Mecânica Quântica — 7600022

Nona Lista — teste no dia 25/6/2018

Considere um elétron num campo magnético $\vec{B} = B_0\hat{z}$, sujeito a uma perturbação $\vec{V}(t) = b\sin(\omega t)\hat{y}$, onde $b \ll B_0$. No instante $t = 0$, o elétron está no estado quântico

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle.$$

Como de costume, escrevemos o estado no instante t na forma

$$|\psi\rangle_t = c_\uparrow(t)e^{-i\omega_0 t}|\uparrow\rangle + c_\downarrow(t)e^{-i\omega_0 t}|\downarrow\rangle,$$

onde $\omega_0 = \mu_B B_0$.

1. Encontre o sistema de equações diferenciais que $c_\uparrow(t)$ e $c_\downarrow(t)$ obedecem.
2. Resolva esse sistema para $\omega = 2\omega_0$. Mostre em gráfico as probabilidades $|c\uparrow(t)|^2$ e $|c\downarrow(t)|^2$
3. Encontre a equação diferencial que $c_\downarrow(t)$ para ω qualquer.
4. Resolva essa equação diferencial para encontrar $c_\downarrow(t)$.
5. Mostre em gráfico $|c_\downarrow^{max}|^2$ em função de ω, onde $c_\downarrow^{max}$ é a amplitude da oscilação de $c_\downarrow(t)$.
6. Um átomo de hidrogênio está inicialmente no estado fundamental ($1s$). Um campo elétrico $\vec{E}$ provoca excitação desse estado para o estado $2p$, com componente $\hbar m = 0$ do momento angular L_z. Ignore o spin. A partir da regra áurea de Fermi, encontre a direção em que o campo elétrico deve estar para promover essa excitação.
7. Repita o problema anterior para $m = 1$.
8. Nos problemas anteriores, o que ocorre se o estado final for $2s$, em lugar de $2p$?
9. Para calcular a taxa de transição do estado fundamental de um átomo de hidrogênio para o contínuo, precisamos efetuar uma soma sobre todos os estados compatíveis com a condição $E_f = E_0 + \hbar\omega$, onde $E_0 = -1\,\mathrm{Ry}$ é a energia do estado fundamental, e $E_f = \hbar k^2/2\mu$ é a do estado final (uma onda plana, em nossa aproximação). Calcule o elemento de matriz cujo quadrado aparece no somando.
10. No contexto do problema anterior, queremos agora transformar a soma em integral. Para isso, vamos imaginar que o átomo esteja numa caixa cúbica de lado L, muito grande. Usaremos condições de contorno periódicas, de forma que os momentos $\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$ permitidos são da forma

$$k_x = n_x\frac{2\pi}{L}$$
$$k_y = n_y\frac{2\pi}{L}$$
$$k_z = n_z\frac{2\pi}{L},$$

onde n_x, n_y e n_z são números inteiros.

(a) Quantos valores de k_x existem entre $n_x = n_0$ e $n_x = n_0 + \Delta n$, onde n_0 e $\Delta n \gg 1$ são inteiros?

(b) Para efetuar uma soma sobre n_x entre $n_x = a$ e $n_x = b$, onde $b - a$ é um inteiro muito grande, podemos dividir o intervalo (a, b) em M intervalos de tamanho $\Delta n_x = (b - a)/M$. Se M crescer, poderemos então deixar $\Delta n_x \to 0$ e escrever que

$$\sum_{n_x} = M\int dn_x.$$

Combine esse resultado com o do item (a) para transformar uma soma sobre n_x em uma integral sobre k_x (primeiro transforme a soma numa integral sobre dn_x).

(c) Estenda o resultado anterior para três dimensões, para transformar uma soma sobre n_x, n_y e n_z em uma integral sobre d^3k.

(d) A partir do resultado anterior, use coordenadas esféricas para escreva a regra áurea como uma integral sobre dk (onde k é a componente radial de $\vec{k}$).