3^a) Prova Mat120 - Álgebra noturno, Turma 47
Licenciatura em Matemática Prof. Eduardo Marcos
19 de junho de 2018

Nome : ____
N^oUSP : ____

Prof Eduardo do Nascimento Marcos

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

1. A prova pode ser feita a lápis;
2. Não é permitido o uso de calculadora;
3. Celulares e outras ferramentas eletrônicas devem ser desligados;
4. Boa Prova

1. ^{a}) Questão:

   Nesta questão cada ítem vale 0,2 pontos, sua nota neste ítem será calculada assim: Seja A= número de respostas certas e B o número de respostas erradas a nota na questão é o $\mathbf{min}\{0.2 \times (A - B), 2\}$. Em particular qualquer ítem não respondido não entra no cálculo da nota. Nesta questão não serão olhadas as justificativas você responde V para cada afirmação que acha que é verdadeira e F para as que pensa que é falsa. Deixe sem resposta as que não quiser responder nem V nem F.

   1. Se p é um número primo então p sempre divide $(a^p)^{p^2} - a$.
   2. Seja m um inteiro que não está no conjunto $\{-1, 1, 0\}$. Então m é primo se e somente se todo par (a, b) de números naturais $m \mid ab$ implica $m \mid a$ ou $m \mid b$.
   3. Se em $\frac{\mathbf{Z}}{n\mathbf{Z}}$ a equação $ax = b$ para a não múltiplo de n tem sempre solução então necessariamente n é primo.
   4. Dados a e b inteiros quaisquer com $b \neq 0$ existe apenas um par de inteiros (q, r) tal que $a = bq + r$.
   5. 59 divide $59^{10} - 1$.
   6. Sejam a, b, c com a primo com b então $a \mid bc$ se e somente se $a \mid c$.
   7. A equação $x^2 + 9x + 21 = 0$ tem duas soluções em $\frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{103Z}}$.
   8. Um inteiro da forma $6k + 5$ é também da forma $3k + 2$ e vale também a recíproca.
   9. O produto de 3 inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de 12.
   10. Sejam a e b inteiros não nulos e não ambos pares. Então eles são primos entre si se e somente se a equação $ax + by = 2$ tem solução.

2. ^{a}) Questão:

Seja $\phi : N^* \to N^*$ a função de Euler. (Lembre que esta função associa a cada inteiro positivo n o número de inteiros positivos primos com n e menores que n)

(a) Seja p un número primo , $r > 0$ inteiro mostre que $\phi(p^r) = p^{r-1}(p-1)$.

(b) Mostre que se m e n são inteiros maiores que zero que são primos entre si, então $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.

(c) Prove que se $m = p_1^{r_1} \ldots . p_t^{r_t}$ é a decomposição de m em fatores primos então $\phi(m) = m(1 - \frac{1}{p_1}) \ldots . .(1 - \frac{1}{p_r})$

3. ^{a}) Questão:

Enuncie o Teorema chinês dos restos.

4. ^{a}) Questão:

Chamamos ideal de $\mathbb{Z}$ a um subconjunto I de $\mathbb{Z}$ tal que:

(a) $0 \in I$

(b) I é fechado para a soma.

(c) Se $x \in I$ e $y \in \mathbb{Z}$ então $xy \in I$

Mostre que para todo ideal I de $\mathbb{Z}$ existe um número a em I tal que $I = \{ta : t \in \mathbb{Z}\}$.

Sugestão: Se $I \neq \{0\}$. Considere o menor elemento positivo de I, dado um outro elemento aplique o algorítmo da divisão.

5. [a]) Questão:

Uma pessoa ao receber um cheque no banco,percebeu que havia recebido o número de reais e centavos trocados. Em seguida gastou 68 centavos e percebeu que tinha o dobro da quantia original do cheque. Determinar o menor valor possível no qual o cheque pode ter sido preenchido.