13.3 COMPRIMENTO DE ARCO E CURVATURA

Revisão técnica: Ricardo Miranda Martins – IMECC – Unicamp

1-3 Determine o comprimento da curva dada.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, 3 \operatorname{sen} t, 3 \operatorname{cotg} t \rangle, \quad a \leq t \leq b$

2. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t \rangle, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

3. $\mathbf{r}(t) = 6t\,\mathbf{i} + 3\sqrt{2}t^2\,\mathbf{j} + 2t^3\,\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

4. $x = 2t,\ y = t^2,\ z = t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$

5. $x = t \cos t,\ y = t \operatorname{sen} t,\ z = t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

6-8 Reparametrize a curva com relação ao comprimento de arco medido a partir do ponto onde $t = 0$ na direção crescente de t.

6. $\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j}$

7. $\mathbf{r}(t) = (1 + 2t)\,\mathbf{i} + (3 + t)\,\mathbf{j} - 5t\,\mathbf{k}$

8. $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

9-14

(a) Determine os vetores tangente e normal unitários $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$.

(b) Utilize a Fórmula 9 para encontrar a curvatura.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} 4t, 3t, \cos 4t \rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle 6t, 3\sqrt{2}t^2, 2t^3 \rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{2} \cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t \rangle$

12. $\mathbf{r}(t) = \langle \frac{1}{3}t^3, t^2, 2t \rangle$

13. $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{2}t, e^t, e^{-t} \rangle$

14. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 2t^3/3, t \rangle$

15-19 Utilize o Teorema 10 para encontrar a curvatura.

15. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$

16. $\mathbf{r}(t) = (1 + t)\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}$

17. $\mathbf{r}(t) = 2t^3\,\mathbf{i} - 3t^2\,\mathbf{j} + 6t\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 2)\mathbf{i} + (t^2 - 4t)\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$

19. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$

20. Encontre a curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{2}t, e^t, e^{-t} \rangle$ no ponto $(0, 1, 1)$.

21-23 Use a Fórmula 11 para encontrar a curvatura.

21. $y = \sqrt{x}$

22. $y = \operatorname{sen} x$

23. $y = \ln x$

24-25 Use a fórmula

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

onde os pontos indicam derivadas a respeito de t (veja o Exercício 36 no texto) para encontrar a curvatura da curva paramétrica.

24. $x = t^3, \quad y = t^2$

25. $x = t \operatorname{sen} t, \quad y = t \cos t$