10

Equações Paramétricas e Coordenadas Polares

10.2

Cálculo com Curvas Parametrizadas

Tangentes

Tangentes

Suponha que *f* e *g* sejam funções deriváveis e queremos encontrar a reta tangente a um ponto na curva *x* = *f(t)* e *y* = *g(t)* onde *y* também é uma função deriváveis de *x*. A Regra da Cadeia nos diz que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Tangentes

Se $dx/dt \neq 0$, podemos isolar dy/dx:

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \qquad \text{if} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

A Equação 1 nos permite encontrar a inclinação dy / dx da tangente para uma curva paramétrica sem ter que eliminar o parâmetro t.

Tangentes

Podemos ver de $\boxed{1}$ que a curva tem uma tangente horizontal quando $dy/dt = 0$ (desde que $dx/dt \neq 0$) tem uma tangente vertical quando $dx/dt = 0$ (desde que $dy/dt \neq 0$). Essa informação é útil para esboçar as curvas parametrizadas. Também é útil considerar d^2y/dx^2. Isso pode ser encontrado mudando y por dy/dx na Equação 1:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$$

Exemplo 1

Uma curva C é definida pelas equações paramétricas
$x = t^2$ e $y = t^3 - 3t$.

(a) Mostre que C tem duas tangentes no ponto (3, 0) e encontre suas equações.

(b) Encontre os pontos em C onde a tangente é horizontal ou vertical.

(c) Determine onde a curva sobe e desce e onde sua concavidade é para cima ou para baixo.

(d) Esboce a curva.

Exemplo 1 – *Solução*

(a) Perceba que $y = t^3 - 3t = t(t^2 - 3) = 0$ quando $t = 0$ ou $t = \pm\sqrt{3}$. Portanto, o ponto (3, 0) em C surge de dois valores do parâmetro, $t = \sqrt{3}$ e $t = -\sqrt{3}$. Isso indica que C intercepta a si própria em (3, 0). Uma vez que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 3}{2t} = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

a inclinação da tangente quando $t = \pm\sqrt{3}$ é $dy/dx = \pm 6/(2\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$; assim, as equações das tangentes em (3, 0) são

$$y = \sqrt{3}\,(x - 3) \qquad \text{e} \qquad y = -\sqrt{3}\,(x - 3)$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

(b) C tem uma tangente horizontal quando $dy/dx = 0$, isto é, quando $dy/dt = 0$ e $dx/dt \neq 0$. Uma vez que $dy/dt = 3t^2 - 3$, isso ocorre quando $t^2 = 1$, isto é, $t = \pm 1$. Os pontos correspondentes em C são (1, –2) e (1, 2). C tem uma tangente vertical quando $dx/dt = 2t = 0$, isto é, $t = 0$. (Observe que $dy/dt \neq 0$ ali). O ponto correspondente em C é (0, 0).

(c) Para determinar a concavidade, calculamos a segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{3}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)}{2t} = \frac{3(t^2 + 1)}{4t^3}$$

Então a concavidade da curva é para cima quando $t > 0$ e para baixo quando $t < 0$.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

(d) Usando as informações das partes (b) e (c), esboçamos *C* na Figura 1.

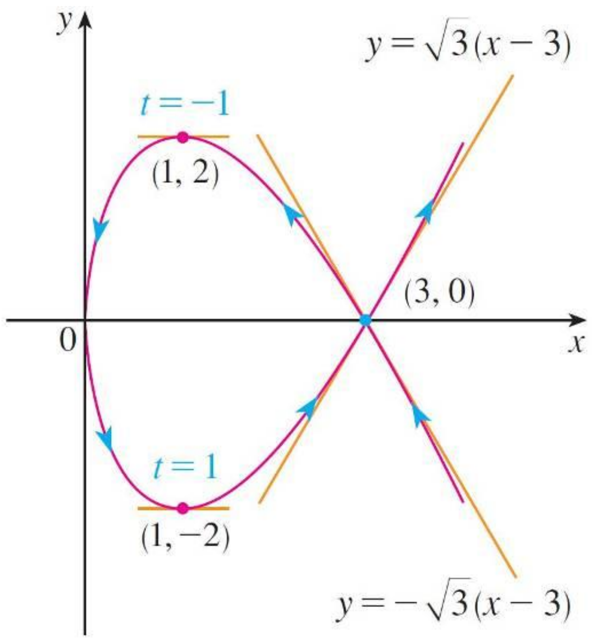

Figura 1

Áreas

Áreas

Sabemos que a área sob uma curva $y = F(x)$ de a até b é $A = \int_a^b F(x)\,dx$, em que $F(x) \geq 0$. Se a curva for dada por equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, então podemos deduzir uma fórmula de área pelo uso da Regra da Substituição para Integrais Definidas como a seguir:

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt \qquad \left[\text{or} \quad \int_\beta^\alpha g(t)f'(t)\,dt\right]$$

Exemplo 3

Encontre a área sob um arco da cicloide

$$x = r(\theta - \text{sen } \theta) \qquad y = r(1 - \cos \theta)$$

(Veja a Figura 3.)

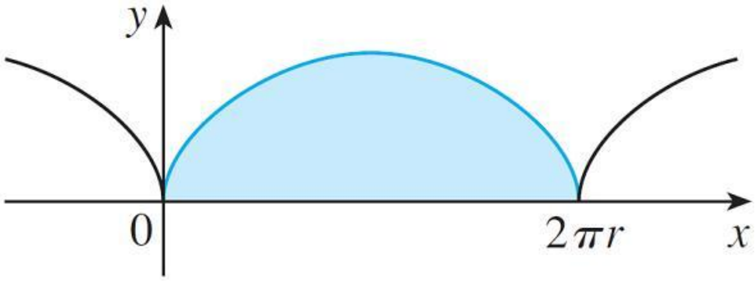

Figura 3

Exemplo 3 – *Solução*

Um arco da cicloide é dado por $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Usando a Regra da Substituição com $y = r(1 - \cos\theta)$ e $dx = r(1 - \cos\theta)d\theta$, temos

$$A = \int_0^{2\pi r} y\,dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos\theta)\, r(1 - \cos\theta)\,d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2\,d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] d\theta$$

$$= r^2 \left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= r^2\left(\tfrac{3}{2} \cdot 2\pi\right) = 3\pi r^2$$

Comprimento de Arco

Comprimento de Arco

Já sabemos como encontrar o comprimento L de uma curva C dada na forma $y = F(x)$, $a \leq x \leq b$. Se F' é contínuo, então

2

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Suponha que C também possa ser descrito por equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, em que $dx/dt = f'(t) > 0$. Isso significa que C é percorrida uma vez, da esquerda para a direita, quando t aumenta de α para β e $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$.

Comprimento de Arco

Colocando a Fórmula 1 na Fórmula 2 e usando a Regra da Substituição, obtemos

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2}\, \frac{dx}{dt}\, dt$$

Uma vez que *dx*/*dt* > 0, temos

3

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Comprimento de Arco

Mesmo que C não possa ser expressa na forma $y = F(x)$, a Fórmula 3 ainda é válida, mas a obtemos por aproximações poligonais. Dividimos o intervalo do parâmetro $[\alpha, \beta]$ em n subintervalos de comprimentos iguais Δt. Se $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ são as extremidades desses subintervalos, então $x_i = f(t_i)$ e $y_i = g(t_i)$ são as coordenadas de pontos$P_i(x_i, y_i)$ que estão em C e o polígono com vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$ aproxima de C.

Comprimento de Arco

(Veja a Figura 4.)

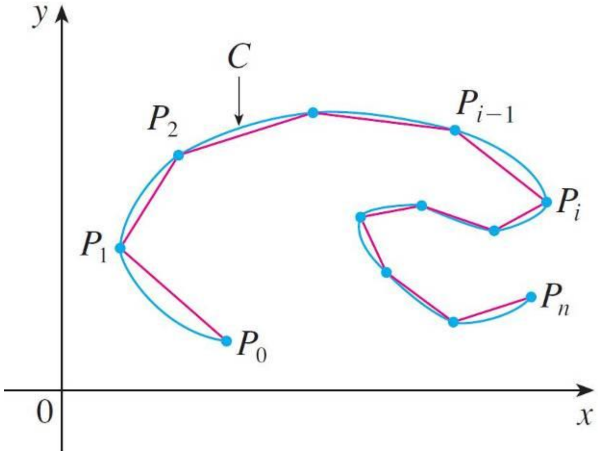

Figura 4

Definimos o comprimento *L* de *C* como o limite dos comprimentos dessas poligonais aproximadoras quando $n \to \infty$:

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

Comprimento de Arco

O Teorema do Valor Médio, quando aplicado a f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, fornece um número t_i^* em (t_{i-1}, t_i) tal que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i^*)\,(t_i - t_{i-1})$$

Agora $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, e esaa equação fica

$$\Delta x_i = f'(t_i^*)\,\Delta t$$

Analogamente, quando aplicado a g, o Teorema do Valor Médio fornece um número t_i^{**} em (t_{i-1}, t_i) de forma que

$$\Delta y_i = g'(t_i^{**})\,\Delta t$$

Comprimento de Arco

Portanto

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{[f'(t_i^*)\,\Delta t]^2 + [g'(t_i^{**})\,\Delta t]^2}$$

$$= \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\ \Delta t$$

e também

$$\boxed{4} \qquad L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\ \Delta t$$

Comprimento de Arco

A soma em $\boxed{4}$ se parece com a soma de Riemann da função $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$, contudo, não é exatamente uma soma de Riemann, porque em geral $t_i^* \neq t_i^{**}$. Mesmo assim, se f' e g' forem contínuas, pode ser mostrado que o limite em $\boxed{4}$ é o mesmo que se t_i^* e t_i^{**} fossem iguais; ou seja,

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Comprimento de Arco

Então, usando a notação de Leibniz, temos o seguinte resultado, que possui a mesma forma de 3.

$\boxed{5}$ **Teorema** Se uma curva C é descrita por equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, onde f' e g' são contínuas em $[\alpha, \beta]$ e C é transverso exatamente quando t aumenta de α até β, então o comprimento de C é

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Observe que a fórmula no Teorema 5 é consistente com as fórmulas gerais $L = \int ds$ e $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$.

Comprimento de Arco

Observe que a integral fornece o dobro do comprimento do arco do círculo, porque quando t aumenta de 0 até 2π, o ponto (sen $2t$, cos $2t$) percorre o círculo duas vezes. Em geral, ao encontrarmos o comprimento da curva C a partir de uma representação paramétrica, temos de tomar cuidado para ter a certeza de que C é percorrida apenas uma vez quando t aumenta de α até β.

Exemplo 5

Encontre o comprimento de um arco de uma cicloide
$x = r(\theta - \text{sen } \theta)$, $y = r(1 - \cos \theta)$.

SOLUÇÃO: Do Exemplo 3 vemos que um arco é descrito pelo intervalo paramétrico $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Uma vez que

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos \theta) \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{d\theta} = r \sin \theta$$

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

temos

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - \cos\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta)}\, d\theta$$

$$= r \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)}\, d\theta$$

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

Para calcular essa integral, usamos a identidade $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ com $\theta = 2x$, que fornece $1 - \cos\theta = 2\,\text{sen}^2(\theta/2)$. Com $0 \le \theta \le 2\pi$, obtemos $0 \le \theta/2 \le \pi$, logo, $\text{sen}(\theta/2) \ge 0$. Portanto

$$\sqrt{2(1 - \cos\theta)} = \sqrt{4\sin^2(\theta/2)} = 2\,|\sin(\theta/2)| = 2\sin(\theta/2)$$

e também

$$L = 2r\int_0^{2\pi} \sin(\theta/2)\,d\theta = 2r\Big[-2\cos(\theta/2)\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 2r[2 + 2]$$

Área de Superfície

Área de Superfície

Se a curva dada pelas equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, girar em torno do eixo x, onde f', g' são contínuas e $g(t) \geq 0$, então a área da superfície resultante é dada por

$$\boxed{6} \qquad S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

As fórmulas simbólicas gerais $S = \int 2\pi y\, ds$ e $S = \int 2\pi x\, ds$ ainda são válidas, mas para curvas paramétricas usamos

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Exemplo 6

Mostre que a área da superfície de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$.

SOLUÇÃO: A esfera é obtida pela rotação do semicírculo

$$x = r \cos t \qquad y = r \operatorname{sen} t \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

sobre o eixo x. Portanto, da Fórmula 6, temos

$$S = \int_0^\pi 2\pi r \sin t \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2}\, dt$$

$$= 2\pi \int_0^\pi r \sin t \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}\, dt = 2\pi \int_0^\pi r \sin t \cdot r\, dt$$

$$= 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin t\, dt = 2\pi r^2(-\cos t)\Big]_0^\pi = 4\pi r^2$$