Microeconomia II

4^a Lista de Exercícios

Prof. Bruno Cesar Aurichio Ledo

Capítulos 28 e 29

1. **Considere o seguinte jogo:**

		Jogador 2	
		L	**R**
Jogador 1	**U**	**(3,2)**	**(B,0)**
	D	**(2,A)**	**($\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$)**

   Para quais valores de A e B:

   (a) O perfil de estratégias estratégia $\{U, L\}$ será um equilíbrio em estratégias dominantes.

   Para o Jogador 1, U será dominante se B for maior que $\frac{1}{2}$. L será dominante para o jogador 2 se A for maior que $\frac{1}{2}$.

   (b) Existirá somente um equilíbrio de nash em estratégias puras

   Note que UL é Equilíbrio de Nash independente dos valores de A e B, ou seja se Jogador 1 jogar U o Jogador 2 escolhe L e se o Jogador 2 jogar L o Jogador 1 escolhe U. Assim, para que não haja outro equilíbrio de Nash A e B devem ser maiores que $\frac{1}{2}$

   (c) Existirá dois equilíbrios de nash em estratégias puras

   Note que UL é Equilíbrio de Nash independente dos valores de A e B, ou seja se Jogador 1 jogar U o Jogador 2 escolhe L e se o Jogador 2 jogar L o Jogador 1 escolhe U. Assim, haja outro equilíbrio de Nash A e B devem ser menores que $\frac{1}{2}$

2. **Duas empresas atuam no mercado de chocolate e podem optar por produzir chocolate de alta qualidade (A) ou de baixa qualidade (B). Os lucros resultantes de cada estratégia encontram-se apresentados na matriz abaixo (em cada célula, o lucro da esquerda é o da Empresa I e o da direita da Empresa II).**

		Empresa II	
		B	**A**
Empresa I	**B**	**-20,-30**	**900,600**
	A	**100,800**	**50,50**

(a) Quais estratégias são equilíbrios de Nash?

- Se II joga B, I escolhe A
- Se II joga A, I escolhe B
- Se I joga B, II escolhe A
- Se I joga A, II escolhe B

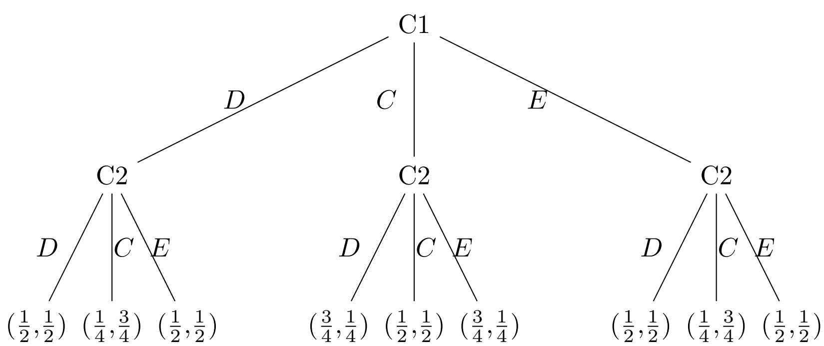
		Empresa II	
		B	A
Empresa I	B	-20,-30	900,600
	A	100,800	50,50

$\therefore$ Existem dois equilíbrios de Nash, AB e BA.

(b) Qual seria a estratégia cooperativa, ou seja, aquele que maximiza o lucro conjunto das empresas? Qual das empresas teria maior benefício em decorrência dessa estratégia? Quanto esta empresa estaria disposta a oferecer a sua rival para persuadi-la a entrar em conluio?

Se fosse possível cooperação teríamos (B,A)=(900,600). A empresa I teria o maior payoff possível. Esta empresa estaria disposta a oferecer entre [200, 800), o que dependeria do poder de barganha de cada uma das empresas. Se a empresa I tem maior poder de barganha, ela daria aproximadamente 200 para a firma II, se a firma II tivesse um grande poder de barganha receberia aproximadamente 800.

3. **Considere o seguinte jogo sequencial: Dois comerciantes, C1 e C2 tem que decidir sua localização numa rua. C1 decide inicialmente se ficará à direita, ao centro ou à esquerda da rua e na sequencia C2 decide sua localização dentre as mesmas opções. Os payoffs, dados pela parcela de consumidores que cada comerciante retem, dada sua localização são indicados na representação extensiva abaixo.**



(a) Qual o equilíbrio de Nash desse Jogo?

Para encontrar o equilíbrio devemos resolver o jogo de trás para frente. Note que C2 sempre escolherá se posicionar ao centro da praia, independente da escolha de C1. Assim, a estratégia de C1 que lhe dará o melho retorno, dado as preferências de C2, será C. Portanto, em equilíbrio os dois comerciantes se localizam no centro da rua e dividem os consumidores igualmente.

(b) Se o jogo fosse jogado simulâneamente, qual seria o equilíbri de Nash? (Dica: Desenhe o jogo na forma normal)

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & C2 & \\
 & & \text{D} & \text{C} & \text{E} \\
 & \text{D} & \frac{1}{2},\frac{1}{2} & \frac{1}{4},\underline{\frac{3}{4}} & \frac{1}{2},\frac{1}{2} \\
C1 & \text{C} & \underline{\frac{3}{4}},\frac{1}{4} & \underline{\frac{1}{2}},\underline{\frac{1}{2}} & \underline{\frac{3}{4}},\frac{1}{4} \\
 & \text{E} & \frac{1}{2},\frac{1}{2} & \frac{1}{4},\underline{\frac{3}{4}} & \frac{1}{2},\frac{1}{2}
\end{array}
$$

Em equilíbrio, no jogo simultâneo, os dois comerciantes também se localizam no centro da rua e dividem os consumidores igualmente.

4. Duas empresas estão considerando investir em um projeto. Elas podem decidir investir ou não. O payoff das empresas nesse jogo é dado de acordo com a matriz abaixo: onde $\theta \in \Re$.

Tabela 1: Matriz de Payoffs

		Jogador 2	
		Investir	Não Investir
Jogador 1	Investir	θ , θ	$\theta - 1$, 0
	Não Investir	0 , $\theta - 1$	0 , 0

(a) Suponha que o jogador 1 investe com probabilidade p e que o jogador 2 invista com probabilidade q. Calcule o payoff esperado de um dos jogadores em função de $(p; q; \theta)$. Note que a do outro jogador é igual, pois esse jogo é simétrico.

Iremos calcular o payoff esperado do jogador 1. Para isso basta notar que para cada estratégia escolhida pelo jogador 1 com a probabilidade do enunciado, há uma probabilidade q do jogador 2 investir e $1 - q$ de não investir, portanto teremos:

$$\mathrm{E}[\pi_1(p, q; \theta)] = p(q\theta + (1 - q)(\theta - 1)) + (1 - p)(q(0) + (1 - q)(0))$$

$$\mathrm{E}[\pi_1(p, q; \theta)] = p(\theta + q - 1)$$

(b) Encontre a função melhor resposta de um jogador em função de θ e da probabilidade do outro jogador escolher investir.

Vamos avaliar qual a melhor estratégia do jogador 1 para os possíveis valores de θ e q:

- $\theta < 0$ - $(\theta + q - 1) \leq 0$ para qualquer valor de q, portanto a melhor estratégia de 1 é $p = 0$
- $\theta > 1$ - $(\theta + q - 1) \geq 0$ para qualquer valor de q, portanto a melhor estratégia de 1 é $p = 1$
- $0 \leq \theta \leq 1$ - O sinal de $(\theta + q - 1)$ depende de q
  i. $q < 1 - \theta$ - $(\theta + q - 1) < 0$, portanto a melhor estratégia de 1 é $p = 0$
  ii. $q = 1 - \theta$ - $(\theta + q - 1) = 0$, portanto a melhor estratégia de 1 é $p \in [0, 1]$
  iii. $q > 1 - \theta$ - $(\theta + q - 1) > 0$, portanto a melhor estratégia de 1 é $p = 1$

$$R_1(q, \theta) = \begin{cases} p = 0 & \text{se} \quad \theta < 0 \\ p = 0 & \text{se} \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad \text{e} \quad q < 1 - \theta \\ p \in [0, 1] & \text{se} \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad \text{e} \quad q = 1 - \theta \\ p = 1 & \text{se} \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad \text{e} \quad q > 1 - \theta \\ p = 1 & \text{se} \quad \theta > 1 \end{cases}$$

Para o jogador 2 a função de melhor resposta é construída da mesma forma e terá os mesmos valores acima para os valores correspondentes de p

(c) Encontre o conjunto de equilíbrios de Nash para cada valor de θ.

Os equilíbrios serão:

i. $\theta < 0$ - O equilíbrio será {Não investe, Não investe}
ii. $\theta > 1$ - O equilíbrio será {Investe, Investe}
iii. $0 \leq \theta \leq 1$ - Há dois equilíbrios {Não investe, Não investe} e {Investe, Investe}

5. Duas empresas, a Carro Novo e a Nova Auto, competem no mercado automobilístico. A empresa Carro Novo já tem seu modelo de utilitário, que é um sucesso, enquanto a Novo Auto ainda não oferece nenhum modelo de utilitário. A Nova Auto tem três opções:

   (a) importar o utilitário de sua matriz estrangeira;
   (b) produzir o utilitário nacionalmente;
   (c) simplesmente permanecer fora do segmento de utilitérios, decidindo não competir com a Carro Novo.

A empresa Carro Novo pode responder às escolhas da Novo Auto de três formas:

i. mantendo o preço do seu modelo;

ii. diminuindo o preço do seu modelo;

iii. lançando uma nova versão do seu modelo

Vamos supor que ambas as empresas tomam suas decisiões ao mesmo tempo, sem observar as decisões uma da outra. Contudo, como são empresas experientes no mercado e que já competiram entre si em outras oportunidades, conhecem o comportamento dos consumidores e fazem uma estimativa bastante razoável dos seus lucros e dos lucros da rival em cada situação. A tabela 4 apresenta as estimativas de lucros (em milhões de R$) de cada combinação de ações das duas empresas, que resultam tanto dos custos de cada opção quanto da reação da demanda a novidades dos produtos e aos preços:

Tabela 2: Estimativa de Lucros

		Carro Novo		
		Nova Versão	Manter Preço	Reduzir Preço
	Lançar Modelo Próprio	1 , 4	4 , 1	1 , 3
Nova Auto	Importar da Matriz	2 , 2	2 , 1	2 , 3
	Não Competir	1 , 1	0 , 6	1, 0

(a) Elimine de maneira iterativa as estratégias dominadas e monte o jogo resultante na forma normal.

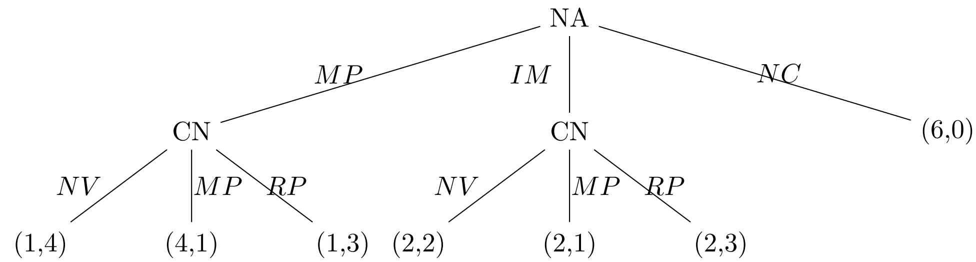
A primeira estratégia que podemos eliminar é "Não Competir"da empresa Nova Auto, essa estratégia é dominada pela estratégia "Importar da Matriz". Com o jogo resultante da primeira eliminação a estratégia "Manter Preço"da Carro Novo passa ser dominada por suas duas outras estratégias e pode, portanto, ser eliminada. Eliminada as duas estratégias uma nova estratégia da Nova Auto passa a ser dominada, "Lançar Modelo Próprio"tem payoffs menores que "Importar da Matriz", restando somente a linha "Importar da Matriz"e finalmente podemos eliminar a estratégia "Nova Versão"da Carro novo e o jogo resultante é limitado a uma estratégia para cada empresa.

(b) Encontre todos os equilíbrios de Nash do jogo simultâneo (Dica: você pode encontrar os equilíbrios do jogo resultante da eliminação iterada de estratégias dominadas pois as estratégias dominadas não farão parte de nenhum perfil de estratégia que resulte em um equilíbrio de Nash.)

Como o item anterior deixou o jogo com só uma alternativa para cada jogador, esse será o EN {Importar da Matriz, Reduzir Preço}. Resolva o EN sem eliminar as estratégias e verifique que esse será o único equilíbrio.

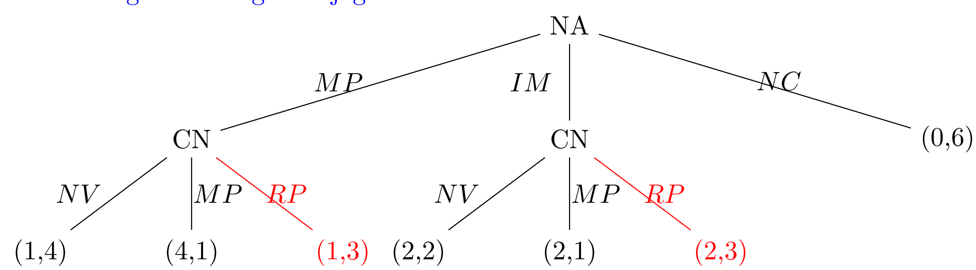
(c) Suponha agora que o jogo seja sequencial e a Nova Auto decide no primeiro estágio sua estratégia e a Carro Novo, após observar a estratégia da Nova Auto, define sua estratégia. Utilize os mesmos payoffs do jogo simultâneo, mas agora considere que se a Nova Auto decidir não competir a Carro Novo não é chamada a jogar e o par de payoffs será $(0, 6)$.

i. Monte o jogo descrito na forma extensiva

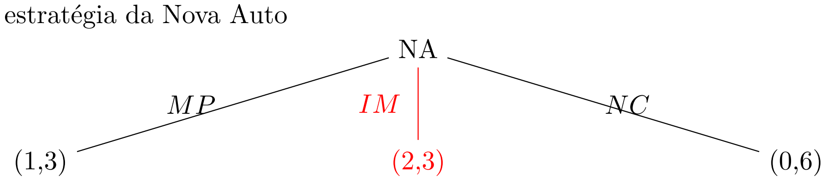


ii. Encontro os equilíbrios de Nash Perfeitos em Subjogos em estratégias puras do jogo (Esses equilíbrios são encontrados resolvendo o jogo de trás pra frente (seção 28.7 - Varian)). Há alguma mudança comparando com o que foi encontrado no jogo simultâneo?

O primeiro passo é identificar as melhores estratégias da Carro novo no segundo estágio do jogo



Agora podemos montar o jogo reduzido e identificar a melhor estratégia da Nova Auto



No equilíbrio de Nash Pefeito em Subjogos Nova Auto jogará ”Importar da Matriz”no primeiro estágio e Carro Novo jogará ”Reduzir Preço”sempre que for chamada a jogar no segundo estágio. O resultado é o mesmo que o encontrado no jogo simultâneo.

6. **Considere o jogo simultâneo dado pela matriz de payoffs representada na tabela 3, com dois jogadores (J_1 e J_2).**

Tabela 3: Matriz de Payoffs

		J_2 Esquerda	J_2 Direita
J_1	Alto	4 , 2	-1 , 0
	Baixo	0 , 1	1 , 3

Julgue as afirmações como verdadeiras ou falsas:

(a) Jogar Alto é estratégia dominante para J_1.

Falso - Não há estratégias dominantes. J_1 não possui linha com todos os payoffs maiores que a outra e J_2 não possui coluna com todos os payoffs maiores que a outra.

(b) O jogo possui pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias puras.

Verdadeiro Para encontrar os equilíbrios de Nash devemos identificar para cada estratégia de um jogador qual a melhor resposta do outro jogador.

- Se J_2 joga esquerda, J_1 joga alto
- Se J_2 joga direita, J_1 joga baixo
- Se J_1 joga alto, J_2 joga esquerda
- Se J_1 joga baixo, J_2 joga baixo

		J_2 Esquerda	J_2 Direita
J_1	Alto	($\underline{4}$,$\underline{2}$)	(-1,0)
	Baixo	(0,1)	($\underline{1}$,$\underline{3}$)

$\therefore$ Teremos dois equilíbrios de Nash, (Alto, Esquerda) e (Baixo, Direita)

(c) Jogar Alto com probabilidade 2/3 e jogar Esquerda com probabilidade 1/3 é equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

Falso Definindo que J_1 joga Alto com probabilidade q e J_2 joga Esquerda p, teremos um equilíbrio em estratégias mistas quando o payoff esperado de J_1 jogar Alto for igual ao payoff esperado de jogar Baixo e o payoff de J_2 jogar Esquerda for igual ao de jogar Direita.

			J_2	
			Esquerda	Direita
			p	$(1-p)$
J_1	Alto	q	(4,2)	(-1,0)
	Baixo	$(1-q)$	(0,1)	(1,3)

Assim, para o jogador 1 teremos:

$$4p + (-1)(1-p) = 0p + 1(1-p)$$

$$4p - 1 + p = 1 - p$$

$$p = \frac{1}{3}$$

Para o jogador 2 teremos:

$$2q + 1(1-q) = 0q + 3(1-q)$$

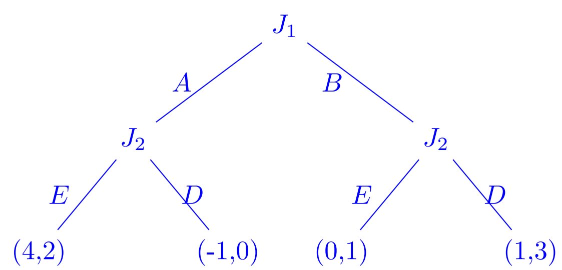
$$3q - 1 = 3 - 3q$$

$$q = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ Em equilíbrio J_1 joga Alto com probabilidade 1/3 e Baixo com probabilidade 2/3 e J_2 joga esquerda com probabilidade 2/3 e Direita com probabilidade 1/3.

(d) Em caso de jogo sequencial, se J_1 iniciar o jogo, o equilíbrio perfeito de subjogo em estratégia pura será Alto, (Esquerda se J_1 joga Alto, Direita se J_1 joga Baixo).

Verdadeiro Representando o jogo na forma extensiva:



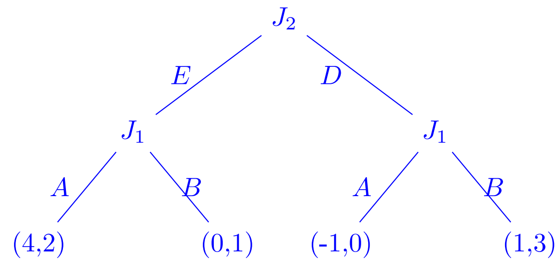
Para encontrar o equilíbrio do jogo sequencial analisamos o jogo de trás para frente.

Note que J_2 jogará Esquerda caso J_1 jogue alto e Direita caso J_1 jogue Baixo. Conhecendo as estratégias de J_2, a melhor estratégia de J_1 é jogar Alto, obtendo um payoff de 4.

O equilíbrio será (Alto,(Esquerda,Direita)).

(e) Se o jogo for transformado em sequencial com J_2 jogando primeiro, haverá um único equilíbrio de Nash em estratégia pura, mas não haverá equilíbrio perfeito de subjogo em estratégia pura.

Falso Representando o jogo na forma extensiva:



Note agora que J_1 jogará Alto caso J_2 jogue Esquerda e Baixo caso J_2 jogue Direita. Conhecendo as estratégias de J_1, a melhor estratégia de J_2 é jogar Direita, obtendo um payoff de 3.

7. Avalie as seguintes situações representadas por meio do instrumental da Teoria dos Jogos:

   (a) No jogo com payoffs apresentados no Quadro 1 (a seguir), identifica-se uma solução de equilíbrio de Nash (A1,B3) e duas estratégias que podem ser eliminadas por não serem racionais (A3 e B2).

   Tabela 4: Quadro 1

A/B	B1	B2	B3
A1	0 , 2	3 , 1	4 , 3
A2	2 , 4	0 , 3	3 , 2
A3	1 , 1	2 , 0	2 , 1

   Falso (A1,B3) e (A2,B1) são os dois equilíbrios de Nash em estratégia pura do jogo. Note que A3 pode ser eliminada no jogo resultante da eliminação de B2.

   (b) Em um jogo com um número finito de jogadores, cada um dos quais com um número definido de estratégias, se não existir um equilíbrio de Nash baseado em estratégias puras, existirá pelo menos um equilíbrio baseado na adoção de estratégias mistas.

   Verdadeiro O teorema de Nash garante que todo jogo com número de jogares e estratégias finitas terá um equilíbrio de Nash. Portanto, se o jogo não possuir um EN em estratégias puras, com certeza terá um equilíbrio em estratégias mistas.

   (c) Uma situação de equilíbrio de Nash equivale necessariamente a um ótimo de Pareto.

   Falso O dilema dos prisioneiros é um contra-exemplo dessa afirmação.

   (d) Num jogo do tipo “Batalha dos Sexos”, com payoffs apresentados no Quadro 2 (a seguir), existe um equilíbrio baseado em “estratégias mistas” quando as probabilidades de Maria e João irem ao cinema são de, respectivamente, 2/3 e 1/3.

Tabela 5: Quadro 2

João

		Cinema	Futebol
Maria	Cinema	2 , 1	0 , 0
	Futebol	0 , 0	1 , 2

Verdadeiro Há dois equilíbrios de Nash em estratégias puras: (A,A) e (B,B), e um terceiro em estratégias mistas, qual seja: o jogador 1 prefere A com 2/3 de probabilidade, e escolhe B com 1/3 de probabilidade. O jogador 2 prefere A com 1/3 de probabilidade, e escolhe B com 2/3 de probabilidade. O payoff esperado de cada jogador é 2/3.

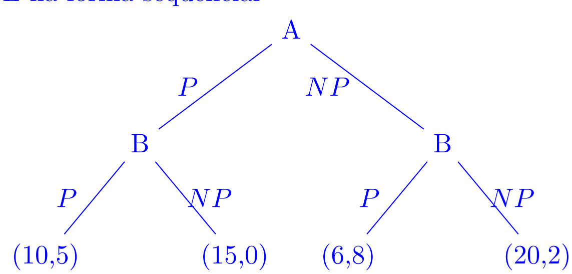
(e) Suponha que as empresas A e B vendam produtos concorrentes e estejam decidindo se irão ou não empreender campanhas de propaganda. Cada empresa, contudo, será afetada pela decisão de sua concorrente. Se ambas as empresas decidirem fazer propaganda, a Empresa A terá lucro de 10 e a Empresa B terá lucro de 5. Se a Empresa A fizer propaganda e a Empresa B não fizer, a Empresa A lucrará 15 e a Empresa B terá lucro zero. Se ambas as empresas não fizerem propaganda, a Empresa A terá lucro 20 e a Empresa B terá lucro 2. Se apenas a empresa B fizer propaganda, a empresa A terá lucro de 6 e a Empresa B terá lucro de 8. Nestas condições, existe um equilíbrio de Nash com estratégias puras, que, no entanto, pode ser alterado quando o jogo se estrutura na forma sequencial.

Falso Montando o jogo na forma normal:

Emp B

		P	NP
Emp A	P	$10, 5$	$15, 0$
	NP	$6, 8$	$20, 2$

E na forma sequencial



O jogo simultâneo possui um único EN (P,P) e o mesmo é obtido no jogo sequencial.

8. Considere o jogo abaixo e seus conhecimentos em teoria dos jogos e responda se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsa

		Jogador 2	
		x	y
Jogador 1	a	$30, 0$	$30, 2$
	b	$-20, 0$	$100, 2$

(a) As estratégias a e y são estritamente dominantes para os jogadores 1 e 2, respectivamente.

Falso Para y a afirmação é válida, mas note que o payoff de a quando 2 joga y não supera o payoff de b

(b) A combinação de estratégias (b,y) é um Equilíbrio de Nash em estratégias puras.

Verdadeiro y é dominante para 2, e a melhor resposta de 1 para y é b.

(c) Há múltiplos Equilíbrios de Nash em estratégias puras.

Falso y é dominante para 2, portanto 2 não ira jogar y com probabilidade 1, o que faz 1 joga b com probabilidade 1, esse é o único equilíbrio do jogo.

(d) Com respeito a Teoria dos Jogos, todo Equilíbrio de Nash é um ótimo de Pareto.

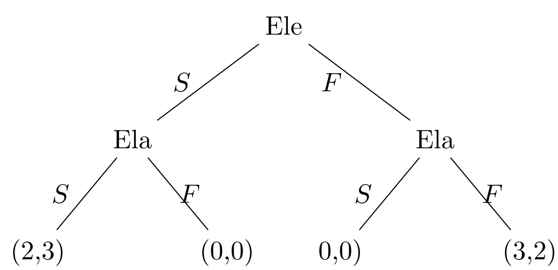
Se a pergunta for genérica, com relação a qualquer jogo proposto, ela é **FALSA** o dilema dos prisioneiros é um contra-exemplo dessa afirmação.

O gabarito da ANPEC considera **VERDADEIRA**, portanto, deve ter se limitado ao jogo proposto, onde de fato o equilíbrio é ótimo no sentido de Pareto

(e) Com respeito a Teoria dos Jogos, todo equilíbrio de Nash é uma estratégia dominante.

Falso Toda estratégia dominante é um EN, o contrário não é verdadeiro, um jogo sem estratégias dominantes pode ter um EN (Terá com certeza se for um jogo com jogadores e estratégias finitas).

9. Considere o jogo na forma extensiva abaixo:



Considerando que os jogadores agem sempre racionalmente, responda:

(a) Caso o jogo seja jogado uma única vez e a escolha do primeiro jogador seja conhecida pelo outro jogador, em equilíbrio Ele e Ela escolhem estratégias diferentes.

Falso É fácil notar que os dois irão sempre escolher a mesma estratégia em um jogo sequencial. Por indução retroativa, ela ira escolher S se ele joga S e F se ele joga F, Ele irá escolher F.

(b) Nas condições acima, caso a ordem seja invertida, Ela comece o jogo, o equilíbrio não se altera.

Falso O equilíbrio será alterado, perceba que por indução retroativa ela irá escolher S

(c) Se o jogo fosse jogado simultaneamente, haveria dois Equilíbrios de Nash em estratégias puras.

Verdadeiro O jogo é guerra dos sexos, já resolvido anteriormente.

(d) Com respeito a Teoria dos Jogos, uma estratégia é dita dominante quando ela é a melhor estratégia para um jogador, independente do que o outro jogador está jogando.

Verdadeiro É a definição, para ser mais preciso essa definição é válida para Estritamente dominante.

(e) Com respeito a Teoria dos Jogos, considerando que um conjunto de estratégias seja um Equilíbrio de Nash, pode ser que um dos jogadores tenha incentivos em mudar sua escolha.

Falso EN implica que para uma dada a melhor estratégia do meu adversário eu estarei escolhendo minha melhor estratégia, portanto, não há incentivos para alterar minha escolha.