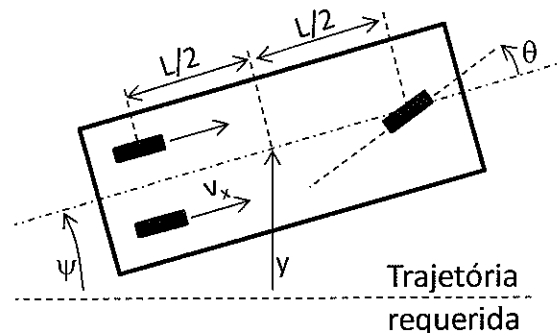


1) (Valor 3,5) Durante a competição no último sábado de Elementos de Máquinas, percebeu-se que a ausência de malha fechada nos protótipos impossibilitou que quase a totalidade dos mesmos conseguisse manter a trajetória requerida. Qualquer pequeno obstáculo no caminho ou desalinhamento inicial provocavam erros de trajetória que, ao longo do percurso, geravam colisões nas árvores no entorno.

Para resolver este problema, vamos projetar um controlador de trajetória. Suponha que o veículo seja dotado de um sistema de sensoriamento que meça a distância  $y(t)$  à trajetória requerida (que poderia ser delineada com uma faixa branca, por exemplo). Possui também um sistema de direção na única roda frontal, e o ângulo controlado desta roda é dado por  $\theta(t)$ . A tração traseira impõe uma velocidade longitudinal  $v_x$  constante.



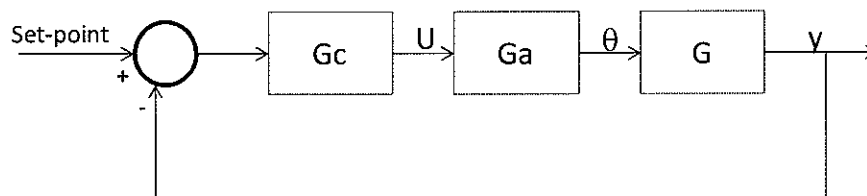
A aplicação de cinemática simples, desconsiderando possíveis escorregamentos, resulta:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{\theta(s)} = \frac{(v_x L)s + 2v_x^2}{(2L)s^2}$$

Além disso, o sistema de direção é acionado por um sinal de comando proveniente do controlador ( $U(t)$ ), e há um pequeno atraso de atuação. Por simplificação, será adotado:

$$G_a(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

O objetivo aqui será o projeto do controlador  $G_c$  da malha abaixo:



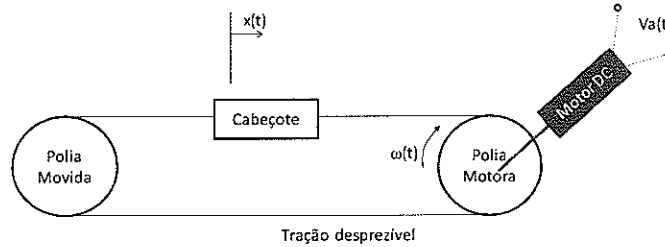
Dados os valores típicos para os protótipos  $v_x = 0.33\text{m/s}$  e  $L = 0.3\text{m}$ , e considerando  $\tau = 0.2\text{s}$ , responda:

a) Faça um esboço do lugar das raízes do sistema considerando um controlador proporcional (sem compensação dinâmica). Deve ser indicada a posição dos polos e zeros bem como as assíntotas. (1,0)

b) O objetivo do sistema de controle é garantir que haja erro nulo para entrada degrau e que o sistema em malha fechada apresente amortecimento maior que 0,7 e tempo de estabilização 2% menor que 0,6s. É possível obter esta especificação apenas com um controle proporcional? Justifique usando o lugar das raízes acima ou com cálculo algébrico das funções de transferência. (1,0)

c) Usando técnica baseada em lugar das raízes, projete um controlador PD  $G_c(s) = K_p(1 + T_d s)$  para atender os requisitos acima. (1,5)

2) (Valor 5,0) O sistema de movimentação do cabeçote de impressão de uma impressora jato de tinta é representado abaixo. Uma polia movida (apenas rolamentada) e uma polia motora (acionada por um motor DC) compõem o sistema. Ambas possuem momento de inércia  $J_p = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2$  e raio  $R=0,01\text{m}$ . O cabeçote possui massa  $M=0,05\text{kg}$ , e sua posição é dada por  $x(t)$ . A parte de baixo da correia possui tração nula para o sentido de movimento indicado na figura. O motor é controlado pela tensão de armadura ( $V_a$ ).



a) Baseado no seu conhecimento de modelagem de motores DC, você fez a hipótese de desprezar a constante de tempo elétrica do sistema acima e adotou um modelo do tipo  $\frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{K_{\text{modelo}}}{s(\tau s + 1)}$ . Além disso, você dispunha de um aparato experimental e excitou o sistema com tensões de armadura senoidais com amplitude 10V no intervalo de 1rad/s a 10 rad/s e registrou a leitura  $x(t)$  em cada caso ( $x$  é dado em mm, e você pode trabalhar em mm no problema todo). Sabendo-se que para:

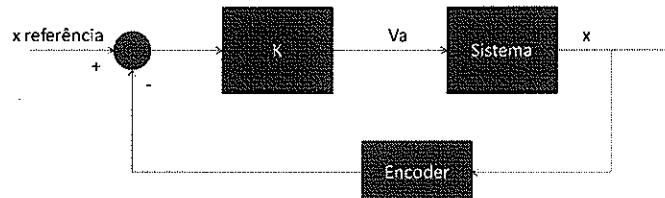
$$V(t) = 10 \cdot \text{sen}(1t) \Rightarrow x(t) \cong 20 \text{sen}(1t - 92^\circ)$$

$$V(t) = 10 \cdot \text{sen}(10t) \Rightarrow x(t) \cong 2 \text{sen}(10t - 113^\circ)$$

Obtenha os parâmetros  $K_{\text{modelo}}$  e  $\tau$  do modelo do sistema (1,0).

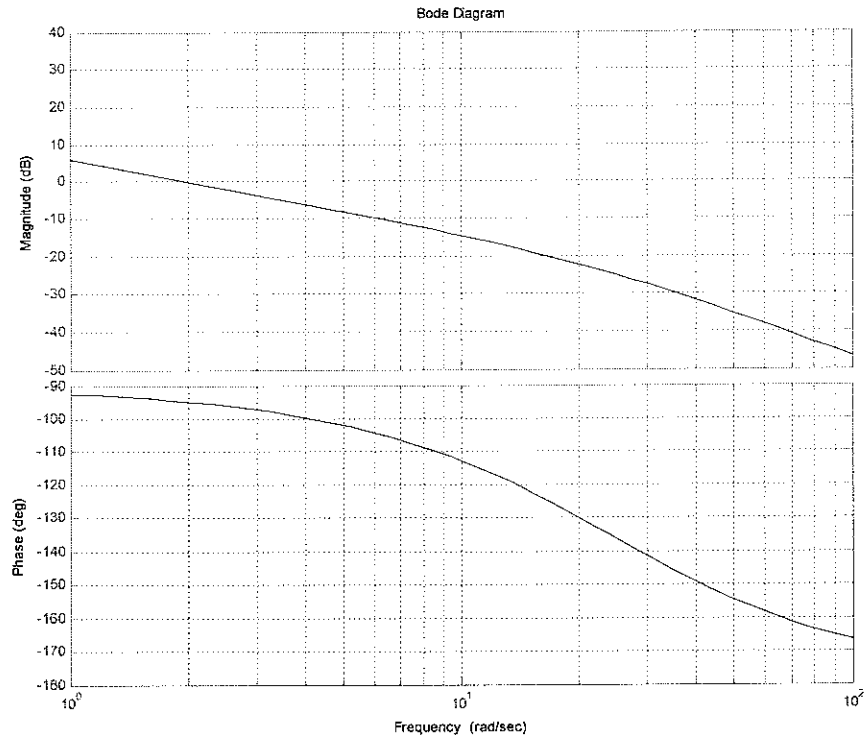
Observação: Se você não conseguiu resolver o item a, suponha  $\frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{2}{s(0,042s + 1)}$  para os itens seguintes

b) O objetivo deste sistema é fazer o cabeçote acompanhar a referência, que é bastante variável, com erro muito pequeno. Isso garante a precisão e resolução da impressora.

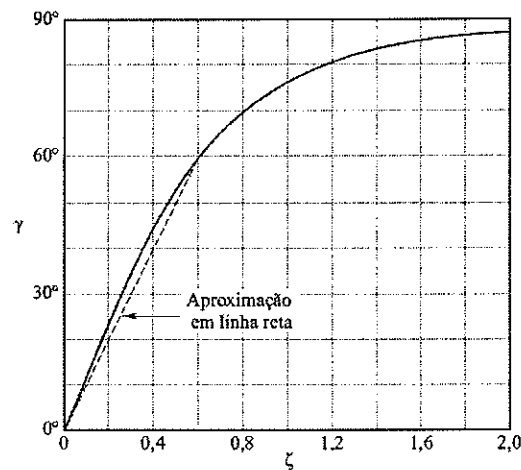


Assume-se que para uma entrada de referência do tipo  $x_{\text{ref}}(t) = t \Rightarrow x(t) \cong 0,99t$ . Qual o valor do ganho de controle  $K$  necessário? (0,5)

c) Abaixo se apresenta o diagrama de Bode do sistema sem o ganho calculado em (b), ou seja, da função  $\frac{X(s)}{V_a(s)}$ . Utilizando o gráfico, indique a alteração neste diagrama em função do ganho calculado em (b) e obtenha (de forma gráfica) as margens de ganho e fase do sistema com o ganho do controle. Justifique suas hipóteses. Respostas sem justificativas não serão consideradas. (0,5)

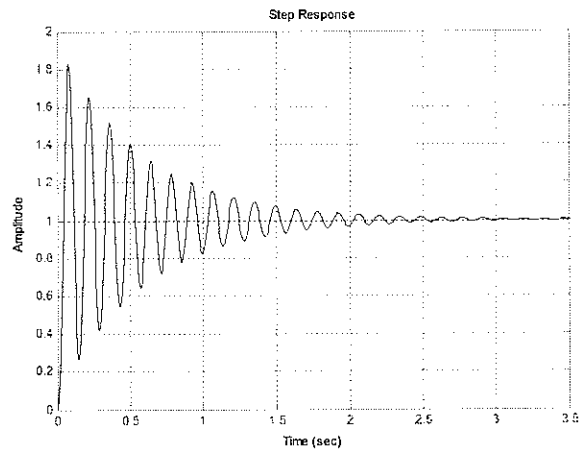


d) O sobressinal  $M_p$  é dado por  $M_p = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi}$  e a margem de fase  $\gamma$  é relacionada ao amortecimento em malha fechada para um sistema deste tipo pela curva abaixo.



Qual o sobressinal esperado para um degrau unitário na referência e o sistema com o controle proporcional projetado em (b)? (0,5)

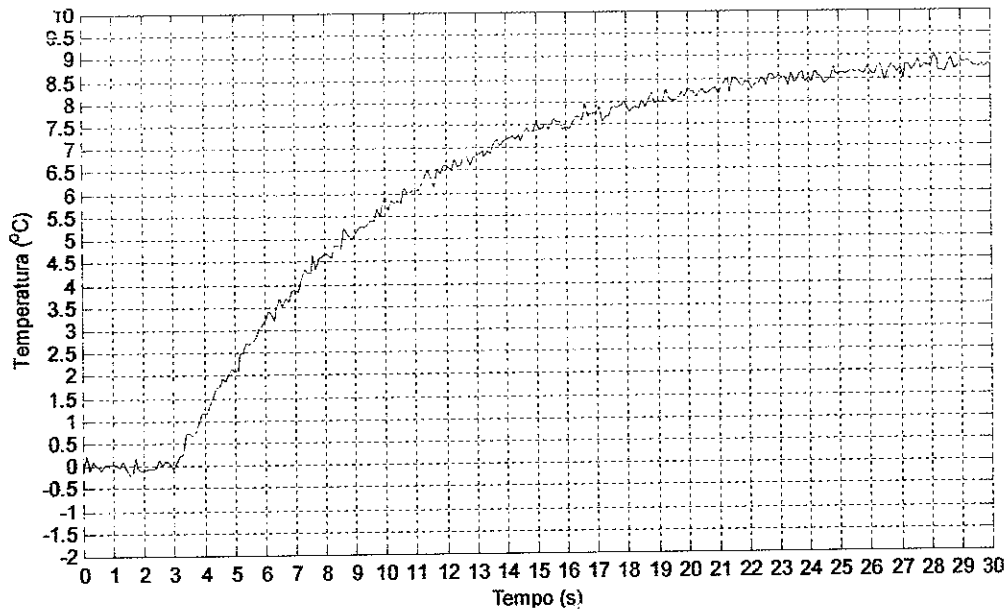
e) A resposta a um degrau unitário na referência para o sistema com o controle proporcional projetado em (b) foi verificada como abaixo. Para este sistema, a margem de fase está coerente com a esperada? Sabe-se que a constante de tempo elétrica (devido a indutância da armadura) é de 0,01s. Mostre que esta dinâmica que foi desprezada  $1/(0.01s + 1)$  não seria de fato notada na identificação experimental do sistema realizada no item a, mas que é a causa principal desta redução de qualidade de resposta observada em malha fechada. Explique com este exemplo o conceito de robustez que está embutido na margem de fase. (1,0)



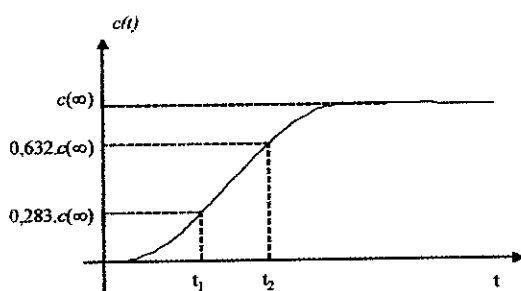
f) Projete um compensador de avanço para que a margem de fase do sistema (considerando a dinâmica simplificada do item (a)) seja de  $60^\circ$ . (1,5)

$$G_c(s) = \frac{1 + sT}{1 + \alpha sT}$$

3) A curva abaixo representa a resposta a um degrau de amplitude 30%, aplicado diretamente na entrada de um processo térmico. O range do transmissor de temperatura é de 0~100°C. Lembre-se que para o controlador, as entradas e saídas são dadas em %. (1,5)



- a) Calcule os parâmetros  $\theta, \tau$  de um modelo de primeira ordem com atraso equivalente. (0,25)



$$\tau = \frac{3}{2}(t_2 - t_1)$$

$$\theta = t_2 - \tau$$

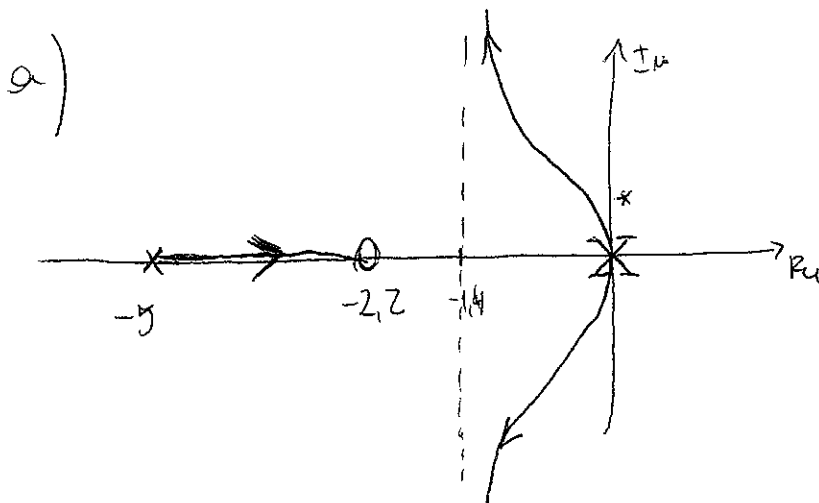
- b) Projeto o controlador PID para o processo, usando o método de Ziegler e Nichols (0,25)

**Tabela : Método de Ziegler e Nichols para Curva de Reação**

Controlador	$K_P$	$T_I$	$T_D$
PID	$1,2 \frac{1}{K \theta}$	$2\theta$	0,50

- c) O que poderá acontecer com o sistema se houver a substituição do transmissor (sensor) de temperatura para um que possua range de 0~1000oC , sem haver qualquer correção dos ganhos de controle projetados no item b ? (0,5)
- d) O que poderá acontecer com o sistema se houver a substituição do transmissor (sensor) de temperatura para um que possua range de 0~30oC , sem haver qualquer correção dos ganhos de controle projetados no item b ? (0,5)

1)  $G.G_a = \frac{0,1s + 0,22}{0,12s^3 + 0,6s^2} \Rightarrow$  zero:  $-2,2$  ①  
 polos:  $0; 0; -5$



$n-m = 2 \Rightarrow 2$  assintotas

$\alpha = 90^\circ; 270^\circ$

parte de varrambto

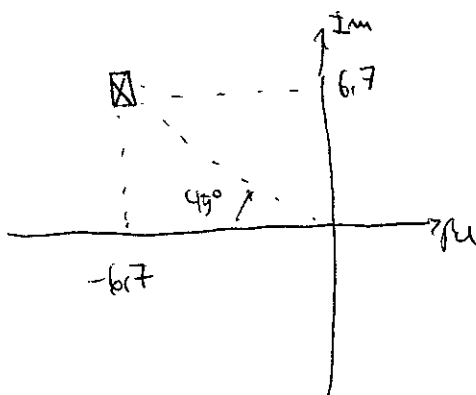
$$\sigma_0 = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{2} = -1,4$$

\* este angulo de partida  $\hat{e}$   $90^\circ$  pela  
 condiçao de angulo aplicado a um  
 ponto proximo ao polo  $\phi$ .

b)

$$MF(s) = \frac{K.G.G_a}{1+K.G.G_a} = \frac{(0,1s + 0,22)K}{(0,12s^3 + 0,6s^2) + (0,1s + 0,22)K}$$

$\Rightarrow$  Valor final =  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot s \cdot MF(s) = 1 \Rightarrow$  sempre, para qualquer ganho  $K$ ,  
 o sistema em malha fechada tira erro  
 nulo para entrada degrau.



polos desejados

$\zeta = 0,7 \Rightarrow \theta = 45^\circ$

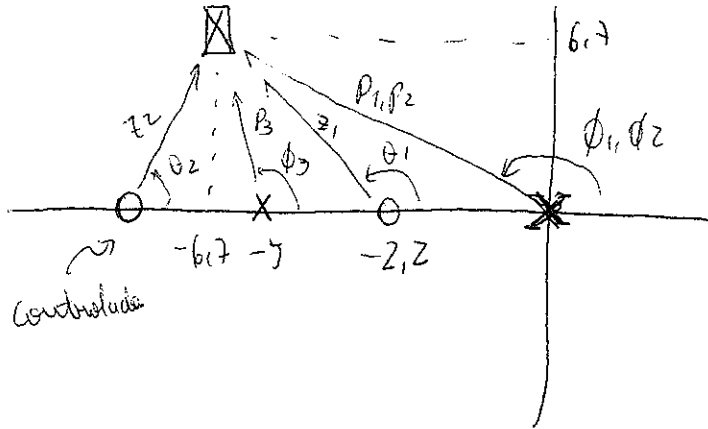
$\frac{4}{\zeta \omega_n} = 0,6 \Rightarrow \omega_n = 9,52$

$\Rightarrow$  polos  $= -6,7 \pm 6,7j$

Logo, pelo LRehocado no item (a), pode-se ver que estes polos desejados  
 não fazem parte do mesmo. Isto indica a necessidade de compensação  
 dinâmica

c)

②



por geometria:

$$\phi_1 = \phi_2 = 135^\circ$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 9,52$$

$$\theta_1 = 124^\circ$$

$$\zeta_1 = 8,1$$

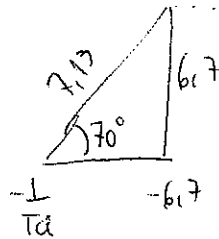
$$\phi_3 = 104^\circ$$

$$\rho_3 = 6,9$$

O controlador introduz um zero em  $-1/T_d$  que deve proporcionar o seguinte avanço de fase

$$-135^\circ - 135^\circ - 104^\circ + 124^\circ + \theta_2 = -180^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_2 = 70^\circ} \Rightarrow$$



por geometria

$$\frac{-1}{T_d} = -9,14 \Rightarrow T_d = 0,11$$

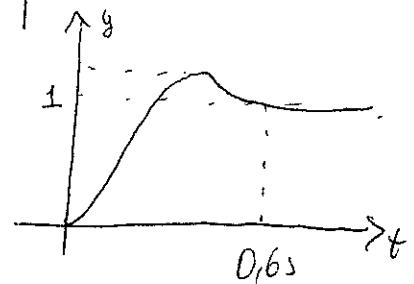
O ganho  $K_p$  é ditado pelo cond. de módulo:

(3)

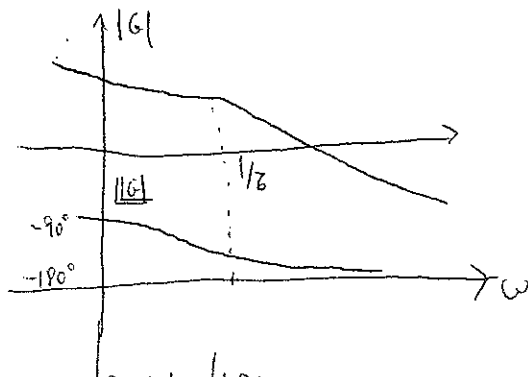
$$\left| K_p \cdot 0,11 \cdot \left( \frac{1}{0,11} + s \right) \cdot \frac{0,1 \cdot (s+2,2)}{0,12 \cdot (s+5) \cdot s^2} \right| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{0,11 \cdot 0,1 \cdot K_p}{0,12} \cdot \frac{8 \cdot 1 \cdot 7,13}{9,52 \cdot 9,52 \cdot 6,9} = 1 \Rightarrow \boxed{K_p = 118}$$

logo  $\boxed{G_c = 118 \cdot (1 + 0,11s)}$  resp. em MF OK!





$$a) \frac{X}{V_a} = \frac{K_{Mod}}{S(z_s + 1)}$$


④

• Embasa Jergemii (far  $\approx 90^\circ$ ) identifiemo lo yamho

$$\rightarrow K_{MOD} = \frac{20}{10} = 2$$

• Na maior frequência, na qual foi se nota uma maior variação de fase ( $\sim 113^\circ$ ), identificamos a constante de tempo:

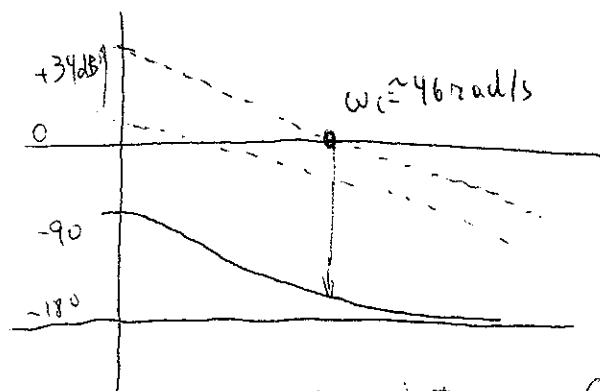
$$\frac{K_{MOD}}{10j(10j\delta + 1)} = -113^\circ \Rightarrow \frac{-100\delta + 10j}{-100\delta} = 113^\circ \Rightarrow \frac{10}{-100\delta} = \angle_{am}(113) \Rightarrow \delta = 0.0425$$

b) erro para entrada rampa =  $0,01 \rightarrow K_v = 100$

$$\lim_{S \rightarrow 0} \$ K \cdot \frac{2}{\$ (0.0425 + 1)} = \frac{1}{0.01} \Rightarrow \boxed{K = 50}$$

c)  $K_G = \frac{100}{5 \cdot (0.0475 + 1)} \Rightarrow$  O diagrama de Bode de  $K_G$  é igual ao de  $G$ , e o decibelo é trasladado de  $\frac{20 \log 100}{20 \log 2} = 34 \text{ dB}$

Portanto  
o auxílio de  
uma régua



$$ME \approx 27^\circ = 8''$$

$$MG = \text{infinite}$$

d) Para  $\gamma = 27^\circ \text{MF}$ , pelo gráfico obtém-se  $\xi \approx 0,3$ , que equivale a um sobressinal  $M_p = \exp\left(\frac{-0,3\pi}{\sqrt{1-0,3^2}}\right) = 37\%$

e) Não está coerente, pois o sobressinal observado está da ordem de 80%, bem maior do que os 37% esperados. (5)

A dinâmica não modelada  $\frac{1}{0,01s+1}$  não seria de fato percebida nos testes em malha aberta que foram realizados apenas no intervalo de 1 a 10 rad/s.

Para estas frequências, esta dinâmica introduziria uma alteração máxima de  $\left| \frac{1}{0,0110j+1} \right| = 0,995$  e atraso de fase adicional de  $-5,7^\circ$ . Estes valores podem ser "confundidos" com erros experimentais. Os testes deveriam considerar maiores frequências para evidenciar os efeitos desta dinâmica elétrica.

Entretanto, em malha fechada, o sistema com ganho elevado (50) passou a ter frequência de cruzamento de aprox. 46 rad/s, e a dinâmica elétrica passa a ser notada. Em outras palavras, em malha fechada, o controlador deixa o sistema mais rápido, e a dinâmica elétrica (que foi desprezada) passa a ser importante.

De fato, na freq. de cruzamento 46 rad/s, a dinâmica elétrica introduz um atraso de fase de  $\left| \frac{1}{0,0146j+1} \right| = -24^\circ$ , reduzindo

a margem de fase para da ordem de  $3^\circ$  (na realidade, há também uma pequena redução da freq. de cruzamento).

Logo, a margem de fase deve ser maior, e ela é uma medida do quão robusto é o controlador. Robustez é a capacidade de manter desempenho e estabilidade mesmo com imprecisões no modelo ou dinâmicas não modeladas.

f) avanço necessário

$$60^\circ - 27^\circ = 33^\circ$$

• novo índice  $6^\circ$  o mais  $\Rightarrow 39^\circ$

$$\sin 39^\circ = \frac{1-k}{1+k} \Rightarrow \underline{\alpha = 0,23}$$

• nova freq de cruzamento  $-20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -6,43 \text{ dB}$

$$\Rightarrow \frac{100}{|j\omega(0,042j\omega+1)|} = \sqrt{0,23} \Rightarrow \omega = 68,5 \text{ rad/s} \leftarrow \text{novo cruzamento}$$

$$\Rightarrow T \approx 68,5 = \frac{1}{\sqrt{0,23} \cdot T} \Rightarrow T = \frac{1}{\sqrt{0,23} \cdot 68,5} = 0,03$$

logo

$$\boxed{G_c(s) = \frac{1 + 0,03s}{1 + 0,0069s}} \rightarrow \text{verificação MF} = 58^\circ \text{ a } 68 \text{ rad/s}$$

OK

3) a)  $K = \frac{8,5\%}{30\%} \cdot 0,28$

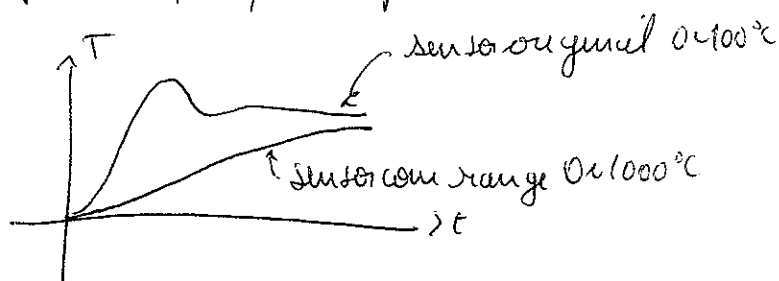
(7)

$t_1 = 5,2s$   
 $t_2 = 9,6s$  } graficamente  $\Rightarrow \begin{matrix} \delta = 6,6s \\ \theta = 3,0s \end{matrix}$

b)  $K_p = 9,4$   
 $T_i = 2\theta = 6s$   
 $T_d = 0,1\theta = 0,3s$  } ganho do PID  $K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$

c) O ganho em malha aberta  $(K)$  é igual ao ganho da planta, multiplicado pelo ganho do sensor.

Logo, ao usar um sensor com range maior, logo menor ganho, o ganho em malha aberta se reduz (neste caso, de um fator 10). Assim a resposta ficará mais lenta se não for feito ajuste do ganho  $K_p$ .



d) Analogamente, reduzir o ganho em 11 vezes (a de 3,3, o que fará o sistema ser muito oscilatório, ou até instável, em malha fechada, caso não se corrija o  $K_p$

