14 Derivadas Parciais

14.6 Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente

Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente

Nesta seção, introduzimos um tipo de derivada, chamada derivada direcional, que nos permite encontrar a taxa de variação de uma função de duas ou mais variáveis em qualquer direção.

Derivadas Direcionais

Derivadas Direcionais

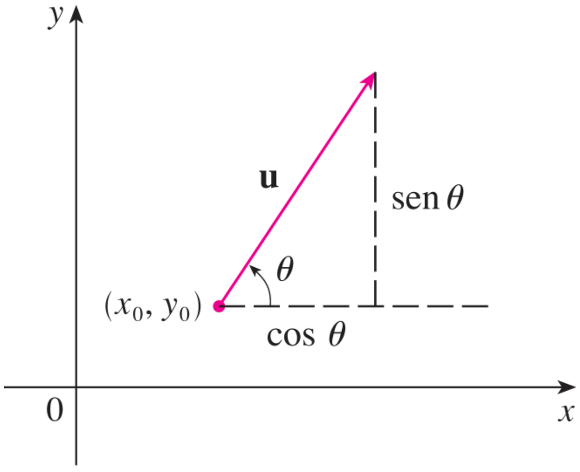
Lembremo-nos de que, se $z = f(x, y)$, as derivadas parciais f_x e f_y são definidas como

$$\boxed{1} \qquad \begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\ f_y(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \end{aligned}$$

e representam as taxas de mudança de z nas direções x e y, ou seja, na direção dos vetores de unidade **i** e **j**.

Derivadas Direcionais

Suponha que queiramos determinar a taxa de variação de z em (x_0, y_0) na direção de um vetor unitário arbitrário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. (Veja a Figura 2.) Para fazê-lo, devemos considerar a superfície S com equação $z = f(x, y)$ (o gráfico de f) e tomar $z_0 = f(x_0, y_0)$. Então o ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ está em S.



Um vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$

Figura 2

Derivadas Direcionais

O plano vertical que passa por *P* na direção de **u** intercepta *S* em uma curva *C*. (Veja a Figura 3.)

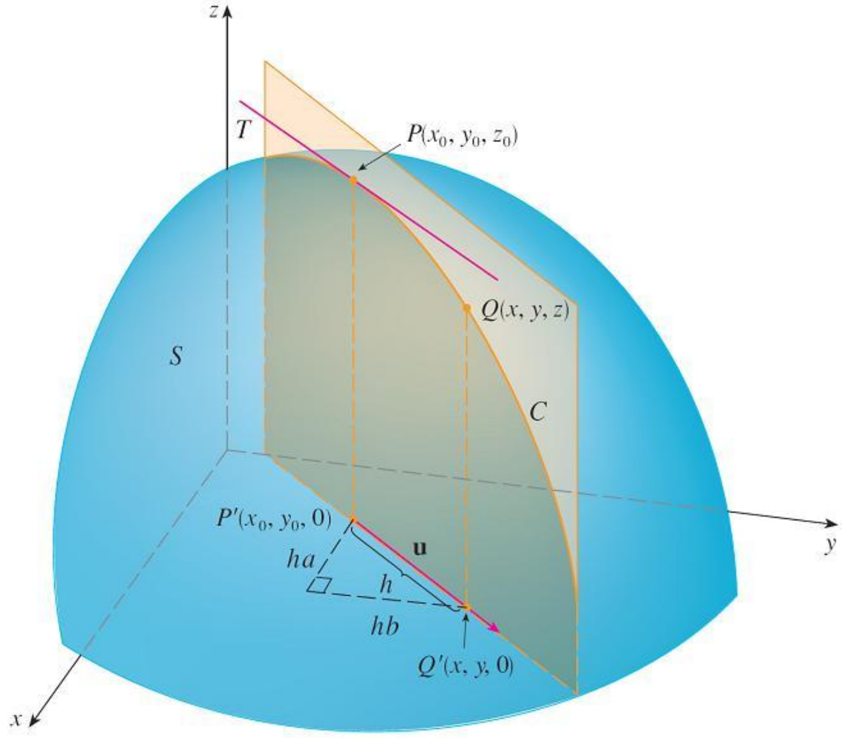


Figura 3

Derivadas Direcionais

A inclinação da reta tangente T a C em P é a taxa de variação de z na direção de **u**. Se $Q(x, y, z)$ é outro ponto em C e P', Q' são as projeções de P, Q sobre o plano xy, então o vetor $\overrightarrow{P'Q'}$ é paralelo a **u** e, portanto

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

Para alguma escalar h. Logo, $x - x_0 = ha$, $y - y_0 = hb$, portanto, $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, e

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Derivadas Direcionais

Se tomarmos o limite quando $h \to 0$, obteremos a taxa de variação de z na direção de **u**, que é chamada derivada direcional de f na direção de **u**.

2 Definição A derivada direcionada de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ é

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esse limite existir.

Comparando a Definição 2 com as Equações $\boxed{1}$, vemos que, se $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, então $D_{\mathbf{i}} f = f_x$ e se $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, então $D_{\mathbf{j}} f = f_y$. Em outras palavras as derivadas parciais de f relacionada a x e y são apenas casos especiais da derivada direcional.

Derivadas Direcionais

Quando calculamos a derivada direcional de uma função definida por uma fórmula, geralmente usamos o seguinte teorema.

$\boxed{3}$ **Teorema** Se f é uma função diferenciável de x e y, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ e

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Derivadas Direcionais

Se o vetor unitário **u** faz um ângulo θ com o eixo x positivo (como na Figura 2), então podemos escrever

$\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \text{sen}\,\theta \rangle$ e a fórmula do Teorema 3 fica

$$\boxed{6} \qquad D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\,\text{sen}\,\theta$$

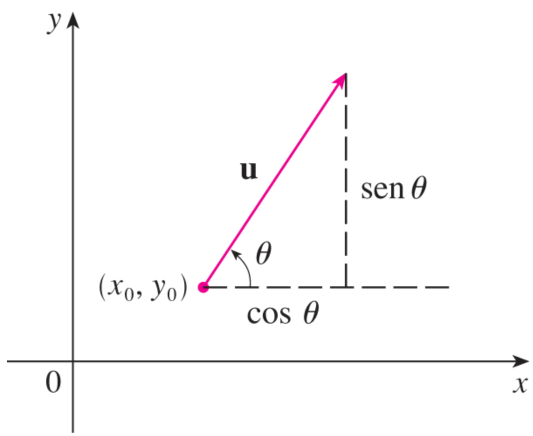


Figura 2

Um vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle = \langle \cos\theta, \text{sen}\,\theta \rangle$

O Vetor Gradiente

Os Vetores Gradientes

Observe no Teorema 3 que a derivada direcional de uma função diferenciável pode ser escrita como o produto escalar de dois vetores:

$$\boxed{7} \qquad \begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= f_x(x, y)a + f_y(x, y)b \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \langle a, b \rangle \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

O primeiro vetor no produto escalar ocorre não somente no cômputo da derivada direcional, mas também em muitas outras situações. Assim, daremos a ele um nome especial (o *gradiente* de f) e uma notação especial (**grad** f ou ∇f, que lemos "del f").

Os Vetores Gradientes

$\boxed{8}$ **Definição** Se f é uma função de duas variáveis x e y, então o **gradiente** de f é a função vetorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j}$$

Exemplo 3

Se $f(x, y) = \text{sen } x + e^{xy}$, então

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$$

e $$\nabla f(0, 1) = \langle 2, 0 \rangle$$

Como essa notação de vetor gradiente, podemos reescrever a Equação 7 para a derivada direcional de uma função diferenciável como

9 $$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}}$$

Os Vetores Gradientes

Isso expressa a derivada direcional na direção de **u** como a projeção escalar do vetor gradiente em **u**.

Funções de Três Variáveis

Funções de Três Variáveis

Para as funções de três variáveis podemos definir derivadas direcionais de maneiraodo semelhante. Novamente $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$ pode ser interpretado como a taxa de variação da função na direção de um vetor unitário **u**.

$\boxed{10}$ **Definição** A **derivada direcionada** de f em (x_0, y_0, z_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ é

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

se esse limite existir.

Funções de Três Variáveis

Se usarmos notação vetorial, podemos escrever tanto a definição (2) quanto a (10) da derivada direcional na forma compacta

11
$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}}$$

onde $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ se $n = 2$ e $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ se $n = 3$. Isso era esperado, porque a equação vetorial da reta que passa por $\mathbf{x}_0$ na direção do vetor $\mathbf{u}$ é dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{u}$, e, portanto, $f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u})$ representa o valor de f em um ponto dessa reta.

Funções de Três Variáveis

Se $f(x, y, z)$ for diferenciável e $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$, então

$$\boxed{12} \quad D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = f_x(x, y, z)a + f_y(x, y, z)b + f_z(x, y, z)c$$

Para uma função f de três variáveis, o **vetor gradiente**, denotado por ∇f ou **grad** f, é

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle$$

ou, de modo mais abreviado,

$$\boxed{13} \quad \boxed{\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}}$$

Funções de Três Variáveis

Então, como para as funções de duas variáveis, a Fórmula 12 para a derivada direcional pode ser reescrita como

14

$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}}$$

Exemplo 5

Se $f(x, y, z) = x \text{ sen } yz$, (a) determine o gradiente de f e (b) determine a derivada direcional de f em (1, 3, 0) na direção de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

SOLUÇÃO:

(a) O gradiente de f é

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\rangle$$

$$= \langle \text{sen } yz, xz \cos yz, xy \cos yz \rangle$$

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

(b) No ponto (1, 3, 0) temos $\nabla f(1, 3, 0) = \langle 0, 0, 3 \rangle$. O vetor unitário na direção de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$ é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{k}$$

Portanto, a Equação 14, vem

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 3, 0) = \nabla f(1, 3, 0) \cdot \mathbf{u}$$

$$= 3\mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{k} \right)$$

$$= 3\left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Maximizando a Derivada Direcional

Maximizando a Derivada Direcional

Suponha que tenhamos uma função *f* de duas ou três variáveis e consideramos todas as derivadas direcionais possíveis de *f* em um ponto determinado. Isso nos dará a taxa de variação de *f* em todas as direções possíveis. Podemos então perguntar: em qual dessas direções *f* varia mais rapidamente e qual a taxa máxima de variação? A resposta é dada pelo seguinte teorema.

15 Teorema Suponha que f seja uma função diferenciável de duas ou três variáveis. O valor máximo da derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ é $|\nabla f(\mathbf{x})|$ ocorre quando $\mathbf{u}$ tem a mesma direção do vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

Exemplo 6

(a) Se $f(x, y) = xe^y$, determine a taxa de variação de f no ponto $P(2, 0)$ na direção de P a $Q\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

(b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação?

SOLUÇÃO:

(a) Primeiro calcularemos o vetor gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e^y, xe^y \rangle$$

$$\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$$

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

O vetor unitário na direção de $\overrightarrow{PQ} = \langle -1{,}5, 2 \rangle$ é $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$, logo a taxa de variação de f na direção que vai de P a Q é

$$D_{\mathbf{u}} f(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle \cdot \left\langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5} \right\rangle$$

$$= 1\left(-\tfrac{3}{5}\right) + 2\left(\tfrac{4}{5}\right) = 1$$

(b) De acordo com o Teorema 15, f aumenta mais depressa na direção do gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$. A taxa máxima de variação é

$$|\nabla f(2, 0)| = |\langle 1, 2 \rangle| = \sqrt{5}$$

Planos Tangente às Superfícies de Nível

Planos Tangente às Superfícies de Nível

Suponha S, que é a superfície com a equação $F(x, y, z) = k$, ou seja, é uma superfície de nível de uma função F de três variáveis, e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto em S. Seja C qualquer curva na superfície S e passa pelo ponto P. Lembremo-nos que a curva C é descrita por uma função vetorial contínua $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$. Seja t_0 o valor do parâmetro correspondente ao ponto P; ou é, $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$. Como C pertence a S, qualquer ponto $(x(t), y(t), z(t))$ precisa satisfazer a equação de S, ou seja,

$$\boxed{16} \qquad F(x(t), y(t), z(t)) = k$$

Planos Tangente às Superfícies de Nível

Se x, y e z são funções diferenciáveis de t e F também diferenciável, então podemos usar a Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da Equação 16 como segue:

$$\boxed{17} \qquad \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Mas, já que $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z \rangle$ e $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$, a Equação 17 pode ser escrita em termos de produto notável como

$$\nabla F \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

Planos Tangente às Superfícies de Nível

Em particular, quando $t = t_0$ temos $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, e assim

$$\boxed{18} \qquad \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$

A Equação 18 nos diz que *o vetor gradiente em P*, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, *é perpendicular ao vetor tangente* $\mathbf{r}'(t_0)$ *a qualquer curva C em S que passe por P*. (Veja a Figura 9.)

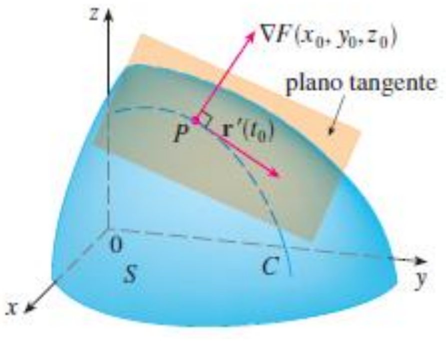


Figura 9

Planos Tangente às Superfícies de Nível

Se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, é natural definir o **plano tangente à superfície de nível** $F(x, y, z) = k$ **em** $P(x_0, y_0, z_0)$ como o plano que passa por P e tem vetor normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

Utilizando a equação geral do plano, podemos escrever a equação do plano tangente quando como]

$$\boxed{19} \quad F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Planos Tangente às Superfícies de Nível

A **reta normal** a S em P é a reta que passando de P e perpendicular ao plano tangente. A direção da reta normal é, portanto, dada pelo vetor gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ e, assim, suas equações simétricas são

$$\boxed{20} \qquad \frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

No caso especial em que a equação de uma superfície S é da forma $z = f(x, y)$ (ou seja, S é o gráfico de uma função f de duas variáveis), podemos reescrever a equação como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

Planos Tangente às Superfícies de Nível

e considerar S uma superfície de nível (com $k = 0$) de F. Então

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)$$
$$F_y(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0)$$
$$F_z(x_0, y_0, z_0) = -1$$

De modo que a Equação 19 se torna

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Exemplo 8

Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto (–2, 1, –3) ao elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

SOLUÇÃO: O elipsoide é a superfície de nível (com *k* = 3) da função

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

Exemplo 8 – *Solução*

continuação

Portanto, temos

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2} \qquad F_y(x, y, z) = 2y \qquad F_z(x, y, z) = \frac{2z}{9}$$

$$F_x(-2, 1, -3) = -1 \quad F_y(-2, 1, -3) = 2 \quad F_z(-2, 1, -3) = -\frac{2}{3}$$

Então, da Equação 1,9 temos que a equação do plano tangente em (–2, 1, –3) é

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \frac{2}{3}(z + 3) = 0$$

que pode ser simplificada para $3x - 6y + 2z + 18 = 0$.

Pela Equação 20, as equações simétricas da reta normal são

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-\frac{2}{3}}$$

Importância do Vetor Gradiente

Importância do Vetor Gradiente

Vamos resumir agora as maneiras pelas quais o vetor gradiente é importante. Primeiro, consideramos uma função *f* de três variáveis e um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ em seu domínio. Por um lado, sabemos do Teorema 15 que o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ dá a direção de um aumento mais rápido de *f*. Por outro, sabemos que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal à superfície de nível *S* de *f* por *P*. (Consulte a Figura 9.)

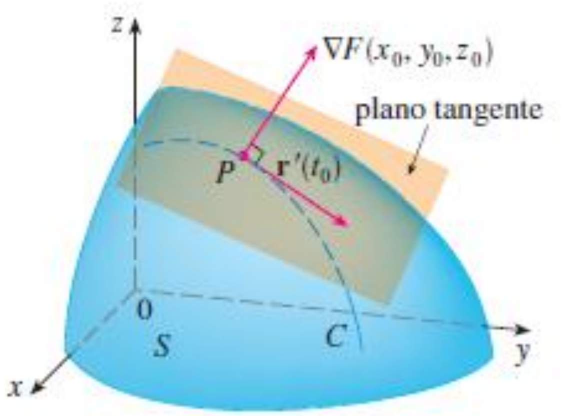


Figura 9

Importância do Vetor Gradiente

Essas duas propriedades são compatíveis intuitivamente porque, quando nos afastamos de *P* em uma superfície de nível *S*, o valor da função *f* não se altera. Parece razoável que, se nos movermos em uma direção perpendicular, obteremos o maior aumento.

De maneira semelhante, consideramos uma função *f* de duas variáveis e um ponto $P(x_0, y_0)$ em seu domínio. Novamente, o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ dá a direção de um aumento mais rápido de *f*. Da mesma forma, pelas considerações semelhantes à nossa discussão dos planos tangente, pode ser mostrado que $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular à curva do nível $f(x, y) = k$ que passa por *P*.

Importância do Vetor Gradiente

Mais uma vez, isso é intuitivamente plausível porque os valores de *f* continuam constantes à medida que movemos ao longo da curva. (Veja a Figura 11.)

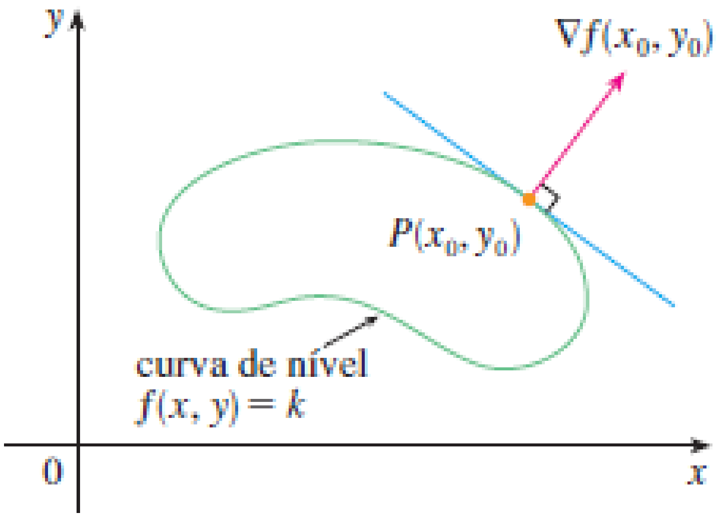


Figura 11

Importância do Vetor Gradiente

Se considerarmos um mapa topográfico de um morro e se $f(x, y)$ representar a altura acima do nível do mar do ponto de coordenadas (x, y), então a curva de aclive máximo pode ser desenhada na Figura 12, fazendo-a perpendicular a todas as curvas de contorno.

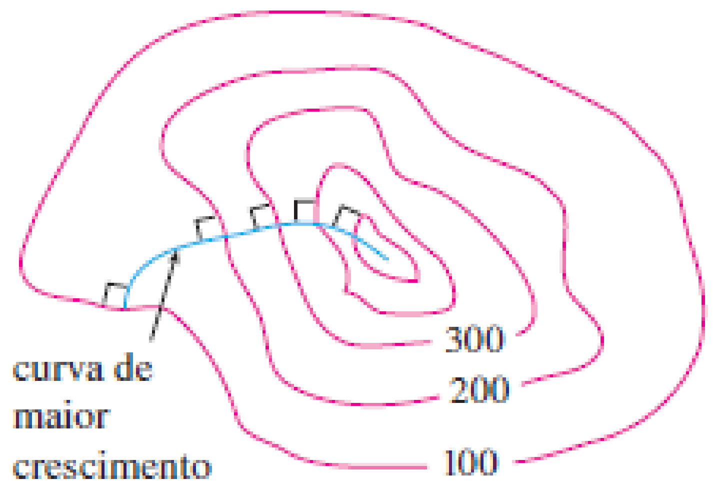


Figura 12

Importância do Vetor Gradiente

Os sistemas de computação algébrica têm comandos que traçam vetores gradientes. Cada vetor gradiente $\nabla f(a, b)$ é traçado do ponto (a, b). A Figura 13 mostra esse gráfico (chamado *campo vetorial gradiente*) para a função $f(x, y) = x^2 - y^2$ superimposto em um mapa de contorno de f. Como esperado, os vetores gradientes apontam "ladeira acima" e são perpendiculares às curvas de nível.

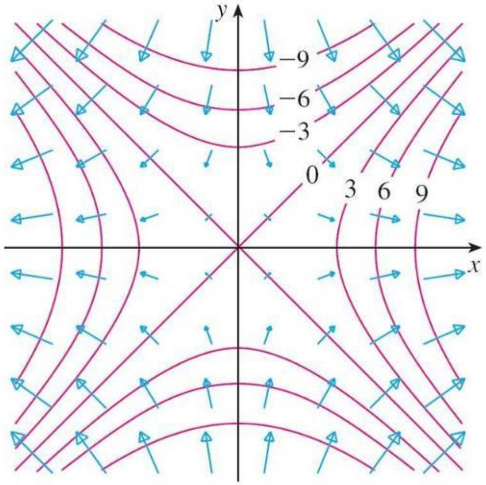


Figura 13