Noturno, P2, Cálculo II, 2017

1) Determine a derivada da função vetorial

$\vec{r}(t) = e^{-t}\vec{i} + \tan(t)\vec{j} + t\ln(t)\vec{k}$

<u>Sol.:</u> Basta derivar por componentes

$x(t) = e^{-t} \Rightarrow \boxed{x'(t) = -e^{-t}}$

$y(t) = \tan(t) = \dfrac{\text{sen}(t)}{\cos(t)}$

Usando a Regra do quociente para Derivar

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{f'(t)g(t) - g'(t)f(t)}{[g(t)]^2}$$

temos $y'(t) = \dfrac{\cos(t)\cos(t) - (-\text{sen}(t))\,\text{sen}(t)}{\cos^2(t)} = \dfrac{1}{\cos^2(t)}$

$\boxed{y'(t) = \sec^2(t)}$ $\left(\sec(t) = \dfrac{1}{\cos(t)}\right)$

$z(t) = t\ln(t)$

Usando a Regra do Produto para Derivar

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)g(t)\right) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

$z'(t) = 1\cdot\ln(t) + \cancel{t}\cdot\dfrac{1}{\cancel{t}}$

$\boxed{z'(t) = \ln(t) + 1}$

logo

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{r}\,'(t) = -e^{-t}\vec{i} + \sec^2(t)\vec{j} + (\ln(t)+1)\vec{k} \quad \text{ou} \\ \vec{r}\,'(t) = \langle -e^{-t}, \sec^2(t), \ln(t)+1 \rangle\end{array}}$$

2) Encontre a função curvatura da curva $y = \ln(x)$.

Sol.: Um caminho é lembrando a fórmula

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}$$

A curva $y = \ln(x)$ pode ser parametrizada como

$$C \begin{cases} x = t \\ y = \ln(t) \\ z = 0 \end{cases}$$

basta colocar $\boxed{x = t}$

ou escrita como função vetorial

$$\vec{r}(t) = \langle t, \ln(t), 0 \rangle$$

$$\vec{r}\,'(t) = \langle 1, \frac{1}{t}, 0 \rangle$$

$$\vec{r}\,''(t) = \langle 0, -\frac{1}{t^2}, 0 \rangle$$

$$\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{t^2} & 0 \end{vmatrix} = \langle 0, 0, -\frac{1}{t^2} \rangle$$

$$|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''| = \frac{1}{t^2}$$

$$|\vec{r}\,'| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \frac{1}{|t|}\sqrt{t^2+1}$$

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3} = \frac{\frac{1}{t^2}}{\left(\frac{1}{|t|}\sqrt{t^2+1}\right)^3} = \frac{|t|^{\cancel{3}}}{\cancel{t^2}(\sqrt{t^2+1})^3} = \frac{|t|}{(t^2+1)^{3/2}}$$

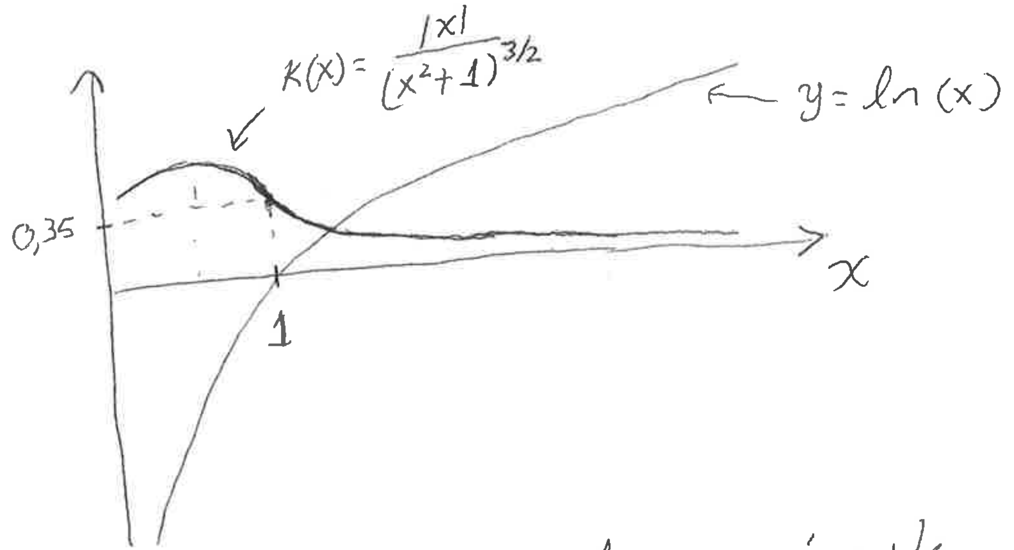
Voltando em $x = t$

$$\kappa(x) = \frac{|x|}{(x^2+1)^{3/2}}$$

se $x = 1$ então $\kappa(1) = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,35$

se $x \to \infty$ então $\kappa(x) \to 0$

Um esboço dos gráficos das duas funções é



Outro caminho é lembrando a fórmula

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{\left(1+(f'(x))^2\right)^{3/2}}$$

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$K(x) = \frac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{x^2\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{3/2}} = \frac{(x^2)^{3/2}}{x^2(x^2+1)^{3/2}}$$

$$K(x) = \frac{|x|^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(x^2+1)^{3/2}} = \frac{|x|}{(x^2+1)^{3/2}}$$

Chegando no mesmo resultado ∎

3) Determine o vetor velocidade, o módulo do vetor velocidade e o vetor aceleração se

$$\vec{r}(t) = \langle t^3, t^2+1, t^3-1 \rangle$$

Sol.:
$$\vec{r}\,'(t) = \boxed{\vec{v}(t) = \langle 3t^2, 2t, 3t^2 \rangle} = t\langle 3t, 2, 3t \rangle$$

$$\vec{r}\,''(t) = \boxed{\vec{a}(t) = \langle 6t, 2, 6t \rangle}$$

$$|\vec{v}(t)| = |t|\sqrt{(3t)^2 + 2^2 + (3t)^2}$$

$$|\vec{v}(t)| = |t|\sqrt{2(3t)^2 + 4} = |t|\sqrt{18t^2+4}$$

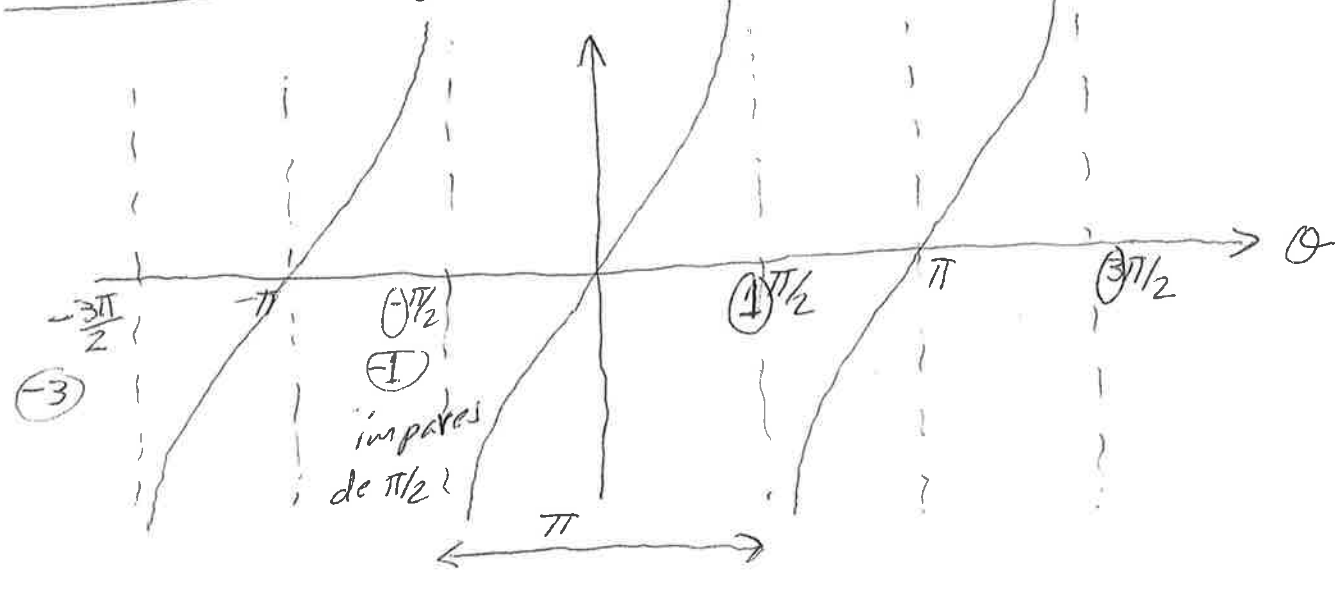
$$\cancel{|\vec{v}(t)| = 2|t|\,\cdot}$$

$$\boxed{|\vec{v}(t)| = |t|\sqrt{18t^2+4}}$$

4) Determine o domínio da função

$$f(x,y) = \tan(x^2 - y^2).$$

Sol.: O gráfico da função $\tan(\theta)$ é



- Logo, a função $\tan(\theta)$ não está definida quando

$$\theta = \underbrace{(2n+1)}_{\text{número ímpar}}\frac{\pi}{2} \quad e \quad n \in \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{inteiros}}$$

As retas verticais $\theta = (2n+1)\pi/2$ são assintotas.

- Por outro lado, a função $z(x,y) = x^2 - y^2$ é um polinômio em duas variáveis e está bem definida para todo par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- Consequentemente, a função $f(x,y) = \tan(x^2 - y^2)$ está bem definida em todo ponto de $\mathbb{R}^2$ com a restrição $x^2 - y^2 \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Isto é,

$$\boxed{D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 - y^2 \neq (2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ e } n \in \mathbb{Z}\right\}}$$

5) Determine a derivada parcial

$f_y(2,1,0)$ se $f(x,y,z) = xyz$.

Sol.: $f_y(x,y,z) = xz$

$f_y(2,1,0) = 2 \cdot 0 = 0$

$$\boxed{f_y(2,1,0) = 0}$$