A Integral Indefinida

A primeira coisa que temos que ter em "mente" é que a integração é a operação inversa da derivação. É como se eu fornecesse a derivada e você tem que encontrar a função que deu origem a ela.

Definição 1: A função $F(x)$ é chamada antiderivada (ou primitiva) da função $f(x)$, no intervalo $[a,b]$ se $F'(x) = f(x) \ \forall x \in [a,b]$.

EXEMPLO: Qual a função $F(x)$ que, ao ser derivada, resulta na função $f(x) = x^3$?

"SÃO VÁRIAS"

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^4}{4} + 1 \\ F(x) &= \frac{x^4}{4} + 2 \\ F(x) &= \frac{x^4}{4} + 1000 \\ &\vdots \\ F(x) &= \frac{x^4}{4} - 1000 \end{aligned}\right\} \quad F(x) = \frac{x^4}{4} + C$$

C é uma constante arbitrária.

$\Downarrow$

Família de funções

Definição 2: Se a função $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então a expressão $F(x) + C$ é a integral indefinida da função $f(x)$ e é denotada por:

$$\int \overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{integrando}}\, dx}^{\text{elemento de integração}} = \overbrace{F(x) + C}^{\text{Integral indefinida}}$$

sinal da integral: $\int$

primitiva: $F(x)$

Tabela Básica de Integrais

São algumas integrais imediatas.

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\quad \boxed{\forall n \neq -1}$

EXEMPLOS

a) $\int x^1 dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$

b) $\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$

c) $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$

d) $\int \frac{1}{x^8} dx = \int x^{-8} dx = \frac{x^{-8+1}}{-8+1} + C = \frac{x^{-7}}{-7} + C = -\frac{1}{7x^7} + C$

2) $\int \frac{1}{x} dx$ Note que neste caso $n = -1$ $\left(\int x^{-1} dx\right)$ e não podemos usar a regra anterior.

OBS: Qual a função que, ao ser derivada, resulta na função $\frac{1}{x}$? R: função logarítmica.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$ $\quad (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$ função exponencial

Um caso particular é quando $a \approx 2{,}7183\ldots = e$ base "e"

$$\int e^x dx = \frac{e^x}{\underbrace{\ln(e)}_{1}} + C = e^x + C$$

Propriedades

1) Dado que $\int f(x)\,dx = F(x) + C_1$ e $\int g(x)\,dx = G(x) + C_2$, então,

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$
$$= F(x) + C_1 + G(x) + C_2$$
$$= F(x) + G(x) + C \qquad \boxed{C = C_1 + C_2}$$

2) Dado que K é uma constante real e $\int f(x)\,dx = F(x) + C_1$, então,

$$\int K f(x)\,dx = K \int f(x)\,dx = K[F(x) + C_1]$$
$$= K F(x) + K C_1$$
$$= K F(x) + C \qquad \boxed{C = K C_1}$$

EXEMPLOS:

1) $$\int \underbrace{2}_{K}\underbrace{x^2}_{f(x)}\,dx = 2\int x^{\overset{n=2}{2}}\,dx = 2 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{2x^3}{3} + C$$

2) $$\int \frac{x^4}{3}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{3}}_{K} \cdot \underbrace{x^4}_{f(x)}\,dx = \frac{1}{3}\int x^{\overset{n=4}{4}}\,dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} + C$$
$$= \frac{x^5}{15} + C$$

3) $$\int \underbrace{x^2}_{f(x)} + \underbrace{x^3}_{g(x)}\,dx = \int x^{\overset{n=2}{2}}\,dx + \int x^{\overset{n=3}{3}}\,dx$$
$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + C$$

4) $\int \frac{1}{2x^3}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{2}}_{k} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{f(x)}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int x^{-3}\,dx$ $n=-3$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-4} = -\frac{1}{4x^2} + C$

5) $\int \underbrace{4x^2}_{f(x)} + \underbrace{\frac{1}{3x^2}}_{g(x)}\,dx = \int 4x^2\,dx + \int \frac{1}{3x^2}\,dx$

$= 4\int x^2\,dx + \frac{1}{3}\int x^{-2}\,dx$

$= 4\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\frac{x^{-1}}{(-1)} = \frac{4x^3}{3} - \frac{1}{3x} + C$

EXERCÍCIOS

Resolva as integrais indefinidas. (Apresente os passos)

1) $\int 3x^3\,dx$

2) $\int \frac{x^3}{3}\,dx$

3) $\int 4x^4 + \frac{x^2}{2}\,dx$

4) $\int 9x^3 - 2x^5\,dx$

5) $\int \frac{3x^2}{4} - \frac{2}{x^3}\,dx$

6) $\int \frac{2x^3}{3} + 3^x\,dx$

7) $\int 4^x - e^x\,dx$

8) $\int \frac{x^3}{3} + 10^x\,dx$

Integração por Substituição

A Integração por Substituição é equivalente à "REGRA DA CADEIA" na derivação!

É a integração de funções compostas!

Sabemos que $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Mas e se precisamos resolver a seguinte integral.

$\int f(u)\,dx$ em que u é uma função de x

$\underline{\underline{u(x)}}$?

EXEMPLO $\int (2x+1)^4\,dx$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(u) = u^4 \\ u(x) = 2x+1 \end{array}}$$

$f(x) = (2x+1)^4$ é uma função composta.

$\int u^4 \underbrace{dx}$

↳ precisamos fazer a troca para "du"

Se $u = 2x+1$ ← obter du

$$\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

$$\int u^{\overset{n=4}{4}} \cdot \underset{k}{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\int u^4\,du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{4+1}}{4+1} = \frac{u^5}{10} + C$$

$$= \frac{(2x+1)^5}{10} + C$$

EXEMPLO: $\int (\underbrace{x+3}_{u})^{10}\,dx$

se $u = x+3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$

$$\int u^{10}\,du = \frac{u^{11}}{11} = \frac{(x+3)^{11}}{11} + C$$

EXEMPLO: $\int \sqrt{\underbrace{3x+4}_{u}}\,dx$

se $u = 3x+4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{1}{3}du$

$$\int \sqrt{u}\cdot\frac{1}{3}\,du = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{1/2}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}\,\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2u^{3/2}}{9} = \frac{2\sqrt{u^3}}{9}$$

$$= \frac{2\sqrt{(3x+4)^3}}{9} + C$$

EXEMPLO: $\int 2x(x^2+1)^5 dx$

Dica: Quando temos a multiplicação de duas funções temos que escolher uma delas para ser a substituição

$$\boxed{u = 2x \quad \text{ou} \quad u = x^2+1}$$

A escolha deve ser apropriada → vamos escolher como variável u aquela cuja derivada vai servir para cancelar (ou pelo menos simplificar) a outra expressão.

Se escolhermos $u = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow$ não serve para cancelar/simplificar a expressão $u = x^2+1$!

Mas,

Considerando $u = x^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$

Logo, $\int 2x(x^2+1)^5 dx = \int \cancel{2x}(u)^5 \frac{1}{\cancel{2x}} du = \int u^5 du$

$$= \frac{u^6}{6} = \boxed{\frac{(x^2+1)^6}{6} + C}$$

EXEMPLO: $\int \frac{4x^3}{x^4+1} dx$ $\left\{ \begin{array}{l} u = 4x^3 \\ \text{ou} \\ u = x^4+1 \end{array} \right.$

Considerando $u = x^4+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3 \Rightarrow dx = \frac{1}{4x^3} du$

$$\int \frac{\cancel{4x^3}}{u} \frac{1}{\cancel{4x^3}} du = \int \frac{1}{u} du = \ln|u|$$

$$= \boxed{\ln|x^4+1| + C}$$

EXEMPLO: $\int 5e^{5t+2}\,dt$ $\begin{cases} u = 5 \\ u = 5t+2 \end{cases}$

Considerando $u = 5t+2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 5 \Rightarrow dt = \frac{1}{5}du$

$$\int \cancel{5} e^{u} \frac{1}{\cancel{5}} du = \int e^{u} du = e^{u} = e^{5t+2} + C$$

EXERCÍCIOS Resolva as integrais usando a técnica da substituição.

1) $\int (x+10)^3\,dx$

2) $\int \left(x - \frac{1}{2}\right)^4 dx$

3) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

4) $\int y(y^2+5)^8\,dy$

5) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx$

6) $\int x e^{-x^2}\,dx$

7) $\int y^2 e^{(y^3+1)}\,dy$

8) $\int y\sqrt{y^2+1}\,dy$

9) $\int \frac{[\ln(z)]^2}{z}\,dz$

10) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+19}\,dx$

11) $\int \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}\,dy$

OBS: Os exercícios da primeira e segunda parte da aula deverão ser entregues no dia da prova (26/06)