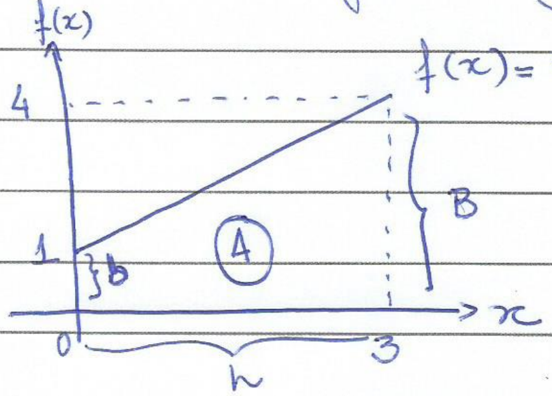
A Integral Definida

Se f é uma função de x, então a sua integral definida é uma integral restrita à valores em um intervalo específico, digamos $a \leq x \leq b$. O resultado é um número que depende apenas de a e b, e não de x.

Inicialmente, o cálculo de integrais definidas foi pensado para resolução do cálculo de áreas entre uma função $f(x)$ e o eixo x.

Considere o seguinte gráfico.



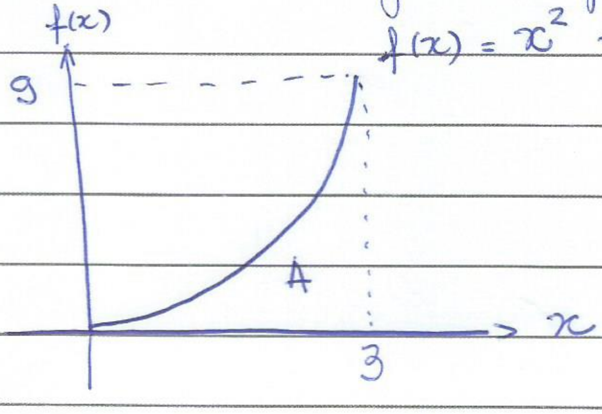
$f(x) = x + 1$ → definida no $I = [0,3]$

$$A = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(4+1)3}{2}$$

$A = 7{,}5$ u.a.

A função $f(x) = x + 1$ é bastante simples e, no intervalo $I = [0,3]$, delimita uma figura bastante conhecida que é um trapézio. A área do trapézio é dada pela expressão $A = \frac{(B+b).h}{2}$; em que: B é base maior, b é a base menor; h é a altura.

Considere o seguinte gráfico.

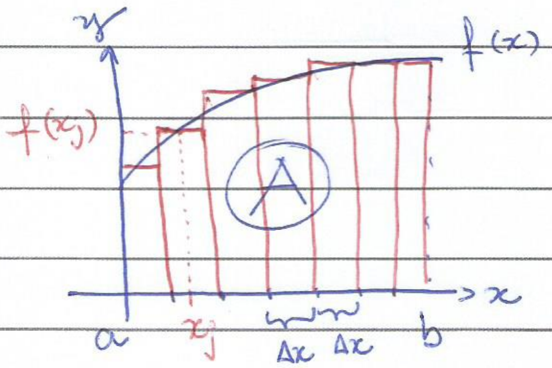


$f(x) = x^2$ → definida no $I = [0,3]$

Também é uma função bastante simples, mas como calcular a área A?

Generalizando,

Seja a função $y = f(x)$, contínua e definida no intervalo $[a, b]$.



Divida o intervalo $[a, b]$ em n sub-intervalos de larguras iguais

$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$$

Seja x_j um ponto qualquer no sub-intervalo $[a_{k-1}; a_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Construímos em cada um desses sub-intervalos retângulos com base Δx e altura $f(x_j)$.

Uma aproximação para área A pode ser obtida pela soma das áreas dos retângulos, ou seja,

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} \Delta x \, f(x_j) = \Delta x \sum_{j=1}^{n} f(x_j).$$

Intuitivamente, o que vai acontecer se aumentarmos o número de retângulos ($n \to$ cresce)?

$$\downarrow \Delta x = \frac{(b-a)}{n \uparrow}$$

Teremos retângulos cada vez mais estreitos (Δx diminui) e consequentemente o somatório anterior (A_n) converge para área A da região limitada pelo gráfico de $f(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Portanto, a área desta região é dada por:

$$A = \lim_{n \to \infty} \Delta x \left[\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \right]$$

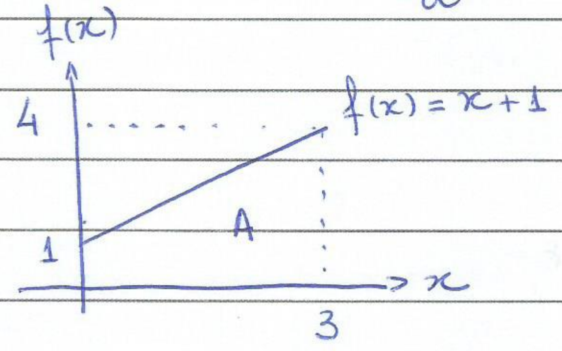
Mas este limite é exatamente igual à definição da integral definida e com isso observamos que a integral definida de uma função contínua e positiva, para x variando de a até b, forma a área da região limitada pelo gráfico de f, pelo eixo-x e pelas retas $x=a$ e $x=b$.

O cálculo de uma integral definida utilizando essa definição (limite quando $n \to +\infty$) pode ser extremamente complexo (as vezes inviável) para algumas funções. Portanto, não a utilizamos e sim um teorema denominado Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema Fundamental do Cálculo

Se $y=f(x)$ é uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e $F(x)$ é uma primitiva da função $f(x)$, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$



$A_{TRAP} = 7{,}5$ u.a.

$$A = \int_0^3 (x+1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{x=0}^{x=3}$$

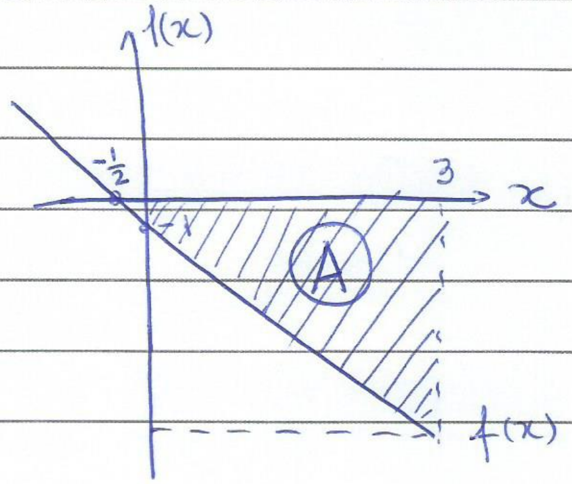
$$= \overbrace{\left(\frac{3^2}{2} + 3\right)}^{F(b)} - \overbrace{\left(\frac{0^2}{2} + 0\right)}^{F(a)}$$

$$= \frac{9}{2} + 3 = \frac{9+6}{2} = \frac{15}{2} = \boxed{7{,}5 \text{ u.a.}}$$

OBS Na ~~de~~ definição de integral definida consideramos uma função contínua qualquer, ou seja, podendo assumir valores positivos ou negativos. ~~Neste~~ ~~ca~~ No caso da função assumir valores negativos $f(x_j)\Delta x$ (área retângulo) representa o negativo da área do retângulo. Portanto, se $f(x)<0$ para $x \in [a,b]$ então a área da região é dada por

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

EXEMPLO: Considere a função $f(x) = -2x-1$ definida no intervalo $[0,3]$. Qual a área delimitada pela função $f(x)$, pelo eixo-x e pelas retas $x=0$ e $x=3$?



$$A = \int_0^3 -2x-1\,dx$$

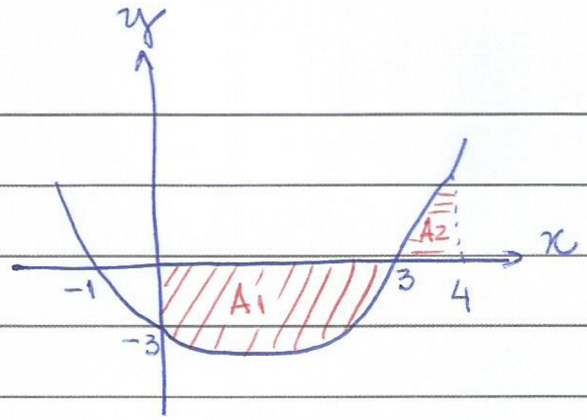
$$= \left(\frac{-2x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=3}$$

$$= -(3^2) - 3 = -9-3 = -12$$

?
área

$$A = -\int_0^3 -2x-1\,dx = -[-12] = 12$$

EXEMPLO: Considere a função $f(x) = x^2-2x-3$ definida no intervalo $I = [-4, 4]$. Qual a área delimitada pela função $f(x)$, pelo eixo-x e pelas retas $x=0$ e $x=4$?



$f(x) = x^2 - 2x - 3$

raízes?

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 16$

$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

intercepto-y? $f(0) = -3$

$A = A_1 + A_2$ $\qquad A = 9 + 2{,}3 = \boxed{11{,}3}\ u$

A_1: a função de 0 a 3 é negativa!!!

$$A_1 = -\int_0^3 f(x)\,dx = -\int_0^3 (x^2 - 2x - 3)\,dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - 3x\right]\Bigg|_{x=0}^{x=3}$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x\right]\Bigg|_{x=0}^{x=3}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{-(3^3)}{3} + 3^2 + 3(3)\right)}_{F(b)} - \underbrace{\left(\frac{-0^3}{3} + 0^2 + 3(0)\right)}_{F(a)}$$

$$= -\frac{27}{3} + 9 + 9 = \frac{-27 + 27 + 27}{3} = \boxed{9}\ u \quad A_1$$

$$A_2 = \int_3^4 f(x)\,dx = \int_3^4 (x^2 - 2x - 3)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - 3x\right]\Bigg|_{x=3}^{x=4}$$

$$= \underbrace{\left[\frac{4^3}{3} - \frac{\cancel{2}(4^2)}{\cancel{2}} - 3(4)\right]}_{F(b)} - \underbrace{\left[\frac{3^3}{3} - \frac{\cancel{2}(3^2)}{\cancel{2}} - 3(3)\right]}_{F(a)}$$

$$= \left(\frac{64}{3} - 16 - 12\right) - \left(\frac{27}{3} - 9 - 9\right) = \left(\frac{64 - 84}{3}\right) - \left(\frac{27 - 54}{3}\right) = \frac{7}{3} \approx 2{,}3 \quad A_2$$

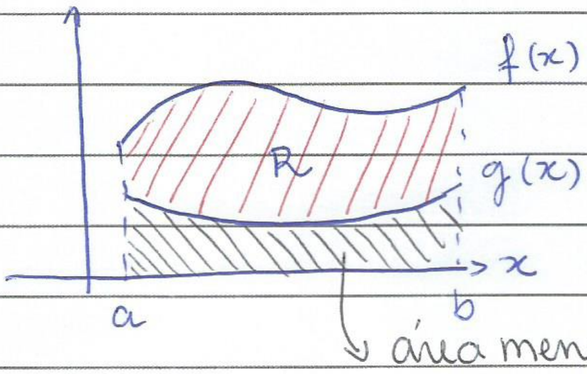
~~EXEMPLO~~ Áreas de Regiões entre Curvas

Suponha que f e g sejam funções contínuas e definidas em $[a,b]$ e tais que $f(x) \geq g(x),\ \forall\ x \in [a,b]$. Então a área da região R limitada pelos gráficos de f e g e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$R = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

$$R = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{ÁREA MAIOR}} - \underbrace{\int_a^b g(x)\,dx}_{\text{ÁREA MENOR}}$$

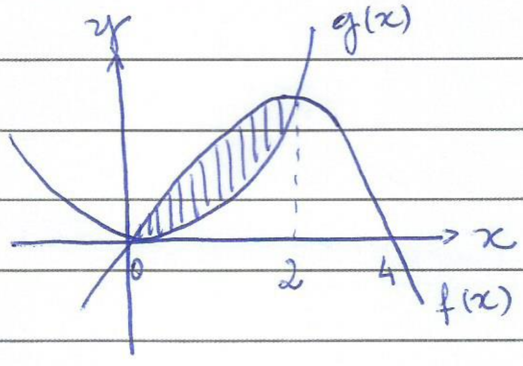
R = ÁREA MAIOR − ÁREA MENOR = desconto de áreas



EXEMPLO: Encontre a área da região delimitada pelas curvas $f(x) = -x^2 + 4x$ e $g(x) = x^2$ e seus pontos de intersecção. $(f(x) = g(x))$.

$$-x^2 + 4x = x^2 \Rightarrow -2x^2 + 4x = 0$$

$$2x(-x+2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$



$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$-x^2 + 4x = 0 \Rightarrow -x(x+4) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

$$R = \int_0^2 [f(x) - g(x)]\,dx$$

$$= \int_0^2 -x^2 + 4x - x^2\,dx$$

$$= \int_0^2 -2x^2 + 4x\,dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}x^2}{\cancel{2}} \right] \Bigg|_{x=0}^{x=2}$$

$$= \left(-\frac{2(2^3)}{3} + 2(2^2) \right) - 0$$

$$= \frac{-16}{3} + 8 = \frac{-16+24}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}67 \text{ u.a.}$$