1 a)

Sabemos que a lei de Gauss para o campo elétrico, de forma integral, pode ser escrito dessa forma:

$$\oint_S \vec{E}.\vec{n}dA = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Nesse caso, as linhas de campo elétrico apenas entram ou saem da superfície gaussiana de forma que ao se efetuar a integral, "soma", o resultado não será nulo.

Já a "Lei de Gauss para o magnetismo", iguala o resultado da integral de superfície do campo magnético a zero, pois não existem monopólos magnéticos.

$$\oint_S \vec{B}.\vec{n}dA = 0$$

Ou seja, toda linha de campo magnético que entra na superfície gaussiana também sai de forma que o produto escalar do campo magnético com o vetor normal da superfície gerará sempre resultados que se cancelaram quando efetuarmos a integral ("soma").

b)

Maxwell sugeriu que por simetria com a Lei de Faraday, deveria existir um termo de variação do fluxo elétrico na Lei de Ampère que também poderia induzir um campo magnético. Dessa forma Maxwell sugeriu a seguinte equação de Ampère corrigida.

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_{\mathrm{E}}}{dt} + \mu_0.\mathrm{I}$$

Já o segundo termo, já conhecido, nos diz que corrente elétrica induz campo magnético. A Lei de Faraday, a qual está exposta abaixo, apresenta um termo de variação do fluxo magnético, a qual induz um campo elétrico.

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d\Phi_{\mathrm{B}}}{dt}$$

c)

As equações de Maxwell no vácuo na forma diferencial se resumem a:

I) $\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$ II) $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ III) $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ IV) $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_o\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

No vácuo não há cargas, portanto não há corrente e consequentemente as equações I e IV assumem as formas expostas acima.

1- Começaremos com o campo elétrico. Considere, portanto, a aplicação do rotacional da equação III.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \nabla(\vec{\nabla}.\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Substituindo a equação I e utilizando da linearidade do operador diferencial, a equação acima assume a seguinte forma.

$$-\nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

Substituindo a equação IV, a equação acima assume a seguinte forma

$$-\nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_o \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

A qual é uma equação de onda com velocidade $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$.

2- Considere, agora, o rotacional da equação IV.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \nabla(\vec{\nabla}.\vec{B}) - \nabla^2\vec{B} = \vec{\nabla} \times \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Substituindo a equação II e utilizando da linearidade do operador diferencial, a equação acima assume a seguinte forma.

$$-\nabla^2\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

Substituindo a equação III, a equação acima assume a seguinte forma

$$-\nabla^2\vec{B} = \mu_o \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla^2\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

A qual é uma equação de onda com velocidade $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$.