Instituto de Física - USP - 2015
4300430 - Introdução à Cosmologia Física
Prof. Raul Abramo

Lista 1

---

1. **(Paradoxo de Olbers)** Uma floresta contém árvores de seção quadrada, todas com o mesmo lado R – veja a Fig. 1. O número médio de árvores por unidade de área é $\langle dN/dA \rangle = \bar{n}$. Um estudante de Iniciação Científica tenta fazer com que o feixe de uma ponteira laser atravesse toda a floresta. Considere que a probabilidade por unidade de comprimento de que um feixe não atinja uma árvore é dada por $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{1}{\alpha} e^{-x/\alpha}$.

   (a) **[1.0]** Determine L tal que a probabilidade de que o laser **não** atravesse toda a floresta seja 99.99%. Utilize a fórmula $\alpha = \dfrac{1}{\bar{n}\, R}$, com $\bar{n} = 3,5 \times 10^{-3}$ m^{-2} e $R = 0,5$ m.

   (b) **[0.5]** Qual a relação deste exercício com o Paradoxo de Olbers?

   (c) **[Difícil! Valendo 0.5 extra]** Derive a fórmula acima para dp/dx e calcule a expressão exata para α (a taxa com que os feixes de laser são obstruídos por unidade de comprimento), partindo de primeiros princípios.

   (*Dica: Considere $L \gg R$.*)

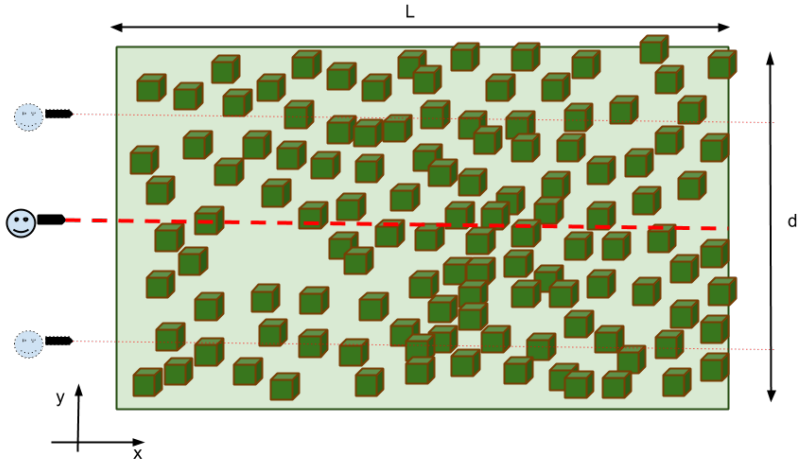

Figura 1: Geometria da floresta.

2. **(Paralaxe e Limite de Difração)** A paralaxe heliocêntrica é usada para a medida de distâncias de estrelas próximas da Terra. Com o movimento de rotação da Terra, podemos medir a direção de um objeto celeste em relação às estrelas de fundo utilizando medidas em posições opostas na órbita da Terra ou seja, com 6 meses de diferença entre elas.

   (a) **[0.25]** Defina o conceito de *parsec* (pc).

(b) **[0.25]** Calcule a paralaxe de uma estrela a 32,62 *anos-luz* e outra a 326,20 *anos-luz* da Terra.

(c) **[0.5]** Utilizando o conceito de *limite de difração*, calcule-o no domínio do óptico ($\lambda = 5000$ Å), para *i)* o olho humano (diâmetro da pupila $D = 7.7mm$); *ii)* um telescópio amador (diâmetro do espelho $D = 10cm$); *iii)* o Hubble Space Telescope (diâmetro do espelho $D = 2,4m$).

(d) **[0.5]** Quais instrumentos do item (c) seriam capazes de medir as paralaxes do item (b)?

3. **(Redshift e Distâncias)**

(a) **[0.5]** Uma galáxia possui velocidade peculiar de 700 km/s em direção ao centro de massa de seu aglomerado, fazendo um ângulo de 31° com a linha de visada de um observador. Considere que o centro de massa desse aglomerado de galáxias está muito mais distante do observador do que a galáxia em questão. Com uma medida espectroscópica, esse observador obtém um comprimento de onda da linha de Lyα em $\lambda_{obs} = 1364.352$ Å. Sabendo que a linha Lyα possui um comprimento de onda, medido em laboratório, de $\lambda_0 = 1216.00$ Å, determine o redshift e a distância dessa galáxia.

(b) **[0.5]** Uma galáxia espiral está a um redshift $z = 0.1$. Vista da Terra, essa galáxia tem o seu disco orientado paralelamente à linha de visada. Sabemos que galáxias espirais possuem um certo momento angular – ou seja, os seus discos possuem uma rotação. Assuma que a velocidade de rotação do disco obedece uma lei $v_{rot}(r) = v_0\,(r/r_0)\,e^{-|r|/r_0}$, com $v_0 = 200$ km/s e $r_0 = 10$ kpc, e que esse disco possui uma densidade homogênea de gás até um raio máximo de 50 kpc. O gás no disco dessa galáxia (a maior parte Hidrogênio) emite radiação Lyα. Considere que a radiância em Lyα, em repouso, pode ser descrita por uma função δ de Dirac, ou seja, $I(\lambda) \simeq I_0\delta(\lambda - \lambda_0)$. Qual será o espectro observado dessa galáxia na Terra, na região próxima da linha Lyα?

(c) **[0.5]** Suponha agora que podemos fazer observações espectroscópicas ao longo de todo o disco, em regiões espaciais pequenas, que correspondem a intervalos de 10 kpc ao longo do disco. Esboce o espectro observado de cada um desses pedaços, na região próxima da linha de Lyα.

Utilize $H_0 = 72$ km s^{-1} Mpc^{-1} e $c \approx 3 \times 10^5$ km/s.

4. **(Magnitudes)** Considere uma lista de objetos celestes cujas magnitudes aparentes m são medidas por algum astrônomo, e para os quais um físico determinou as magnitudes absolutas M. Esses objetos têm distâncias d e/ou paralaxes p. Calcule a quantidade desconhecida nos seguintes casos:

(a) $m = -1.6$ mag, $d = 4.3$ pc. Qual a magnitude absoluta, M?

(b) $M = 14.3$ mag, $m = 10.9$ mag. Qual a distância, d?

(c) $m = 5.6$ mag, $d = 88.0$ pc. Qual a magnitude absoluta, M?

(d) $M = -0.9$ mag, $d = 220$ pc. Qual a magnitude aparente, m?

(e) $m = 0.2$ mag, $M = -9.0$ mag. Qual a paralaxe p?

(f) $m = 7.4$ mag, $p = 0.0043''$. Qual a magnitude absoluta M?

[Cada item vale 0.25].

5. **(Lei de Hubble) [1.0]** Com as distâncias medidas em termos das magnitudes, $m - M$, e a seguinte tabela de respectivos redshifts, utilize-se da Lei de Hubble para obter uma estimativa de H_0, em unidades de km s^{-1} Mpc^{-1}, com um erro menor que 10%. Faça um esboço do diagrama de Hubble em $(m - M) \times z$ e $d \times v_H$. *(Dica: assuma que $v_H \approx cz$.)*

$(m-M)$	z
33.490	0.01200
33.997	0.01512
34.287	0.01728
35.064	0.02472
35.305	0.02760

6. **(Projeção Estereográfica)** Vamos definir uma projeção estereográfica da superfície de uma esfera de raio R, desde o Polo Norte dessa esfera, como mostrado na Fig. 2:
   (a) **[0.5]** Encontre a métrica no plano (x,y).
   (b) **[0.5]** Mostre que a área total do plano é $4\pi R^2$.
   (c) **[0.5]** Mostre que o comprimento de um meridiano é $2\pi R$.
   (d) **[0.5]** Mostre que o comprimento do equador é $2\pi R$.

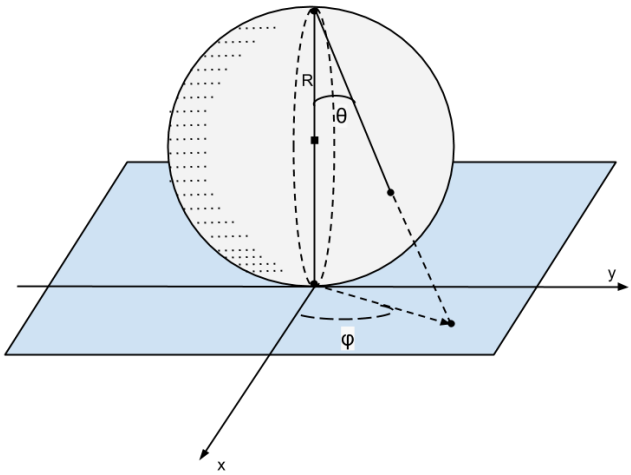

Figura 2: Projeção Estereográfica partindo do Polo Norte.

7. **(Velocidades peculiares)** Em sala de aula vimos que um corpo inicialmente em repouso no espaço-tempo de FLRW permanecerá em repouso. Vamos agora considerar o que acontece quando esse corpo tem alguma velocidade inicial $\vec{v}_0$ num certo instante $t = t_0$. Mais exatamente, considere uma partícula cuja 4-velocidade inicialmente é dada por:

$$U^\mu(t = t_0) = \gamma(v_0)(1, \vec{v}_0) \ .$$

   (a) **[0.5]** Escreva a equação da geodésica para essa partícula – ou melhor, escrevas as equações para a parte temporal, U^0, e para as partes espaciais, U^i $(i = 1, 2, 3)$.
   (b) **[1.0]** Resolva as equações do item anterior. Faça aproximações se isso for absolutamente necessário (por exemplo, $v_0 \ll c$). O que acontece com a *direção* da velocidade ao longo do tempo? E o que acontece com o *módulo* da velocidade ao longo do tempo? Você é capaz de explicar esse resultado?

   [Atenção: Para esse exercício você vai precisar das conexões da métrica de FLRW, que foram apresentadas em sala de aula – veja os slides da Aula 5.]