

Recuperação 2015

1) Resolva a equação diferencial $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{-x}$

Solução: Estudamos primeiro a eq. homogênea correspondente

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \quad \text{Eq. Característica}$$

$$(r-2)^2 = 0$$

$$\boxed{r=2} \quad \text{Tipo (II)}$$

$$\boxed{y_{gh}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}}$$

Propomos a seguir uma solução particular da eq. não homogênea.

$$y_p(x) = A e^{-x}$$

$$y_p'(x) = -A e^{-x}$$

$$y_p''(x) = A e^{-x}$$

Substituindo em $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$.

$$A e^{-x} - 4(-A e^{-x}) + 4A e^{-x} = e^{-x}$$

$$A + 4A + 4A = 1$$

$$9A = 1$$

$$A = 1/9$$

$$\rightarrow \boxed{y_p(x) = \frac{1}{9} e^{-x}}$$

A solução geral da eq. dada é

(2)

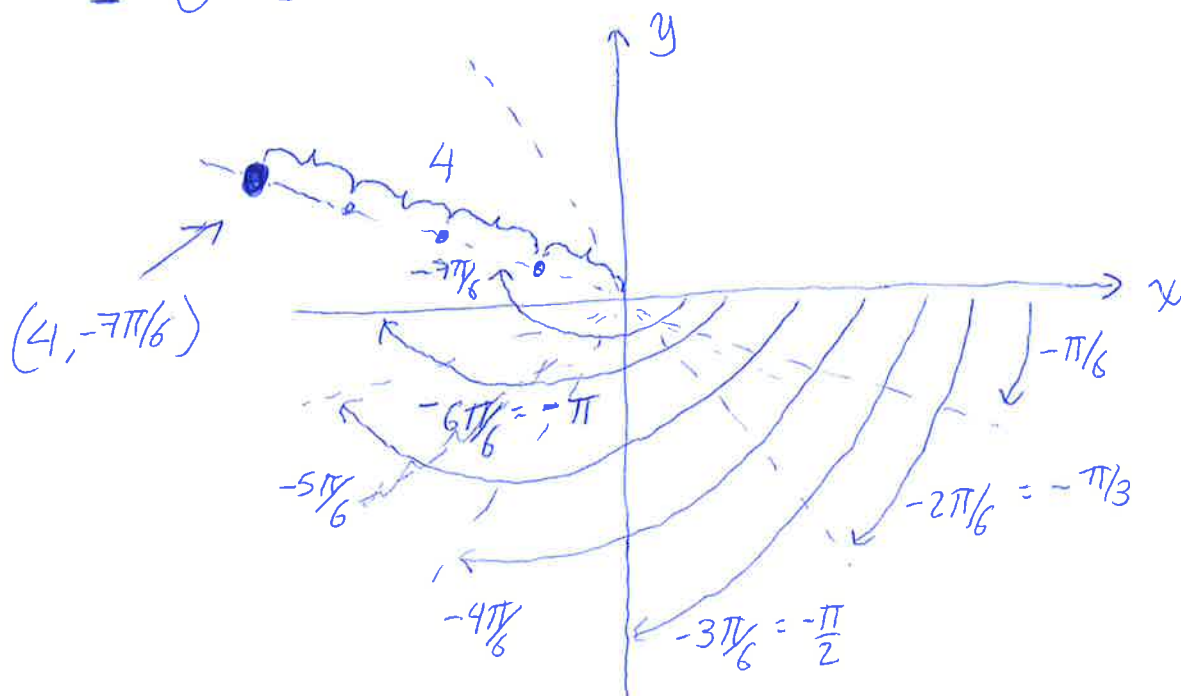
$$y_{g.n.h.}(x) = y_{gh.}(x) + y_p(x)$$

$$y_{g.n.h.}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{9} e^{-x}$$

- 2)(a) Trace o ponto com coordenadas polares $(4, -7\pi/6)$.
(b) Encontre as coordenadas cartesianas deste ponto.

Solução: (a) $(r, \theta) = (4, -7\pi/6)$

- θ é negativo $\Rightarrow$ deve ser medido em sentido horário ↻
- θ é um múltiplo de $\pi/6$ (30°)



Cartesianas (x, y) ← Polares (r, θ)

$$x(r, \theta) = r \cos(\theta) = 4 \cos(-7\pi/6) =$$

$$y(r, \theta) = r \sin(\theta) = 4 \sin(-7\pi/6) = \text{continua...}$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \quad \text{função par}$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta) \quad \text{função ímpar}$$

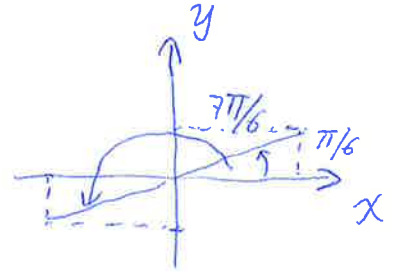
(3)

$$x = 4 \cos(-7\pi/6) = 4 \cos(7\pi/6)$$

$$y = 4 \sin(-7\pi/6) = -4 \sin(7\pi/6)$$

$$\cos(7\pi/6) = -\cos(\pi/6)$$

$$\sin(7\pi/6) = \sin(\pi/6)$$

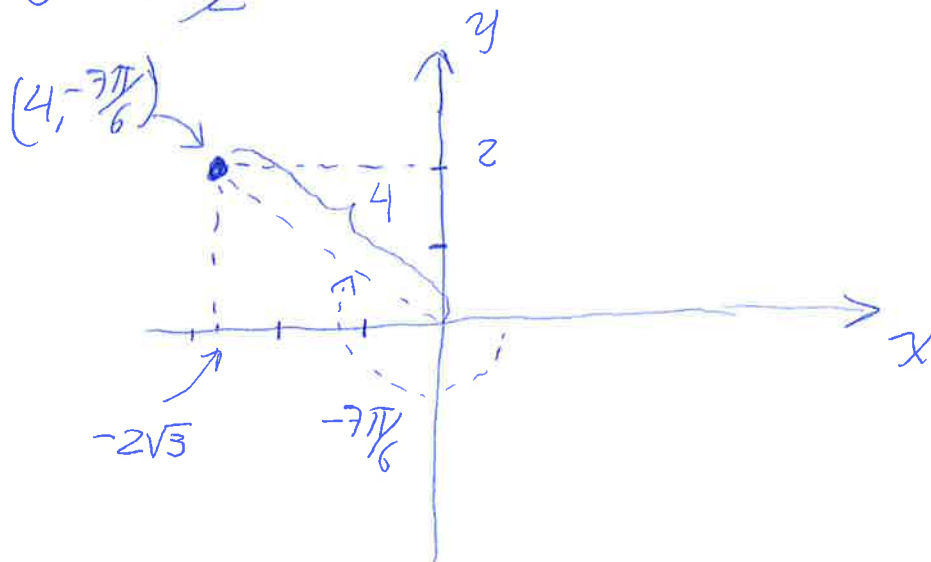


$$x = -4 \cos(\pi/6) = -4 \cos(30^\circ)$$

$$y = 4 \sin(\pi/6) = 4 \sin(30^\circ)$$

$$x = -4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

$$y = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$



$$(x, y) \longleftrightarrow (r, \theta)$$

$$(-2\sqrt{3}, 2) \longleftrightarrow (4, -7\pi/6)$$

3) Determine se a série

(4)

$$\frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{12}} + \dots$$

é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

Solução:

Sequência Geradora $a_n = \left\{ \frac{1}{2^6}, \frac{1}{2^8}, \frac{1}{2^{10}}, \frac{1}{2^{12}}, \dots, a_n = ?, \dots \right\}$

n	a_n
1	$1/2^6$
2	$1/2^8$
3	$1/2^{10}$
4	$1/2^{12}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{1}{2^{4+2n}}$

$$a_n = \frac{1}{2^{4+2n}} = \frac{1}{2^4 \cdot 2^{2n}} = \frac{1}{2^4 \cdot 4^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^4 \cdot 4^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2^4 \cdot 4^{n+1}} \cdot \frac{2^4 \cdot 4^n}{1} = \frac{1}{4} = r = \text{cte}$$

A razão entre termos consecutivos não depende de n: é constante



Série Geométrica

Como $|r| = \left| \frac{1}{4} \right| < 1 \Rightarrow$ A série é convergente

continua...

- A soma de uma série geométrica convergente (5)

$$e' \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

No nosso problema

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^6} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right] = \frac{\frac{1}{2^6}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2^6}}{3/4} = \frac{1}{2^6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2^2}{2^6 \cdot 3} = \frac{1}{2^4 \cdot 3}$$

$$S = \frac{1}{16 \cdot 3} = \frac{1}{48}$$

$$\boxed{S = \frac{1}{48}}$$

4) Encontre o limite $\lim_{t \rightarrow 0} \langle t, \cos(t), 2 \rangle$.

Solução: Neste caso basta substituir $t=0$ na função vetorial. Não existe nenhuma indeterminação. As funções componentes são contínuas para todo t .

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle t, \cos(t), 2 \rangle = \langle 0, 1, 2 \rangle$$

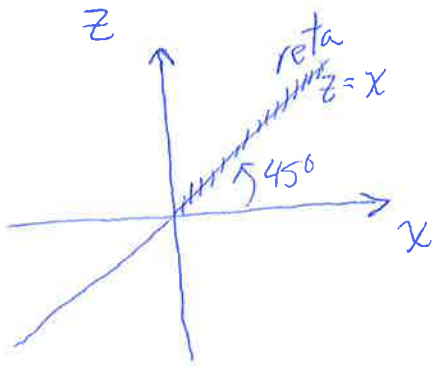
5) Esboce o gráfico da função $f(x,y)=x$.

⑥

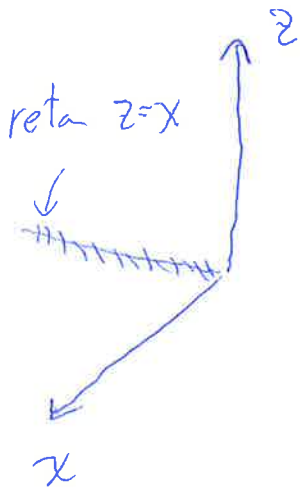
Solução: $z = f(x,y)$

$$z = x$$

2D



Na representação



3D

