Biossistemas, Prova-2, 2015, Cálculo II

1) Reparametrize a curva $x = e^t\cos(t)$, $y = e^t \text{sen}(t)$ em função do parâmetro comprimento de arco. Tome como ponto de referência $(1,0)$.

Solução: Temos que encontrar a função comprimento de Arco associada a curva dada.

$$S(t) = \int_{u_i}^{t} |\vec{r}\,'(u)|\, du$$

u - é a variável de integração
t - é " " " s

- Trocamos o parâmetro da curva de $t \to u$.

$$\vec{r}(u) = e^u \langle \cos(u), \text{sen}(u) \rangle$$

$$\vec{r}\,'(u) = e^u \langle \cos(u), \text{sen}(u) \rangle + e^u \langle -\text{sen}(u), \cos(u) \rangle$$

$$\vec{r}\,'(u) = e^u \langle \cos(u) - \text{sen}(u), \text{sen}(u) + \cos(u) \rangle$$

$$|\vec{r}\,'(u)| = |e^u| \sqrt{[\cos(u) - \text{sen}(u)]^2 + [\text{sen}(u) + \cos(u)]^2}$$

$$\boxed{|\vec{r}\,'(u)| = e^u\sqrt{2}}$$ Integrando de $S(t)$

- Para encontrar u_i

$$\left.\begin{aligned} x(u) &= e^u\cos(u) \\ y(u) &= e^u \text{sen}(u) \end{aligned}\right\} \to \begin{cases} 1 = e^{u_i}\cos(u_i) \\ 0 = e^{u_i}\text{sen}(u_i) \end{cases}$$

mas se $u = u_i \Rightarrow (x,y) = (1;0)$

$e^{u_i} \neq 0$ A exponencial nunca se anula.

$\text{sen}(u_i) = 0$

Soluções da segunda Eq $\to$ $u_i = 0, \pi, 2\pi, \dots$

continua

Porém, a primeira eq. somente é satisfeita se $u_i = 0$. Com isso, a solução do sistema é $\boxed{u_i = 0}$.

- Retornando a função comprimento de arco

$$s(t) = \int_{u_i}^{t} |\vec{r}\,'(u)|\,du = \int_0^t \sqrt{2}\,e^u\,du = \sqrt{2}\,e^u\Big|_0^t = \sqrt{2}\,(e^t - e^0)$$

$$\boxed{s(t) = \sqrt{2}\,(e^t - 1)}$$ ← Função Comprimento de Arco para o problema dado.

- Agora encontramos a função inversa

$$s = \sqrt{2}\,(e^t - 1)$$

$$\frac{s}{\sqrt{2}} = e^t - 1$$

$$\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 = e^t$$

$$t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)$$

$$\boxed{t(s) = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)}$$ ← Inversa da Função Comprimento de Arco

- A curva de partida $\vec{r}(t) = e^t \langle \cos(t), \operatorname{sen}(t) \rangle$ pode ser reparametrizada em função de s.

$$\vec{r}(s) = e^{\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)} \left\langle \cos\left[\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right], \operatorname{sen}\left[\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right] \right\rangle$$

$$\boxed{\vec{r}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right) \left\langle \cos\left[\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right], \operatorname{sen}\left[\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right] \right\rangle}$$

2) Esboce três superfícies de nível da função $f(x,y,z) = y^2 + z^2$.

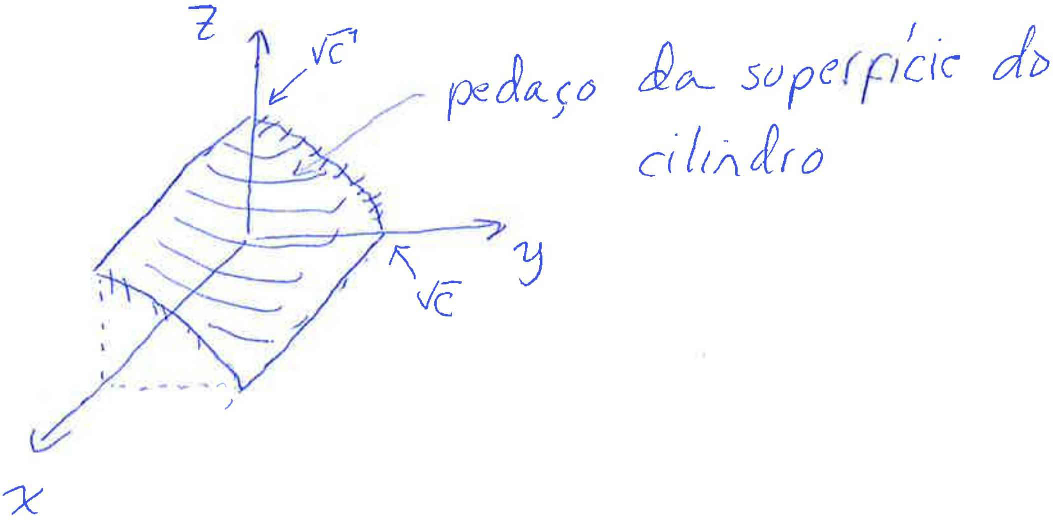
Solução:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Superfície de Nível}\\ f(x,y,z) = C\end{array}}$$ Definição

$y^2 + z^2 = C \leftarrow$ Superfícies de Nível
C é uma constante

- No plano yz, a eq $y^2+z^2=C$ significa uma circunferência centrada na origem e de raio $\sqrt{C}$.

- No espaço 3D, a mesma eq. $y^2+z^2=C$ significa um cilindro com x como eixo de simetria.



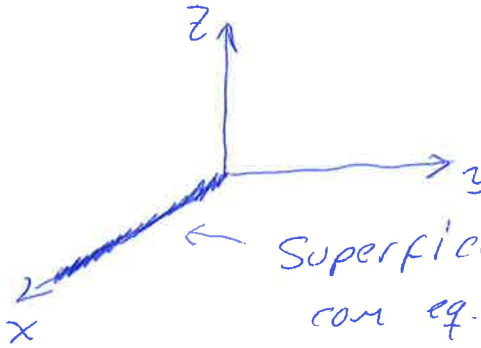
... continua

Três Superfícies de Nível

① Se $c=0 \Rightarrow y^2+z^2=0 \Rightarrow y=0$ e $z=0$

Cilindro de raio zero (Eixo x)

+4

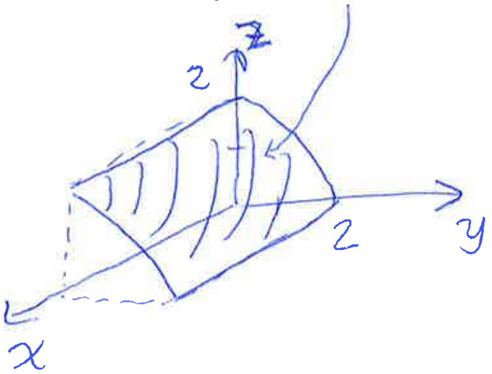


Superfície de Nível para $c=0$ é uma reta com eq. $\vec{r}(t)=\langle t,0,0\rangle$

② Se $c=4 \Rightarrow y^2+z^2=4$

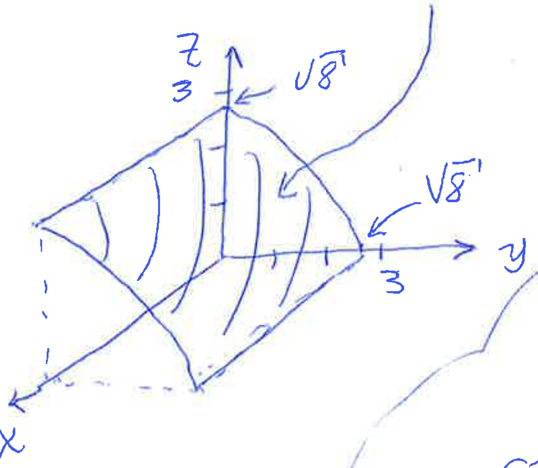
Cilindro de raio 2

+4

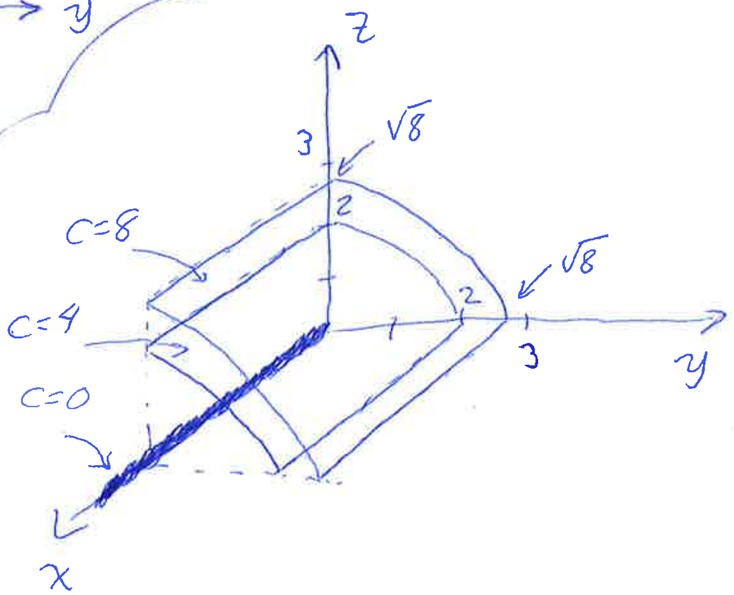


③ Se $c=8 \Rightarrow y^2+z^2=8$

Cilindro de raio $\sqrt{8}$. ($\sqrt{8}<3$)



Três juntas



3) Determine o domínio da função

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-9}}.$$

Solução:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \underbrace{x^2+y^2+z^2-9 > 0}\}$$

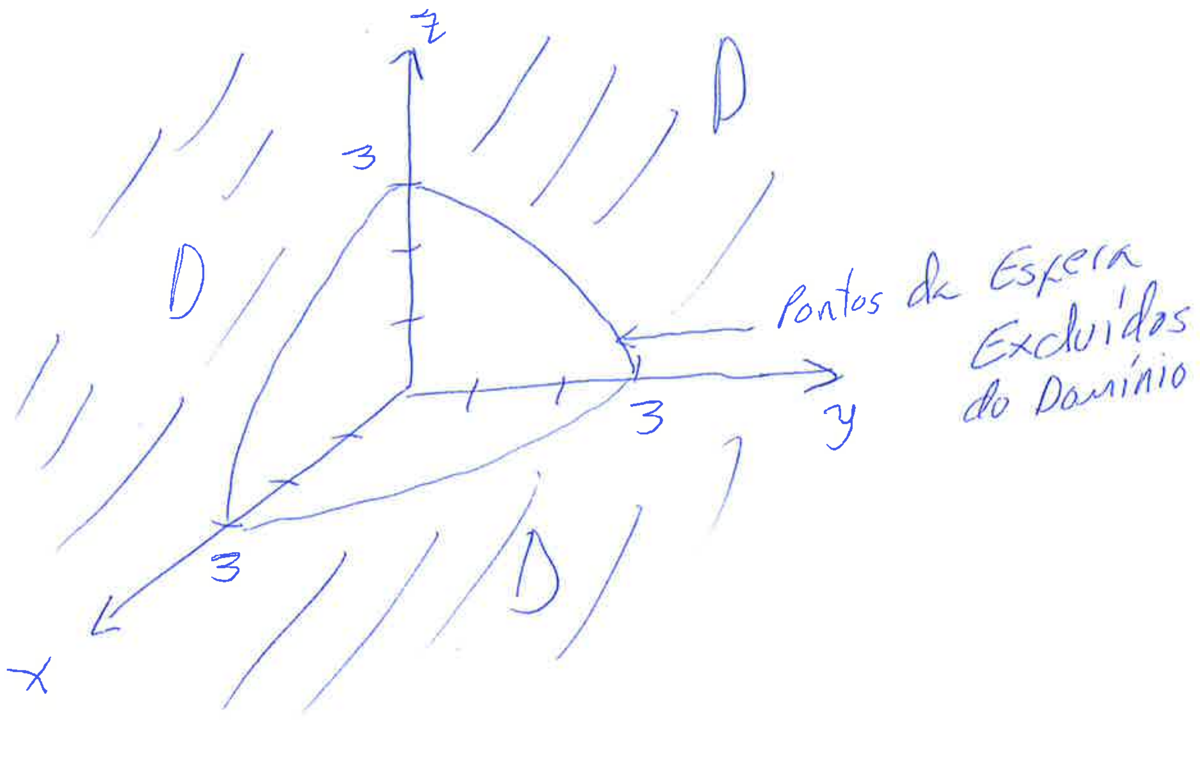
ou

$$x^2+y^2+z^2 > 9$$

Não pode ser igual a zero porque anula o denominador.

$x^2+y^2+z^2 = 9 \longrightarrow$ Significa uma Esfera de Raio = 3.

Os pontos que satisfazem a ~~igua~~ desigualdade são os que estão fora da esfera. Os pontos da esfera NÃO estão incluídos.



4) Calcule $f_x(1,0)$ e $f_y(1,0)$ de

$$f(x,y) = \sqrt{4-x^2-4y^2}.$$

<u>Solução:</u> $f(x,y) = (4-x^2-4y^2)^{1/2}$

$$w = 4-x^2-4y^2 = w(x,y)$$

$$f(w) = w^{1/2}$$

$$f_x = \left(\frac{df}{dw}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\begin{tikzcd}
 & f \arrow[d, bend right, "\frac{df}{dw}"'] \arrow[d, bend left, "\frac{df}{dw}"] \arrow[ddl, bend right=60, "f_x"'] \arrow[ddr, bend left=60, "f_y"] & \\
 & w \arrow[dl, "\frac{\partial w}{\partial x}"'] \arrow[dr, "\frac{\partial w}{\partial y}"] & \\
x & & y
\end{tikzcd}$$

$$f_y = \left(\frac{df}{dw}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Regra da Cadeia

$$\frac{df}{dw} = \frac{1}{2}w^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}w^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{w}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = -8y$$

$$f_x = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{w}}\cdot(-\cancel{2}x)$$

$$\boxed{f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-4y^2}}}$$

$$\boxed{f_x(1,0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$f_y = \frac{1}{2\sqrt{w}}(-\cancel{8}^{\,4}y)$$

$$\boxed{f_y(x,y) = \frac{-4y}{\sqrt{4-x^2-4y^2}}}$$

$$\boxed{f_y(1,0) = 0}$$

5) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ se $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z$

Caminho - 1

$$\underbrace{xy^2z^3 + x^3y^2z - x - y - z}_{g(x,y,z)\,=\,cte} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y^2z^3 + 3x^2y^2z - 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2xyz^3 + 2x^3yz - 1$$ ← Não era necessario

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 3xy^2z^2 + x^3y^2 - 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial z}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{(y^2z^3 + 3x^2y^2z - 1)}{(3xy^2z^2 + x^3y^2 - 1)}}$$

$$\boxed{3xy^2z^2 + x^3y^2 - 1 \neq 0}$$

Caminho - 2

$z(x,y) \rightarrow z$ é a variável dependente

$$xy^2[z(x,y)]^3 + x^3y^2z(x,y) = x + y + z(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[xy^2[z(x,y)]^3 + x^3y^2z(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[x + y + z(x,y)\right]$$

(8)

$$y^2z^3 + xy^2(3z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2y^2z + x^3y^2\frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$= 1 + \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left[3xy^2z^2 + x^3y^2 - 1\right] = 1 - y^2z^3 - 3x^2y^2z$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - y^2z^3 - 3x^2y^2z}{3xy^2z^2 + x^3y^2 - 1}}$$

$$\boxed{3xy^2z^2 + x^3y^2 - 1 \neq 0}$$