Instituto de Física - USP - 2015
4300430 - Introdução à Cosmologia Física
Prof. Raul Abramo

Lista 2 – Data de entrega: 23 de Setembro

---

1. **Distâncias angulares num universo em expansão**

   Vamos nos recordar da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker:

   $$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\Sigma^2 \ ,$$

   onde

   $$d\Sigma^2 = d\chi^2 + \frac{1}{k} \mathrm{sen}^2 \left(\sqrt{k}\, \chi \right) d\Omega^2 \ .$$

   A distância comóvel desde um ponto de onde foi emitido um raio de luz num instante t_e é dada por:

   $$\chi = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \ .$$

   Lembre-se também de que o redshift cosmológico é dado por $1 + z = 1/a(t)$, com $a(t_0) = 1$ no instante atual (t_0).

   Responda:

   (a) [**0.5**] Considere um universo no qual $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$, uma geometria espacial plana ($k = 0$), e t_0= 14 Gyr (14 bilhões de anos). Qual é a distância comóvel até uma galáxia em $z = 0.1$, $z = 0.5$ e $z = 1$?

   (b) [**0.5**] Suponha agora que a galáxia no redshift $z = 1$ está orientada com seu disco perpendicular à nossa linha de visada, e que esse disco subtende um ângulo $\Delta\theta = 3,6'' = 10^{-3}$ graus no céu. Assumindo o modelo do item (a), qual é o tamanho **físico** dessa galáxia?

   (c) [**0.5**] Considere agora um universo no qual $a(t) = (t/t_0)^1$ e uma geometria espacial aberta tal que $k = -1/R_k^2$, com $R_k = c\,t_0 = 14$ G lyr (14 bilhões de anos-luz). Qual é a distância comóvel da Terra até essa galáxia?

   (d) [**0.5**] Assumindo agora o modelo do item (c), calcule o tamanho dessa galáxia, considerando que você mediu o mesmo ângulo ocupado pelo disco ($\Delta\theta = 3,6'' = 10^{-3}$ graus).

2. **Medindo curvatura espacial**

   Infelizmente as galáxias reais não têm tamanhos bem definidos: elas podem ser pequenas, grandes, espirais, elípticas, irregulares – enfim, o exercício anterior é puramente acadêmico. Porém, a distribuição de galáxias no universo tem uma escala de comprimento muito bem definida, que foi impressa na matéria durante a época conhecida como *recombinação*, que discutiremos mais para o final do curso. Esse comprimento, conhecida como *escala de BAOs* (*baryon acoustic oscillations*) tem um tamanho comóvel de exatamente 150 Mpc – ou seja, o comprimento físico num redshift z é $(1 + z) \times 150$ Mpc.

   Suponha que você seja capaz de medir essa escala de comprimento através de um mapa de galáxias que foi realizado observando galáxias com redshift médio $z_m = 0.5$. Após realizar as suas medidas, você nota que os seus resultados são consistentes com um universo plano ($k = 0$), dentro da sua margem de erro na medida de distância, que é de ± 2 % .

   Responda:

(a) **[0.5]** Mostre que num universo onde $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$ a distância comóvel até o redshift $z = z_m = 0.5$ é $\chi_m = 0.379\, c\, t_0$.

(b) **[0.5]** Suponha que temos valores exatos $t_0 = 14$ Gyr e $k = 0$. Qual é o tamanho na direção angular que corresponde à escala de BAOs em $z = z_m = 0.5$? Dê a sua resposta em graus.

(c) **[0.5]** Suponha que a sua medida é consistente com essa predição, mas que você tem uma margem de erro de ± 2 %. Qual é o limite superior que você pode impor no raio de curvatura $R_k = \sqrt{|k|}$? Assuma que a única fonte de incerteza é a curvatura.

(d) **[0.5]** Vamos dizer que você não fica satisfeito com a sua resposta no item anterior. Você pensa em duas opções: (1) fazer um mapa de galáxias num redshift mais alto, $z \simeq 1$, com a mesma precisão (2%) do mapa original; ou (2) melhorar as medidas do mapa original, em $z \simeq 0.5$, de tal forma que a precisão da medida da escala de BAOs se torne 1%. Qual dessas opções vai fornecer um limite mais forte no raio de curvatura R_k?

3. **Densidade e curvatura espacial**

(a) **[0.5]** Explique por quê um universo cuja densidade de energia é exatamente igual a:

$$\rho(t) = \rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

tem que necessariamente possuir curvatura nula. Essa densidade ρ_c é chamada de densidade crítica.

(b) **[0.5]** Suponha agora que a densidade total do universo é diferente da densidade crítica. Usando as Equações de Friedmann e/ou a Equação da Continuidade, encontre as equações que descrevem como a fração $\Omega(t) = \rho(t)/\rho_c(t)$ evolui com o tempo. Discuta os casos $k > 0$ e $k < 0$.

(c) **[0.5]** Mostre que, num universo dominado por matéria, e no qual a densidade de energia é igual à densidade crítica, a distância comóvel até um objeto a um redshift z é dada por:

$$\chi = \frac{2c}{H_0}\left(1 - a_e^{1/2}\right) ,$$

onde $1 + z = 1/a_e$.

4. **Um universo vazio**

Vamos agora considerar um universo no qual não há nenhum tipo de matéria ($\rho = p = 0$), e que no instante t_0 se expande a uma taxa H_0.

(a) **[0.5]** Qual é o valor da curvatura espacial k?

(b) **[0.5]** Qual é a solução para $a(t)$?

(c) **[0.5]** Qual é a relação entre t_0 e H_0?

(d) **[0.5]** Qual é a distância comóvel até o redshift $z = 1$?

5. **Um universo dominado por uma constante cosmológica (Λ)**

Imagine que o universo contém apenas uma forma de energia tal que sua densidade é constante, $\rho = \rho_\Lambda =$ const. Ou seja: uma constante no espaço *e no tempo*. Vamos também supor que a curvatura espacial é desprezível.

(a) **[0.25]** Mostre que o fator de escala tem a solução $a(t) = e^{H_0(t-t_0)}$.

(b) **[0.25]** Qual é idade do universo em termos de H_0 e t_0? (Cuidado!)

(c) **[0.25]** Se assumirmos que o universo começou em $t = 0$, qual seria idade do universo em $z = 1$?

(d) **[0.5]** Qual é a distância comóvel até uma galáxia num redshift $z = 1$?

(e) **[0.5]** Qual é a distância física que separa duas galáxias em redshifts $z = 1$ que estão separadas por um ângulo $\Delta\theta = 0.01$ radianos?

(f) **[0.5]** Suponha que o universo atual é bem descrito por esse modelo, e sempre foi assim (note que isso *não* é verdade!) Se uma galáxia a uma distância comóvel $\chi = 5000$ Mpc emite luz em nossa direção hoje, essa luz vai chegar até nós, na Terra, em que instante no futuro? E se essa galáxia estiver a uma distância $\chi = 10^4$ Mpc?

(g) **[0.25]** Um universo como esse possui um "Big Bang"?...