

# 13

## Funções Vetoriais

# 13.1

## Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

---

# Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

Em geral, uma função é uma regra que associa a cada elemento de seu domínio um elemento de sua imagem.

Uma **função vetorial**, ou **função a valores vetoriais**, é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. Estamos particularmente interessados em funções  $\mathbf{r}$  cujos valores são tridimensionais. Isso significa que, para todo número  $t$  no domínio de  $\mathbf{r}$  existe um único vetor de  $V_3$  denotado por  $\mathbf{r}(t)$ . Se  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $h(t)$  são as componentes do vetor  $\mathbf{r}(t)$ , então  $f$ ,  $g$  e  $h$  são funções a valores reais chamadas **funções componentes** de  $\mathbf{r}$  e podemos escrevemos

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

# Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

Se  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $h(t)$  são as componentes do vetor  $\mathbf{r}(t)$ , então  $f$ ,  $g$  e  $h$  são funções a valores reais chamadas **funções componentes** de  $\mathbf{r}$  e podemos escrevemos

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Usamos a letra  $t$  para denotar a variável independente porque ela representa o tempo na maioria das aplicações de funções vetoriais.

## Exemplo 1 – Domínio da função vetorial

Se

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^3, \ln(3 - t), \sqrt{t} \rangle$$

então, as funções componentes são

$$f(t) = t^3 \quad g(t) = \ln(3 - t) \quad h(t) = \sqrt{t}$$

Pela convenção usual, o domínio de  $\mathbf{r}$  constituído por todos os valores de  $t$  para os quais a expressão  $\mathbf{r}(t)$  está definida.

As expressões  $t^3$ ,  $\ln(3 - t)$  e  $\sqrt{t}$  são definidas quando  $3 - t > 0$  e  $t \geq 0$ . Portanto, o domínio de  $\mathbf{r}$  é o intervalo  $[0, 3)$ .

# Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

O **limite** de uma função vetorial  $\mathbf{r}$  é definido tomando-se os limites de suas funções componentes como a seguir.

**1** Se  $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ , então

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right\rangle$$

desde que os limites das funções componentes existam.

Os limites de funções vetoriais obedecem às mesmas regras que os limites de funções reais.

# Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

Uma função vetorial  $\mathbf{r}$  é **contínua em  $a$**  se

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

Em vista da Definição 1, vemos que  $\mathbf{r}$  é contínua em  $a$  se e somente se suas funções componentes  $f$ ,  $g$  e  $h$  são contínuas em  $a$ .

As curvas espaciais e as funções vetoriais contínuas estão intimamente relacionadas. Suponha que  $f$ ,  $g$  e  $h$  sejam funções reais contínuas em um intervalo  $I$ .

# Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

Em seguida, o conjunto  $C$  de todos os pontos  $(x, y, z)$  no espaço, onde

$$\boxed{2} \quad x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t)$$

e  $t$  varia no intervalo  $I$ , é chamado **curva espacial**.

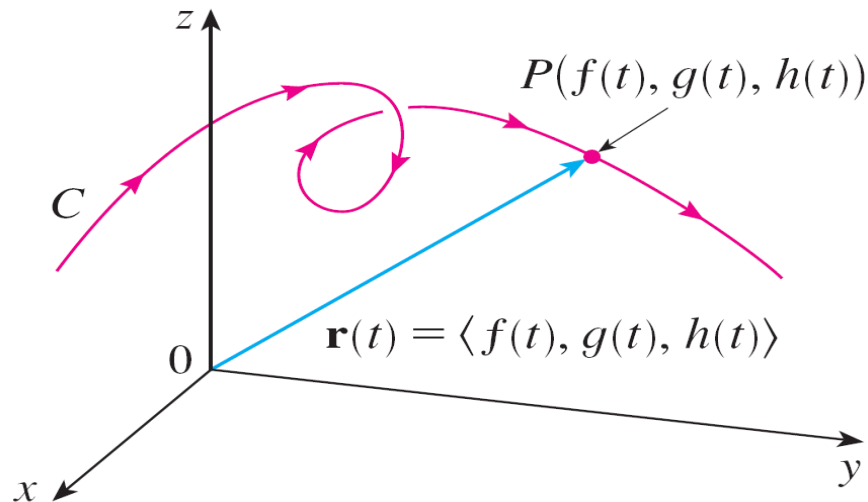
As equações em  $\boxed{2}$  são denominadas **equações paramétricas de  $C$**  e  $t$  é conhecido como **parâmetro**.

Podemos pensar em  $C$  como tendo sido traçada pelo movimento de uma partícula cuja posição no instante  $t$  é  $(f(t), g(t), h(t))$ . Se considerarmos agora a função vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ , então  $\mathbf{r}(t)$  é o vetor posição do ponto  $P(f(t), g(t), h(t))$  em  $C$ .



# Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

Assim, qualquer função de vetor contínuo  $\mathbf{r}$  define uma curva espacial  $C$  que é traçada pela ponta do vetor em movimento  $\mathbf{r}(t)$ , como mostrado na Figura 1.



$C$  é traçada pelo movimento da ponta do vetor de posição  $\mathbf{r}(t)$ .

Figura 1

## Exemplo 4 – *Esboce uma hélice*

Esboce a curva cuja equação vetorial é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

**SOLUÇÃO:** As equações paramétricas para essa curva são

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = t$$

Uma vez que  $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ , a curva deve situar-se no cilindro circular  $x^2 + y^2 = 1$ . O ponto de  $(x, y, z)$  está diretamente acima do ponto de  $(x, y, 0)$ , que se move para a esquerda em torno do círculo  $x^2 + y^2 = 1$  no plano  $xy$ .

# Exemplo 4 – Solução

continuação

(A projeção da curva sobre o  $xy$  plano têm equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, 0 \rangle$ .) Como  $z = t$  a curva gira para cima ao redor do cilindro quando  $t$  aumenta. A curva, mostrada na Figura 2, é chamada **hélice**.

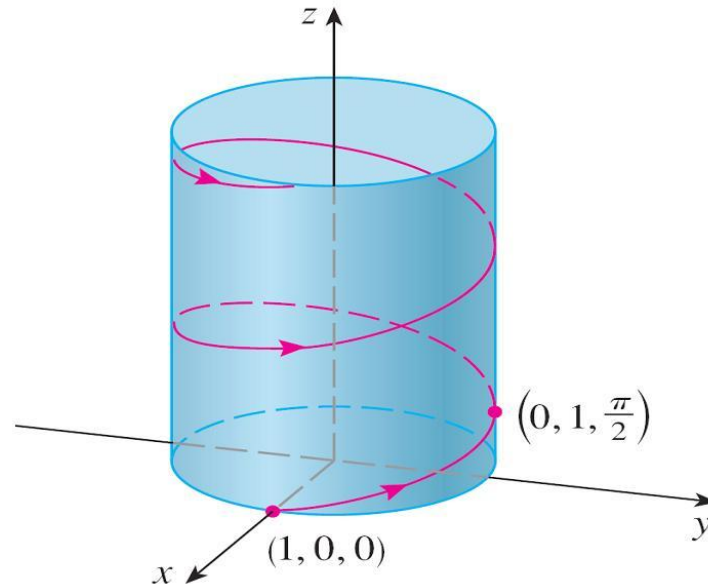


Figura 2

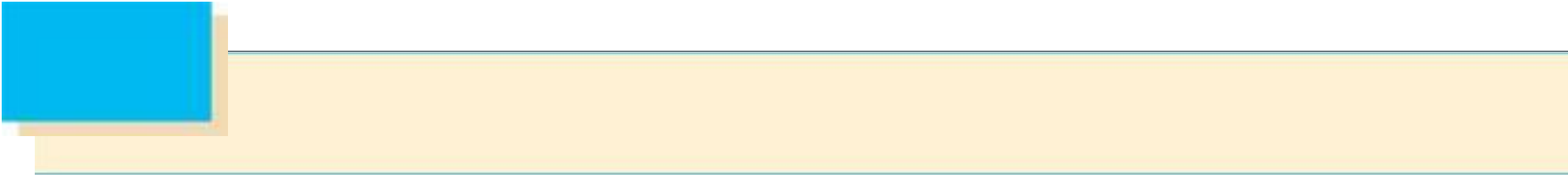
# Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

A forma de saca-rolha da hélice circular do Exemplo 4 é a mesma das molas. Elas também aparecem no modelo do DNA (ácido desoxirribonucleico, material genético de células vivas). Em 1953 James Watson e Francis Crick mostraram que a estrutura da molécula de DNA é de duas hélices, circulares paralelas interligadas, como na Figura 3.



Uma hélice dupla

Figura 3

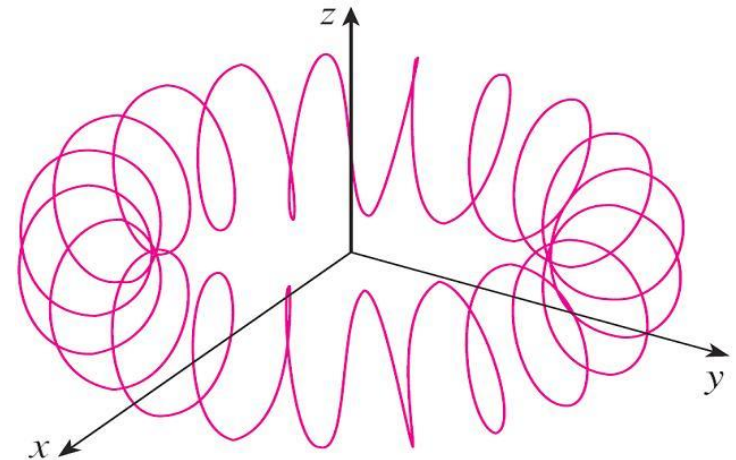


# Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

# Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

As curvas espaciais são inerentemente mais difíceis de desenhar que as curvas planas. Para uma representação mais precisa precisamos utilizar a tecnologia. Por exemplo, a Figura 7 mostra o gráfico gerado por computador da curva com equações paramétricas

$$\begin{aligned}x &= (4 + \sin 20t) \cos t \\y &= (4 + \sin 20t) \sin t \\z &= \cos 20t\end{aligned}$$



Espiral toroidal

Figura 7

Essa curva é denominada **espiral toroidal**, pois está sobre um toro.

# Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

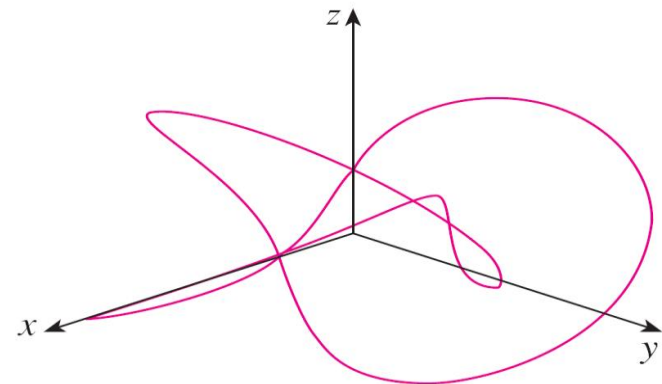
Outra curva interessante, o **nó de trevo ou trifólio**, com equações

$$x = (2 + \cos 1,5t) \cos t$$

$$y = (2 + \cos 1,5t) \operatorname{sen} t$$

$$z = \operatorname{sen} 1,5t$$

está ilustrada na Figura 8. Seria muito difícil traçar qualquer uma dessas curvas à mão.



Nó de trevo

Figura 8

# Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

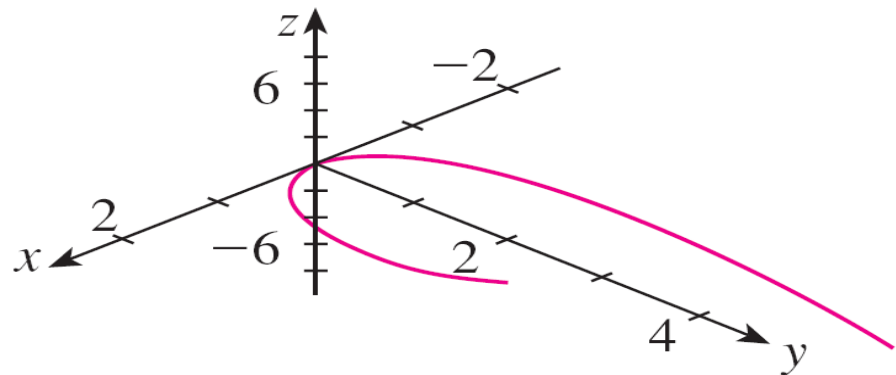
Mesmo com o auxílio de computador no desenho de curvas espaciais, as ilusões ópticas tornam difícil entender a forma real da curva. (Isso é especialmente verdadeiro para a Figura 8.) O exemplo seguinte mostra como lidar com este problema.



# Exemplo 7

Utilize um computador para traçar a curva com equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ . Essa curva é chamada **cúbica retorcida**.

**SOLUÇÃO:** Começaremos traçando, com o auxílio do computador, a curva com equações paramétricas  $x = t, y = t^2, z = t^3$  para  $-2 \leq t \leq 2$ . O resultado é mostrado na Figura 9(a), mas é difícil ver a verdadeira natureza da curva através desse único gráfico.



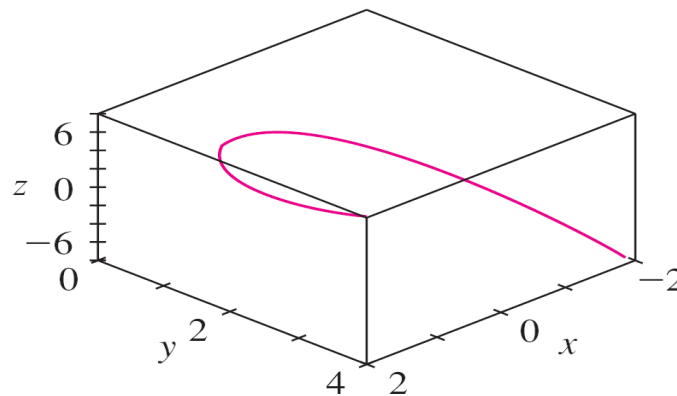
Vistas da cúbica torcida

Figura 9(a)

# Exemplo 7 – Solução

continuação

A maioria dos programas de computador para desenhar em três dimensões permite, em vez de utilizar os eixos coordenados, colocar uma caixa envolvendo a curva ou superfície. Quando olhamos a mesma curva na caixa na Figura 9(b), conseguimos visualizar melhor sua forma.



Vistas da cúbica torcida

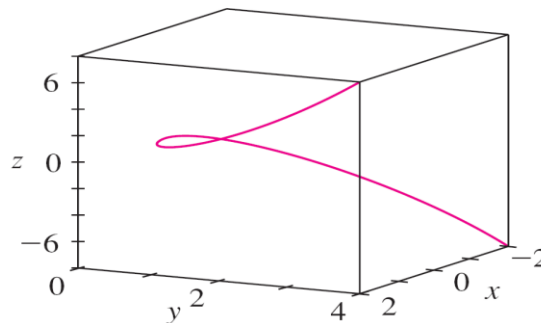
Figura 9(b)

# Exemplo 7 – Solução

continuação

Podemos ver que a curva se eleva do canto inferior da caixa para o canto superior mais próximo de nós, torcendo-se à medida que sobe.

Temos uma ideia melhor da curva quando a observamos de diversos ângulos. A Figura 9(c) apresenta o resultado da rotação da caixa para fornecer outro ponto de vista.



Vistas da cúbica torcida

Figura 9(c)

# Exemplo 7 – Solução

continuação

As partes 9(d), 9(e) e 9(f) mostram o que vemos quando olhamos diretamente através de uma face da caixa.

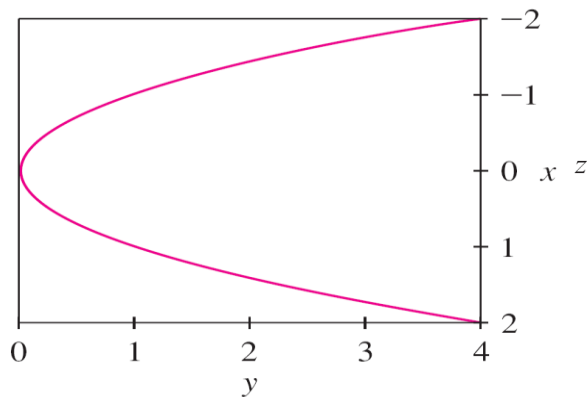


Figura 9(d)

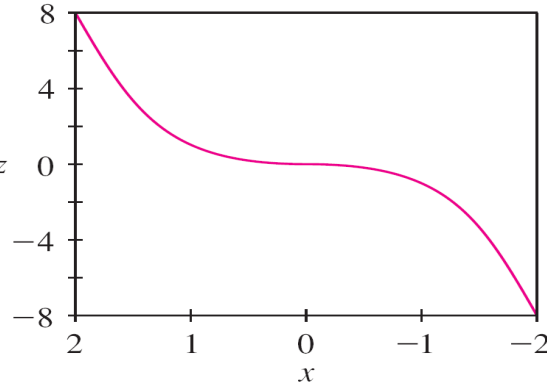


Figura 9(e)

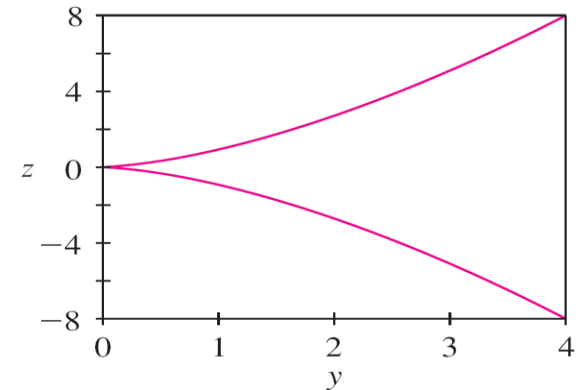


Figura 9(f)

Vistas da cúbica torcida

Em particular, a parte 9(d) mostra a vista de cima da caixa.

# Exemplo 7 – Solução

continuação

A curva obtida é a projeção da curva no plano  $xy$ , a parábola  $y = x^2$ . A parte 9(e) exhibe a projeção no plano  $xz$  a curva cúbica  $z = x^3$ . Fica claro o porquê de essa curva ser chamada cúbica retorcida.

# Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

Outra maneira de visualizar uma curva espacial é desenhá-la em uma superfície. Por exemplo, a cúbica retorcida do Exemplo 7 está no cilindro parabólico  $y = x^2$ . (Elimine o parâmetro das duas primeiras equações paramétricas,  $x = t$  e  $y = t^2$ .) A Figura 10 mostra o cilindro e a cúbica retorcida sobrepostos, tornando mais fácil enxergar que a curva caminha da origem para cima, sobre o cilindro.

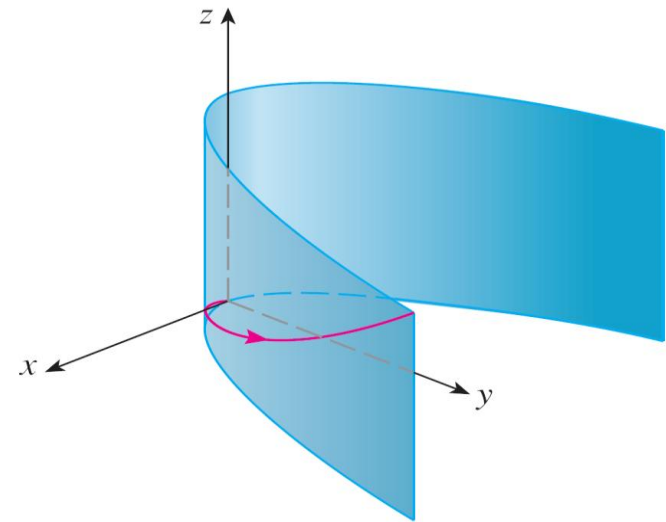


Figura 10

# Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

Usamos essa mesma técnica no Exemplo 4 para visualizar a hélice circular.

Um terceiro processo de visualização para a cúbica retorcida é constatar que a curva também está contida na superfície cilíndrica  $z = x^3$ . Então podemos ver a curva como a intersecção das duas superfícies cilíndricas  $y = x^2$  e  $z = x^3$ . (Veja a Figura 11.)

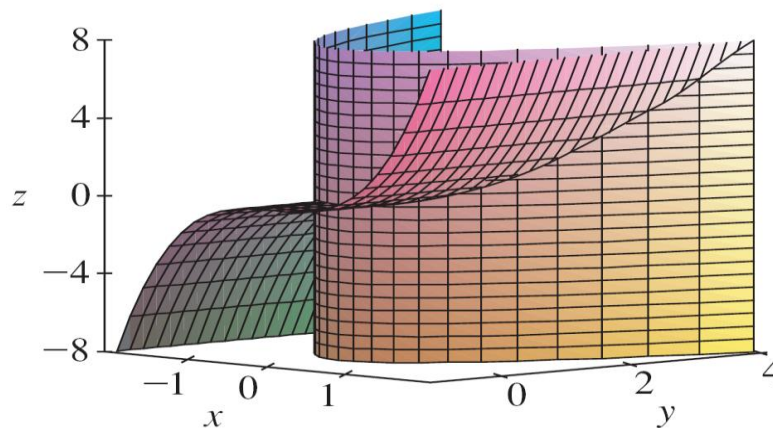


Figura 11

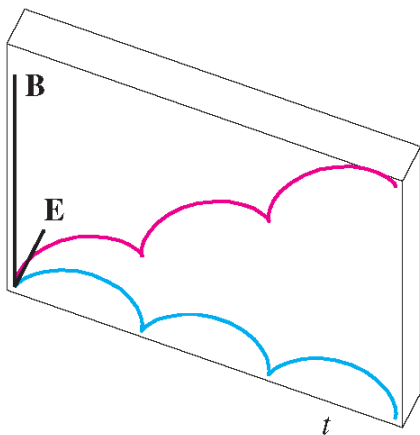
# Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

Vimos que uma curva espacial interessante, a hélice, aparece no modelo do DNA. Outro exemplo notável de uma curva espacial na ciência é a trajetória de uma partícula de carga positiva em campos elétricos e magnéticos ortogonalmente orientados **E** e **B**.

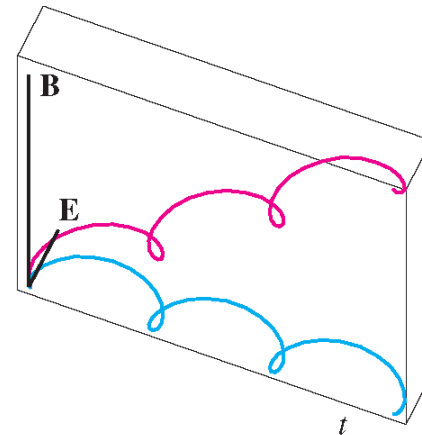


# Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

Dependendo da velocidade inicial dada à partícula na origem, a trajetória da partícula ou é uma curva espacial, cuja projeção sobre o plano horizontal é a cicloide [Figura 12(a)], ou é uma curva cuja projeção é a trocoide [Figura 12(b)].



(a)  $\mathbf{r}(t) = \langle t - \sin t, 1 - \cos t, t \rangle$



(b)  $\mathbf{r}(t) = \langle t - \frac{3}{2} \sin t, 1 - \frac{3}{2} \cos t, t \rangle$

Movimento de partícula carregada em campos elétrico e magnético orientados ortogonalmente

Figura 12