

7ª) Lista de Exercícios de Álgebra 1, Licenciatura em Matemática, para entregar dia 19-06-18.

1. Seja $\phi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ a função de Euler. (Lembre que esta função associa a cada inteiro positivo n o número de inteiros positivos primos com n e menores que n)
 - (a) Seja p um número primo, $r > 0$ inteiro mostre que $\phi(p^r) = p^{r-1}(p-1)$.
 - (b) Mostre que se m e n são inteiros maiores que zero que são primos entre si, então $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.
 - (c) Prove que se $m = p_1^{r_1} \dots p_t^{r_t}$ é a decomposição de m em fatores primos então $\phi(m) = m(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_r})$
2. Determinar todos os inteiros tais que $\frac{n+17}{n-4}$ seja o quadrado de um número racional.
3. Seja a um número inteiro que não é um quadrado perfeito. Mostre que a equação $x^2 = a$ não tem solução em \mathbb{Q}
4. Seja $f : A \rightarrow B$ uma função de um conjunto A num conjunto B . Mostre que a relação definida em A por meio de aRb se e somente se $f(a) = f(b)$ é uma relação de equivalência.
5. Seja \cong uma relação de equivalência num conjunto não vazio, A . Prove que existe um conjunto B e uma função $f : A \rightarrow B$ tal que $a \cong b$ se e só se $f(a) = f(b)$.
6. Exiba um exemplo de uma relação R em um conjunto A que satisfaça as seguintes condições
 - (a) R é reflexiva e simétrica mas não transitiva.
 - (b) R é simétrica e transitiva mas não reflexiva.
 - (c) R é transitiva, reflexiva e não simétrica.
7. Pare que valores de $n \in \mathbb{Z}$ a representação do racional $\frac{n^2+2n+3}{n^2+3n+5}$ é irredutível?