13 Integral Definida

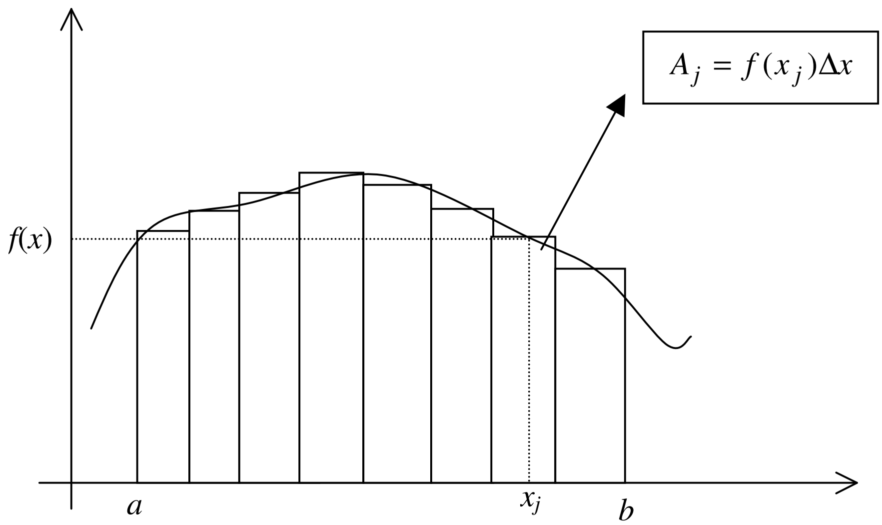
Se f é uma função de x, então a sua integral definida é uma integral restrita à valores em um intervalo específico, digamos, $a \le x \le b$. O resultado é um número que depende apenas de a e b, e não de x. Vejamos a definição:

Definição: Seja f uma função contínua no intervalo [a, b]. Suponha que este intervalo seja dividido em n partes iguais de largura $\Delta x = (b-a)/n$ e seja x_j um número pertencente ao j-ésimo intervalo, para j = 1, 2, ..., n. Neste caso, a integral definida de f em [a, b], denotada por $\int_a^b f(x)dx$, é dada por $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\right]\Delta x$, se este limite existir.

Pode-se mostrar que se a função $y = f(x)$ é contínua em um intervalo $[a,b]$, então ela é integrável em $[a,b]$.

Interpretação geométrica:

Suponha que $y = f(x)$ seja contínua e positiva em um intervalo $[a,b]$. Dividimos este intervalo em n sub-intervalos de comprimentos iguais, ou seja, de comprimento $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, de modo que $a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n = b$. Seja x_j um ponto qualquer no sub-intervalo $[a_{k-1}, a_k]$, $k = 1, 2, ..., n$. Construímos em cada um desses sub-intervalos retângulos com base Δx e altura $f(x_j)$, conforme a figura abaixo:



A soma das áreas dos n retângulos construídos é dada pelo somatório das áreas de cada um deles, isto é:

$$A_{retângulos} = \left[\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\right]\Delta x .$$

Intuitivamente é possível admitir que à medida que n cresce, Δx diminui, e conseqüentemente o somatório anterior converge para a área A da região limitada pelo gráfico de f e pelas retas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$. Portanto, a área desta região é dada por

$$A = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\right]\Delta x .$$

Mas este limite é exatamente igual à definição de integral definida e com isso observamos que a **integral definida** de uma função contínua e **positiva**, para x variando de a até b, fornece a **área** da região limitada pelo gráfico de f, pelo eixo-x e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

Observação: Na definição de integral definida consideramos uma função contínua qualquer, podendo assumir valores negativos. Nesse caso o produto $f(x_j)\Delta x$ representa o negativo da área do retângulo. Portanto, se $f(x) < 0$ para $x \in [a,b]$, então a área da região limitada pelo gráfico de f, pelo eixo-x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é dada por A = $-\int_a^b f(x)dx$.

O cálculo de uma integral definida através de sua definição pode ser extremamente complexo e até inviável para algumas funções. Portanto, não a utilizamos para calcular integrais definidas, e sim um teorema que é considerado um dos mais importantes do Cálculo:

Teorema Fundamental do Cálculo: Se $y = f(x)$ é uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e $F'(x) = f(x)$ [isto é, $F(x)$ é uma primitiva ou anti-derivada $f(x)$], então

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Propriedades da integral: Se f e g são funções contínuas no intervalo $[a,b]$, então:

a) $\int_a^b c\, f(x)\, dx = c\int_a^b f(x)dx$ **,** onde c é uma constante.

b) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

c) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, onde $a \le c \le b$

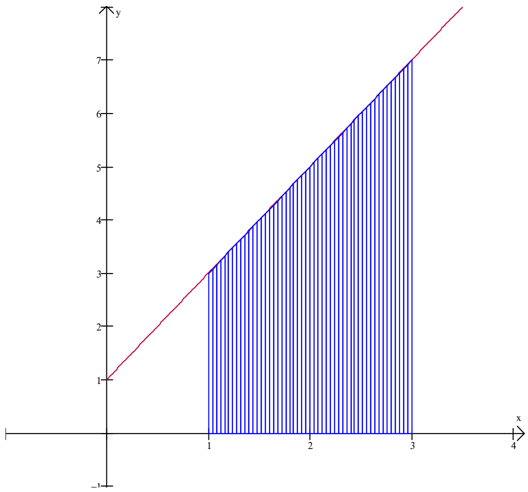
d) $f(x) \ge 0, \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \ge 0$

e) $f(x) \ge g(x), \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

f) Se $\exists\, f(a) \Rightarrow \int_a^a f(x)dx = 0$.

Exemplos: Use integração para calcular a área das regiões delimitadas pelo eixo-*x* e pelas funções abaixo:

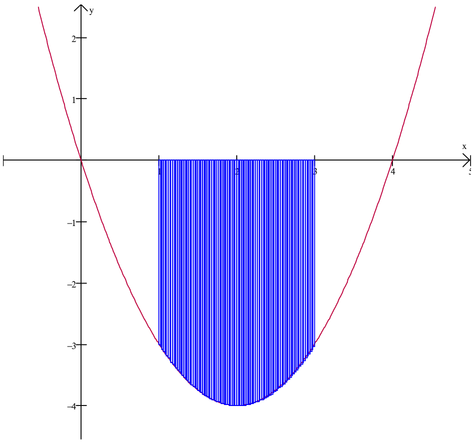
1) *f(x)* = 2*x* + 1, no intervalo [1,3].



$$A = \int_1^3 (2x+1)dx = x^2 + x + C\Big|_{x=1}^{x=3} = 9 + 3 + C - (1 + 1 + C) = 10.$$

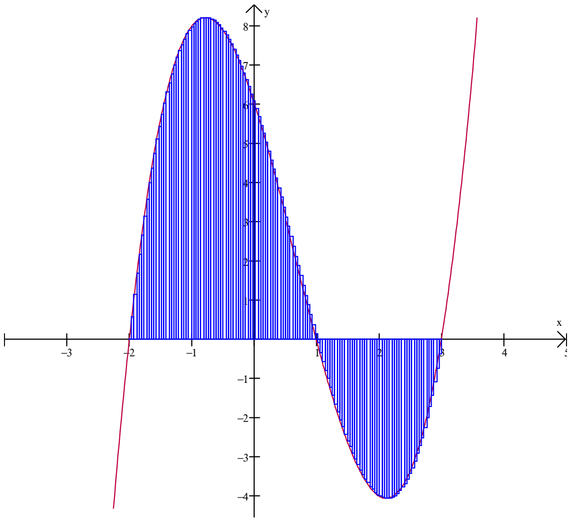
Geometricamente faríamos A = $A_{\text{retângulo}} + A_{\text{triângulo}}$ = 2 × 3 + (2 × 4)/2 = 6 + 4 = 10.

2) $f(x) = x^2 - 4x, \quad x \in [1,3]$.



Como $f(x) < 0, \forall\, x \in [1,3]$, segue que a área da região é dada por $A = -\int_1^3 (x^2 - 4x)dx = -(\frac{x^3}{3} - 2x^2)\Big|_{x=1}^{x=3} = -(9-18) + (\frac{1}{3} - 2) = \frac{22}{3}$.

3) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \quad x \in [-2,3]$.



$$A = \int_{-2}^{1} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)dx - \int_{1}^{3} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)dx =$$

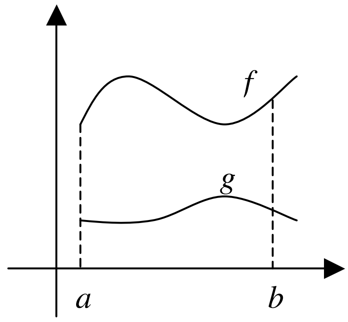
$$\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_{x=-2}^{x=1} - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_{x=1}^{x=3} = 10{,}42$$

Área de regiões entre curvas:

Suponha que f e g sejam definidas e contínuas em [a, b] e tais que $f(x) \geq g(x), \forall\ x \in [a,b]$. Então a área da região R limitada pelos gráficos de f e g e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é dada por

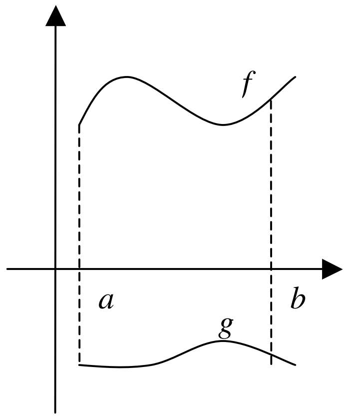
$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx,$$

independente de f e g serem positivas ou não. De fato, temos três possibilidades:



<u>1º caso</u>: $f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0\ e\ f(x) \geq g(x),\ \forall\ x \in [a,b]$.

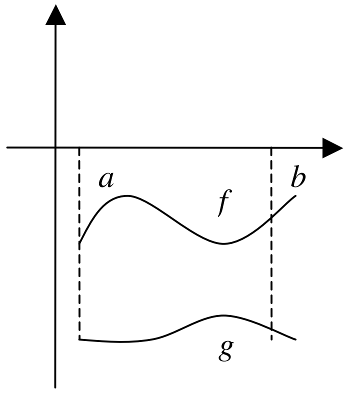
Neste caso, $A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.



<u>2º caso</u>: $f(x) \geq 0\ e\ g(x) \leq 0,\quad \forall\ x \in [a,b]$. Neste caso,

$$A = \int_a^b f(x)dx + \left[-\int_a^b g(x)dx\right] =$$

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$



<u>3º caso</u>: $f(x) \leq 0,\ g(x) \leq 0\ e\ f(x) \geq g(x),\ \forall\ x \in [a,b]$.

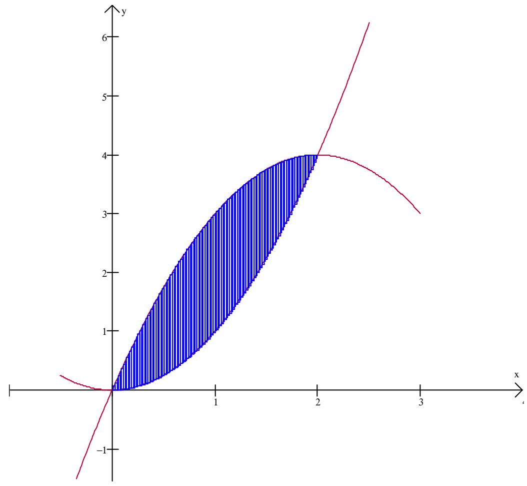
Neste caso,

$$A = -\int_a^b g(x)dx - \left[-\int_a^b f(x)dx\right] =$$

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

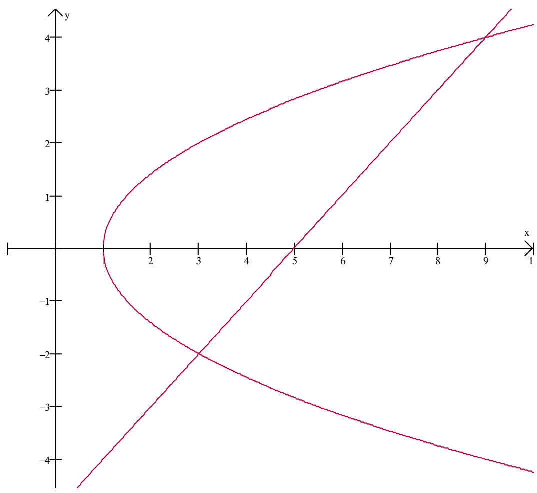
Exemplos: Encontre a área da região limitada pelas curvas dadas:

1) $f(x) = -x^2 + 4x$ e $g(x) = x^2$. As intersecções ocorrem em $x = 0$ e $x = 2$. Portanto:



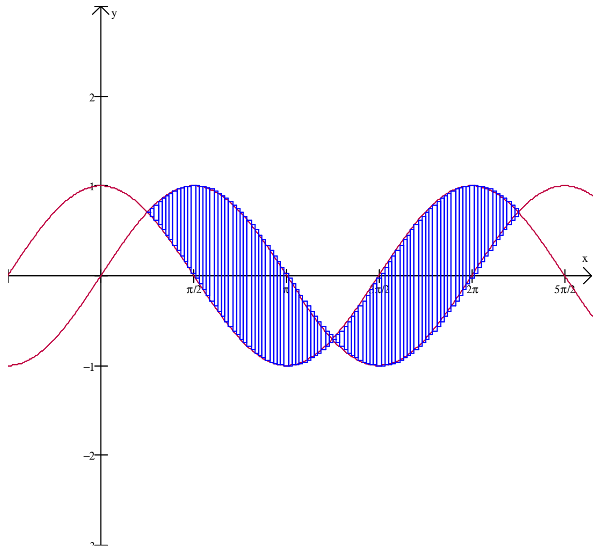
$$A = \int_0^2 (-x^2 + 4x - x^2)dx = \frac{8}{3} = 2{,}6667$$

2) $y^2 = 2x - 2$ e $y = x - 5$. As intersecções ocorrem em $x = 3$ e $x = 9$. Portanto:



$$A = \int_1^3 [\sqrt{2x-2} - (-\sqrt{2x-2})]dx + \int_3^9 [\sqrt{2x-2} - (x-5)]dx = 2\int_1^3 \sqrt{2x-2}\ dx + \int_3^9 [\sqrt{2x-2} - x + 5]dx = 18$$

3) $f(x) = sen(x), \quad g(x) = \cos(x), \quad \dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{9\pi}{4}$



As intersecções ocorrem em: $x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{5\pi}{4}$ *e* $x = \dfrac{9\pi}{4}$. Porém, observe que para $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ tem-se $\operatorname{sen} x > \cos x$, enquanto que para $x \in \left(\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{9\pi}{4}\right)$ tem-se $\cos x > \operatorname{sen} x$.

Assim,

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (sen(x) - \cos(x))dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} (\cos(x) - sen(x))dx = 4\sqrt{2} \approx 5{,}6569\,.$$

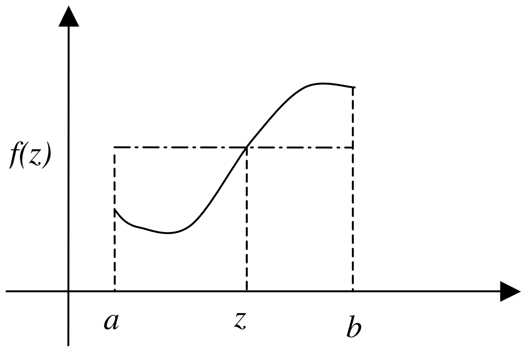
Outra aplicação da Integral Definida: Teorema do Valor Médio para Integrais

Se *f* é uma função contínua em [a,b], então existe $z \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(z)(b-a)\,,$$

ou seja, existe $z \in (a,b)$ tal que $\quad f(z) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx\,.$

Interpretação geométrica: Se $f(x) \ge 0, \forall\, x \in [a,b]$, então a área sob o gráfico de *f* é igual à área do retângulo de lados ($b - a$) e $f(z)$.



Observação: O valor médio de *f* em $[a,b]$ é dado por $VM = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Exemplos:

1) Um pesquisador estima que *t* horas depois da meia-noite, em um período típico de 24 horas, a temperatura em certa cidade é dada por $T(t) = 3 - \frac{2}{3}(t-13)^2, \quad 0 \le t \le 24$ graus Celsius. Qual é a temperatura média na cidade entre 6 da manhã e 4 da tarde?

Solução: Como 6 horas da manhã e 4 horas da tarde correspondem a $t = 6$ e $t = 16$, respectivamente, estamos interessados em calcular a temperatura média, $T(t)$, no intervalo $6 \le t \le 16$, o que corresponde à integral:

$$TM = \frac{1}{16-6}\int_6^{16}\left[3 - \frac{2}{3}(t-13)^2\right]dt \quad = \quad \frac{1}{10}\left[3t - \frac{2}{9}(t-13)^3\right]_{t=6}^{t=16} =$$

$$\frac{1}{10}\left[3(16) - \frac{2}{9}(16-13)^3\right] - \frac{1}{10}\left[3(6) - \frac{2}{9}(6-13)^3\right] \quad = -5{,}22$$

Assim, a temperatura média no período é $-5{,}22\ ^{o}$C.

2) Encontre o valor médio de $f(x) = 3\sqrt{x+1}$ no intervalo $[-1,8]$ e determine o valor de *x* que corresponde ao valor médio de *f*.

Solução:

$$VM = \frac{1}{8-(-1)}\int_{-1}^{8} 3\sqrt{x+1}\ dx = \frac{3}{9}\int_0^9 \sqrt{u}\ du = \frac{3}{9}\frac{2}{3}\sqrt{u^3}\Bigg|_{u=0}^{u=9} = \frac{2}{9}\left(\sqrt{729} - \sqrt{0}\right) = \frac{2}{9}\times 27 = 6\,.$$

Portanto, o valor médio de f em $[-1,8]$ é igual a 6.

Pelo Teorema do Valor Médio, $\exists\, z \in (-1,8)$ tal que $f(z) = VM = 6$, ou seja,

$3\sqrt{z+1} = 6 \quad \Rightarrow \quad 9(z+1) = 36 \quad \Rightarrow \quad 9z = 27 \quad \Rightarrow \quad z = 3$.

Portanto, quando $x = 3$, $f(3)$ é igual ao valor médio de f em $[-1,8]$.

EXERCÍCIOS

1) Calcule as integrais abaixo usando o Teorema Fundamental do Cálculo:

a) $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx$

b) $\displaystyle\int_{1/4}^2 \left(\frac{\ln x}{x}\right) dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x} + e^{-x}\right) dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 8x\left(x^2+1\right)^3\, dx$

e) $\displaystyle\int_0^4 \left(\frac{1}{\sqrt{6x+1}}\right) dx$

f) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x^2}{(x^3+1)^2}\right) dx$

g) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \left(e^t - e^{-t}\right) dt$

h) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} tg(x)\, dx$

i) $\displaystyle\int_1^5 \left(\frac{\cos(1/x)}{x^2}\right) dx$

j) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{\cos(\ln x)}{x}\right) dx$

k) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \left(1 + tg(x)\right)^3 \sec^2 x\, dx$

l) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \left(\frac{\sec x\; tg\; x}{1+\sec x}\right) dx$

2) Esboce a região limitada pelas curvas dadas e calcule as respectivas áreas utilizando integrais definidas:

a) $y = x+1, \quad y = 9 - x^2, \quad x = -1, \quad x = 2$

b) $y = sen(x), \quad y = e^x, \quad x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{2}$

c) $y = \cos(x), \quad y = sen(2x), \quad x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{2}$

d) $y = |x|, \quad y = x^2 - 2$

e) $y = x^3 - 6x^2 + 8x, \quad y = x^2 - 4x$

f) $y^2 = x, \quad x - 2y = 3$

3) Os registros mostram que t horas após a meia-noite, a temperatura em um certo aeroporto foi $T(t) = -0,3t^2 + 4t + 10$ °C. Qual foi a temperatura média no aeroporto entre 9h e meio-dia?

4) Os registros mostram que t meses após o início do ano, o preço da carne moída nos supermercados foi $P(t) = 0,09t^2 - 0,2t + 1,6$ reais o quilo. Qual foi o preço médio da carne moída durante os 3 primeiros meses do ano?

5) Com t meses de experiência um funcionário do correio é capaz de separar $Q(t) = 700 - 400e^{-0,5t}$ cartas por hora. Qual é a velocidade média com que um funcionário consegue separar a correspondência durante os 3 primeiros meses de trabalho?

6) Em certo experimento, o número de bactérias presente em uma cultura após t minutos foi $Q(t) = 2.000e^{0,05t}$. Qual foi o número médio de bactérias presentes na cultura durante os primeiros 5 minutos do experimento?