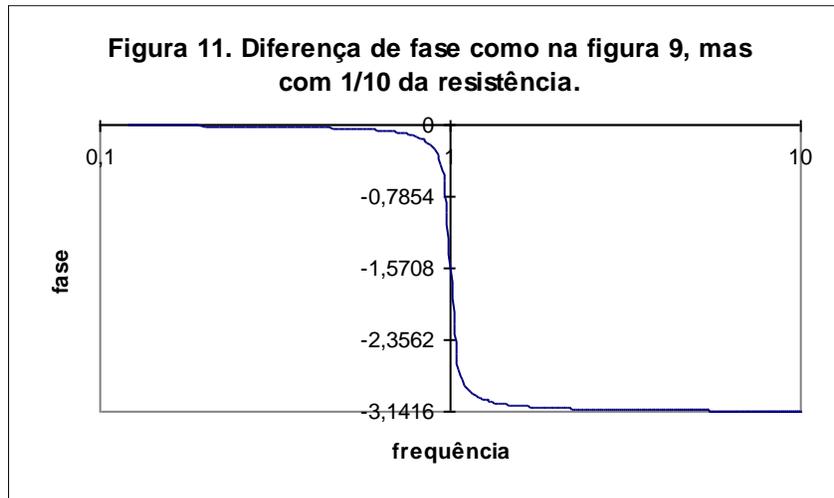
Veja, então, que o gerador consegue impor a oscilação ao circuito deste que oscile com frequência próxima à natural. Podemos interpretar o fato da frequência do gerador não precisar ser idêntica à natural para haver a oscilação forçada, como uma consequência do fato do sistema amortecido não ter uma frequência de oscilação bem definida, conforme nossa discussão no item i da seção 5.

As figuras 10 e 11 correspondem às figuras 8 e 9, mas a resistência é  $100\Omega$ , ilustrando que, quanto menor a resistência, mais pronunciada é a ressonância. Perceba a diferença de escala das ordenadas das figuras 8 e 10, ambas calculadas com o mesmo valor de  $V_0$ . Podemos interpretar a largura da ressonância de acordo com a linha de raciocínio do parágrafo precedente: como o amortecimento é menor, a amplitude cai menos a cada oscilação e o sistema livre oscila de maneira mais harmônica, ou seja, possui uma frequência natural melhor definida.

**Figura 10. Amplitude de Oscilação como na figura 8 mas com 1/10 da resistência .**



**Figura 11. Diferença de fase como na figura 9, mas com 1/10 da resistência.**



A questão do quanto uma ressonância é pronunciada, e qual é o parâmetro importante, é melhor discutida utilizando-se o fator de qualidade, que é nosso próximo assunto.

### **A.7 O Fator de Qualidade**

Um circuito amortecido fraco perde energia a cada oscilação. Uma grandeza útil para caracterizar a intensidade do amortecimento, muito utilizada na prática, é o fator de qualidade, representado pelo símbolo  $Q$  e definido por

$$\frac{1}{Q} = \frac{\Delta E}{2\pi E_i} = \frac{E_i - E_f}{2\pi E_i} \quad (19)$$

onde  $\Delta E$  é a perda de energia em um ciclo de oscilação<sup>1</sup>,  $E_i$  a energia no início da oscilação e  $E_f$ , no final. Quando o amortecimento é fraco, pode-se verificar que  $Q$  mede o número de oscilações efetuadas até que o sistema oscilando livremente perca a maior parte da sua energia. A equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{2\pi}{Q} = 1 - \frac{E_f}{E_i} \therefore E_f = E_i \left( 1 - \frac{2\pi}{Q} \right)$$

escrevendo a energia no início de  $n$  oscilações sucessivas como  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , podemos escrever

$$E_2 = E_1 \left( 1 - \frac{2\pi}{Q} \right)$$

$$E_3 = E_2 \left( 1 - \frac{2\pi}{Q} \right)$$

...

$$E_n = E_{n-1} \left( 1 - \frac{2\pi}{Q} \right)$$

multiplicando todas as equações acima e verificando que o fator  $E_2 \cdot E_3 \dots \cdot E_{n-1}$  é comum a ambos os lados da equação, determinamos que

$$E_n = E_1 \left( 1 - \frac{2\pi}{Q} \right)^n$$

Queremos dar interpretação quantitativa à interpretação física do fator de qualidade como o número de oscilações para que uma parcela significativa da energia seja dissipada. Enquanto o sistema perde energia, o

---

<sup>1</sup> Lembre que a frequência de oscilação não é bem definida, conforme discutimos no item i da seção 5 e na discussão das curvas de ressonância, na seção 6.

movimento oscilatório também perde amplitude, desde que a energia é proporcional ao quadrado da amplitude. Vamos chamar de  $n_{1/2}$  o número de oscilações para que a amplitude caia à metade da inicial. Em termos de energia, isso corresponde a uma redução maior da energia armazenada, desde que a energia é proporcional ao quadrado da amplitude, ou seja,  $E_{n_{1/2}} = \frac{E_1}{4}$ . Substituindo essa condição na expressão acima e calculando o logaritmo de ambos os lados, obtemos

$$-\log(4) = n_{1/2} \log\left(1 - \frac{2\pi}{Q}\right)$$

Quando  $Q$  é um número grande,  $1/Q$  é pequeno, de maneira que podemos aproximar a expressão acima por

$$-\log(4) = -2\pi \frac{n_{1/2}}{Q} \quad \text{ou} \quad \log(2) = \pi \frac{n_{1/2}}{Q}$$

ou ainda

$$\boxed{Q \approx 5n_{1/2}} \quad (20)$$

onde  $n_{1/2}$  é o número de oscilações até que a amplitude reduza-se à metade, quando o amortecimento é fraco.

É fácil determinar o fator de qualidade também em função dos parâmetros do sistema, a partir das equações para a corrente em função do tempo. Note que, até aqui, não utilizamos as particularidades dos circuitos elétricos, ou seja, toda a discussão acima vale também para oscilações mecânicas. Só agora tornaremos a discussão específica para circuitos elétricos. Retomando a solução estacionária do circuito R-L-C forçado,

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t + \alpha)$$

onde representamos a carga pela letra  $q$  minúscula para evitar confusão com o fator de qualidade, representado pela letra  $Q$  maiúscula. Vamos calcular a energia armazenada no sistema em instantes de tempo onde a corrente é nula, de maneira que toda a energia armazenada no sistema está no capacitor e é proporcional ao quadrado da carga armazenada. Assim,

$$E_i = \frac{q_0^2}{2C} e^{-\frac{R}{L}t_i}$$

$$E_f = \frac{q_0^2}{2C} e^{-\frac{R}{L}(t_i+T)}$$

onde T é o período de oscilação. (A corrente não é exatamente nula quando  $\cos(\omega t + \alpha) = 1$ , mas esta é uma aproximação muito boa quando o amortecimento é fraco.) O período de oscilação está relacionado com os parâmetros do sistema por

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ onde } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

donde deduzimos o fator de qualidade

$$\frac{2\pi}{Q} = \frac{\Delta E}{E_i} = \frac{E_i - E_f}{E_i} = 1 - e^{-\frac{R}{L}T}$$

No caso em que o amortecimento é fraco, a perda de energia por oscilação é pequena e podemos aproximar a expressão acima por

$$\frac{2\pi}{Q} = 1 - \left( 1 - \frac{R}{L}T + \left( \frac{R}{L}T \right)^2 + \dots \right) \cong \frac{R}{L}T$$

Nesse limite, no cálculo da frequência podemos desprezar o termo que envolve a resistência do circuito. O resultado final é

$$\frac{1}{Q} \cong R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

ou

$$\boxed{Q \cong \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}} \quad (21)$$

quando o amortecimento é fraco.

**OBSERVAÇÃO.** É muito comum encontrar outra definição para o fator de qualidade, diferente desta apenas por um fator  $2\pi$ , ou seja, o fator de qualidade pode ser definido como  $Q = \frac{E_i}{E_i - E_f}$ . As fórmulas acima podem

ser facilmente adaptadas a essa outra definição, trocando-se  $Q$  por  $2\pi Q$ . Há também outras interpretações físicas para  $Q$ , que veremos oportunamente.