Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"

Universidade de São Paulo

LCE0130 - Cálculo Diferencial e Integral

Taciana Villela Savian

Sala 304, pav. Engenharia, ramal 237

tvsavian@usp.br

tacianavillela@gmail.com

Crescimento e Concavidade de Funções

Nessa aula iremos aprender a utilizar a derivada para compreender o comportamento de uma função.

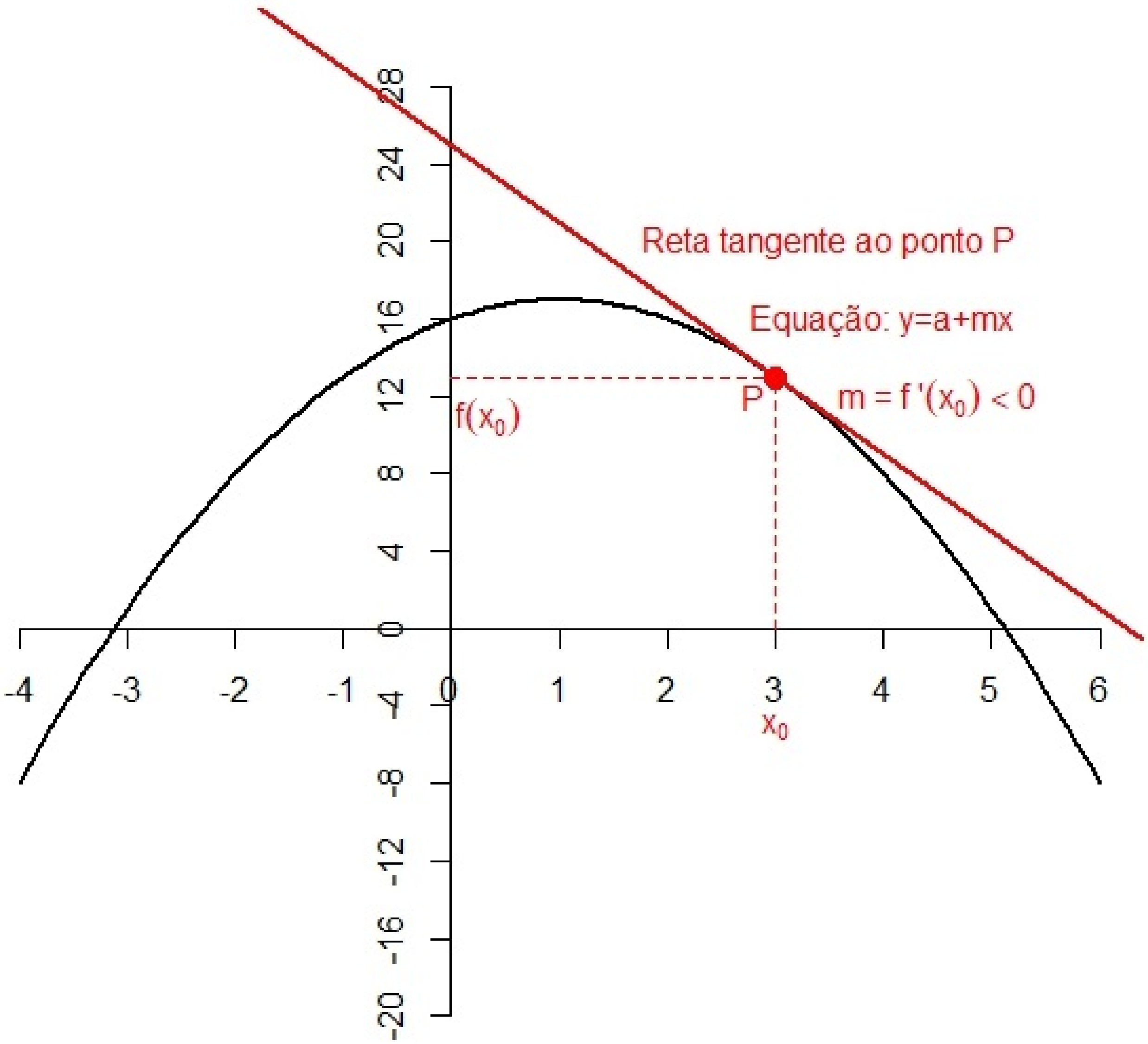
- Localizar os valores máximos e mínimos de uma função;
- Analisar a concavidade de uma função;
- Localizar os pontos de inflexão da função;
- Analisar algumas situações práticas.

Crescimento e Concavidade de Funções

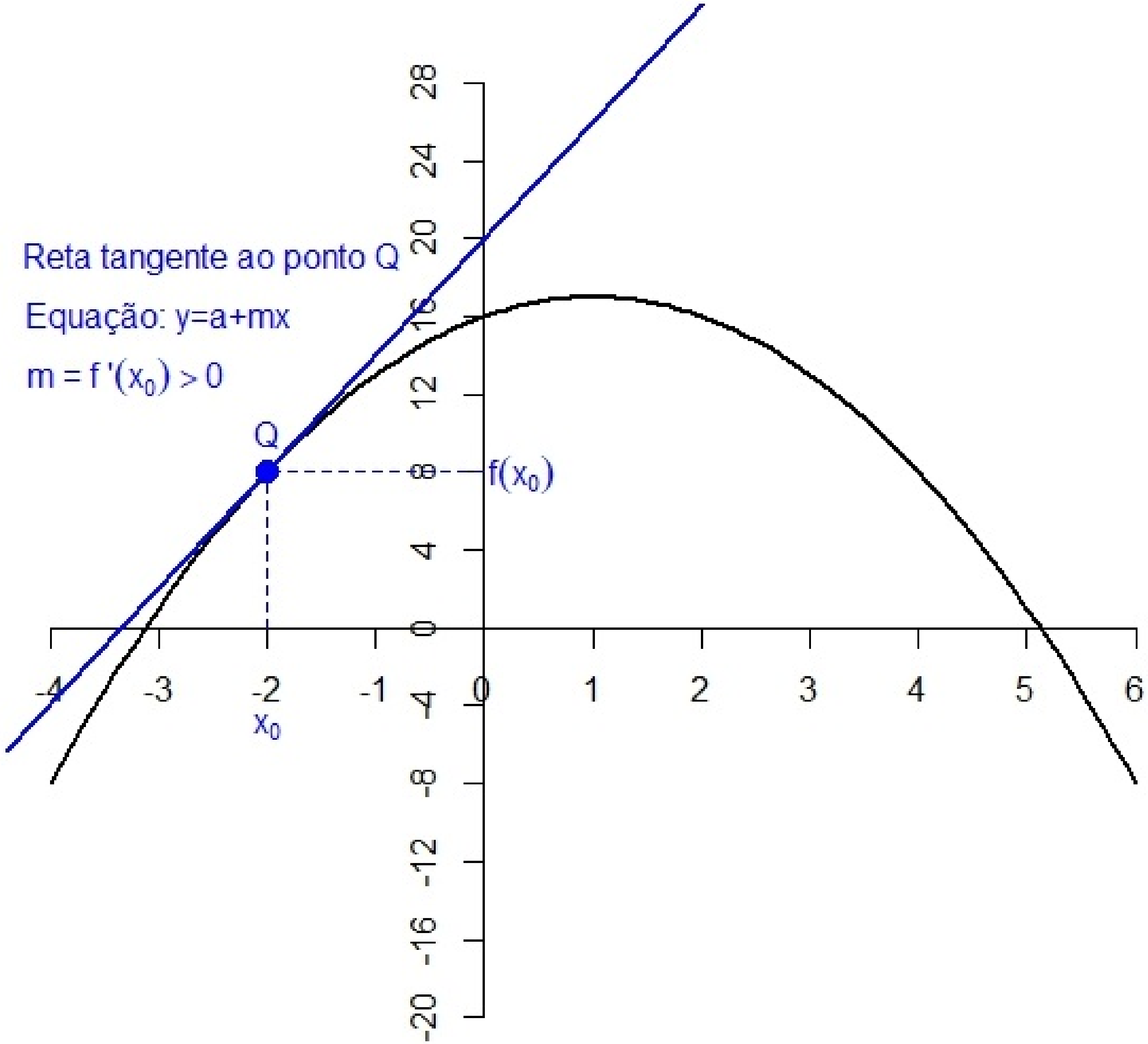
Ponto Crítico de uma Função

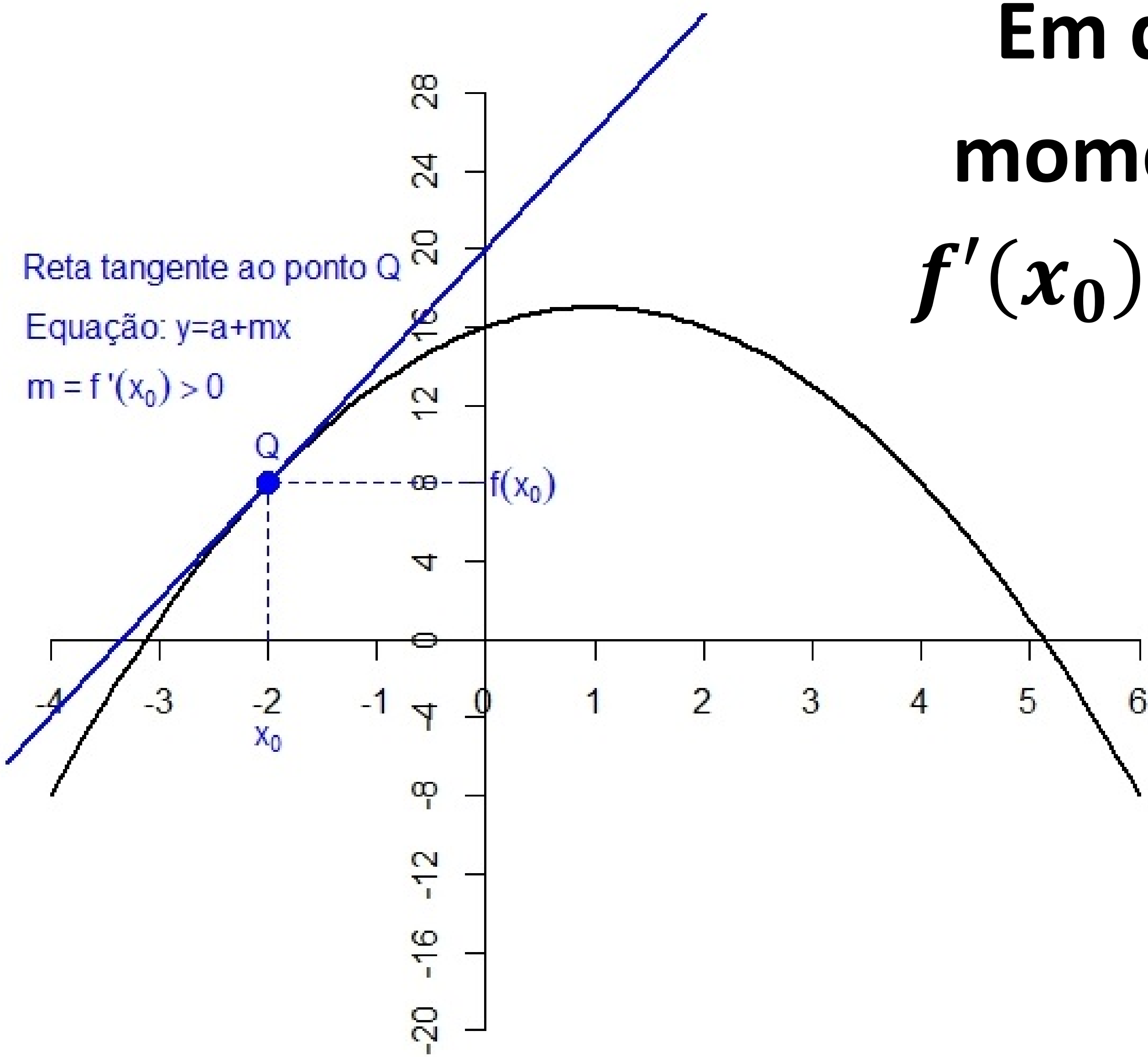
Se $f(x)$ é uma função, contínua em [a,b] e diferenciável em (a,b), um ponto x_0 em seu domínio, no qual $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0) \nexists$ (não está definida) é denominado de ponto crítico da função $f(x)$.

O que significa "graficamente" $f'(x_0) = 0$? e $f'(x_0) \nexists$?

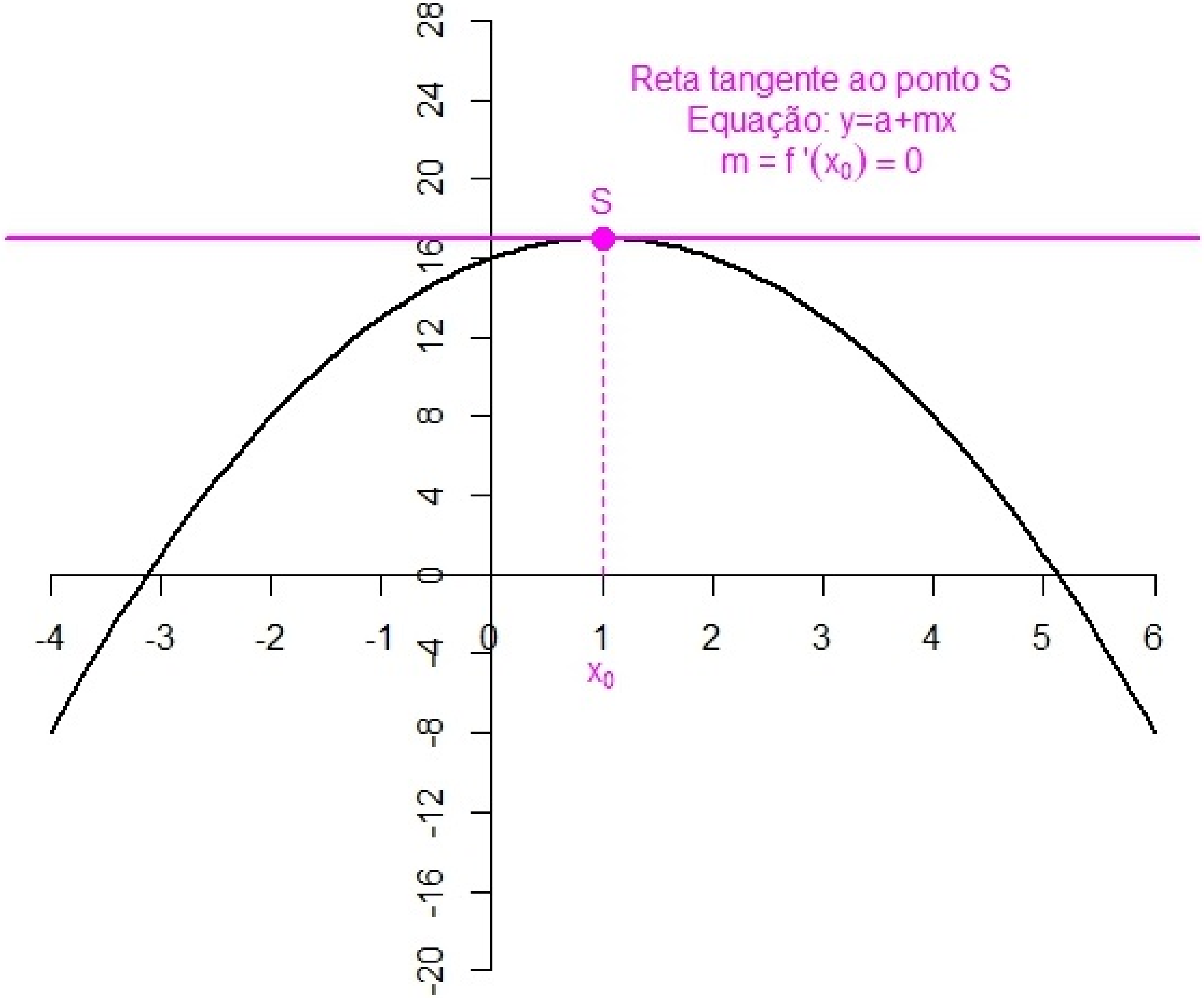


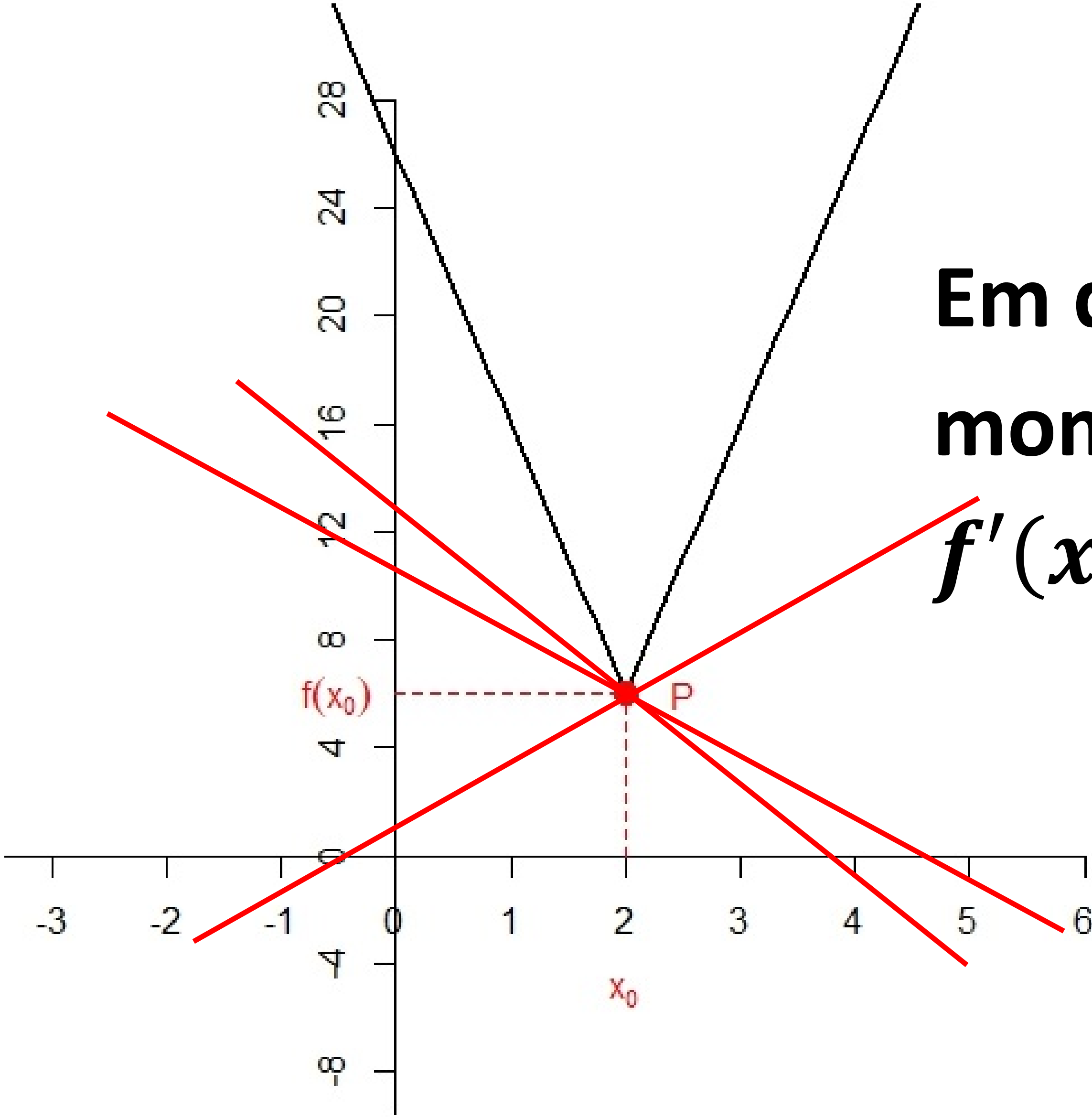
Reta tangente ao ponto P
Equação: y=a+mx
P
$m = f'(x_0) < 0$
$f(x_0)$
x_0


Reta tangente ao ponto Q
Equação: y=a+mx
m = f '(x0) > 0
Q
f(x0)
x0
28
24
20
16
12
8
4
0
-4
-8
-12
-16
-20
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6



Em que momento $f'(x_0) = 0$?


Reta tangente ao ponto S
Equação: y=a+mx
m = f '(x0) = 0
S
x0
28
24
20
16
12
8
4
0
-4
-8
-12
-16
-20
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

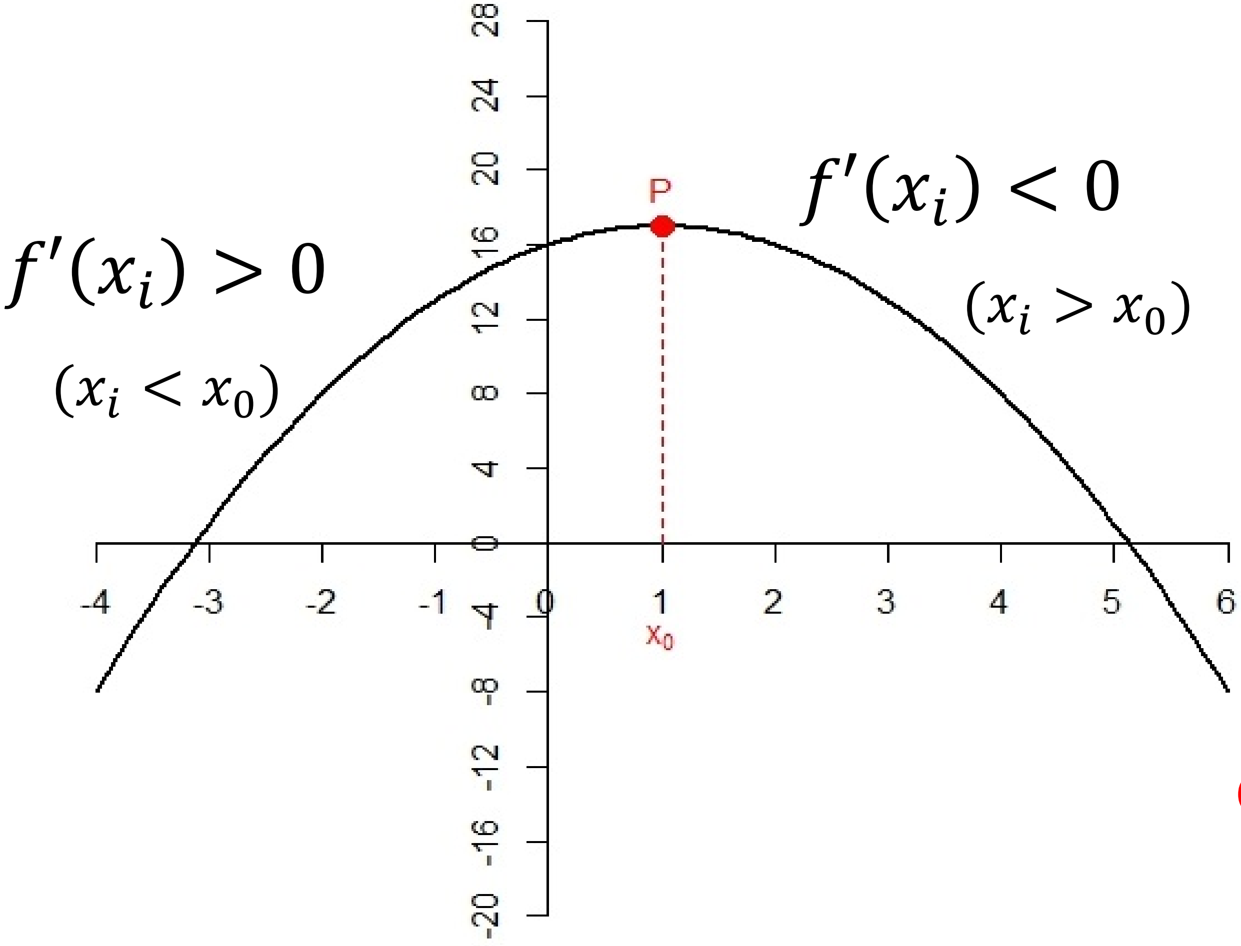


Em que momento

$$f'(x_0)\ \nexists\ ?$$

Máximos e Mínimos de Funções

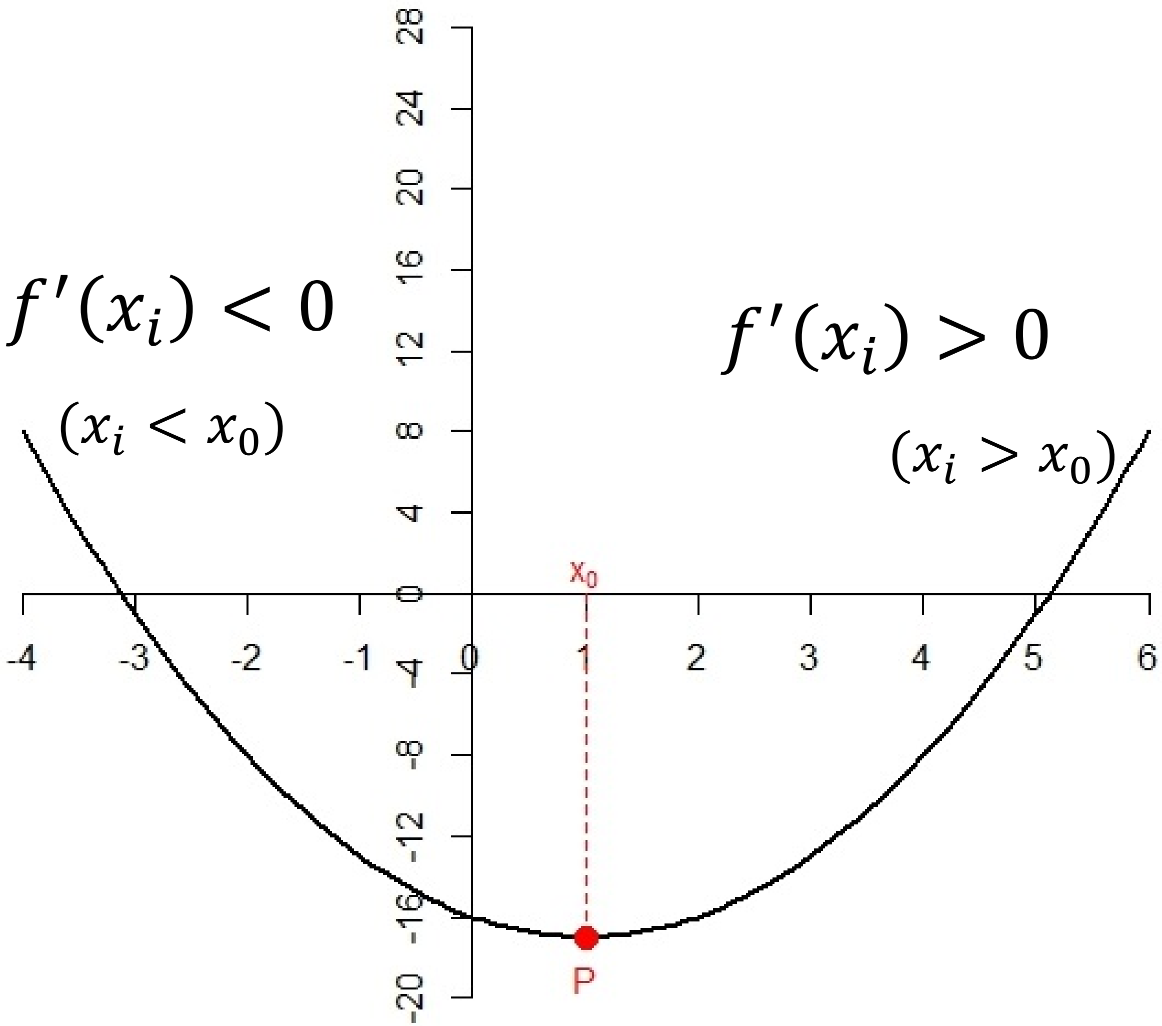
Os pontos críticos de uma função dividem o seu domínio (D_f) em intervalos nos quais o sinal da derivada permanece inalterado (positivo ou negativo).



Se conseguirmos mostrar que antes de um ponto crítico (x_0) a derivada tem sinal positivo e depois desse ponto (x_0) a derivada tem sinal negativo, podemos afirmar que x_0 é a abscissa de um **Ponto de Máximo** na função f(x)

Crescente → Descrescente.

.



Da mesma forma,

Se conseguirmos mostrar que antes de um ponto crítico (x_0) a derivada tem sinal negativo e depois desse ponto (x_0) a derivada tem sinal positivo, podemos afirmar que x_0 é a abscissa de um **Ponto de Mínimo** na função f(x).

Decrescente $\longrightarrow$ **Crescente**

Além disso:

Se uma função $f(x)$ é diferenciável em um intervalo contendo c, então, no ponto $P\big(c, f(c)\big)$, o gráfico é:

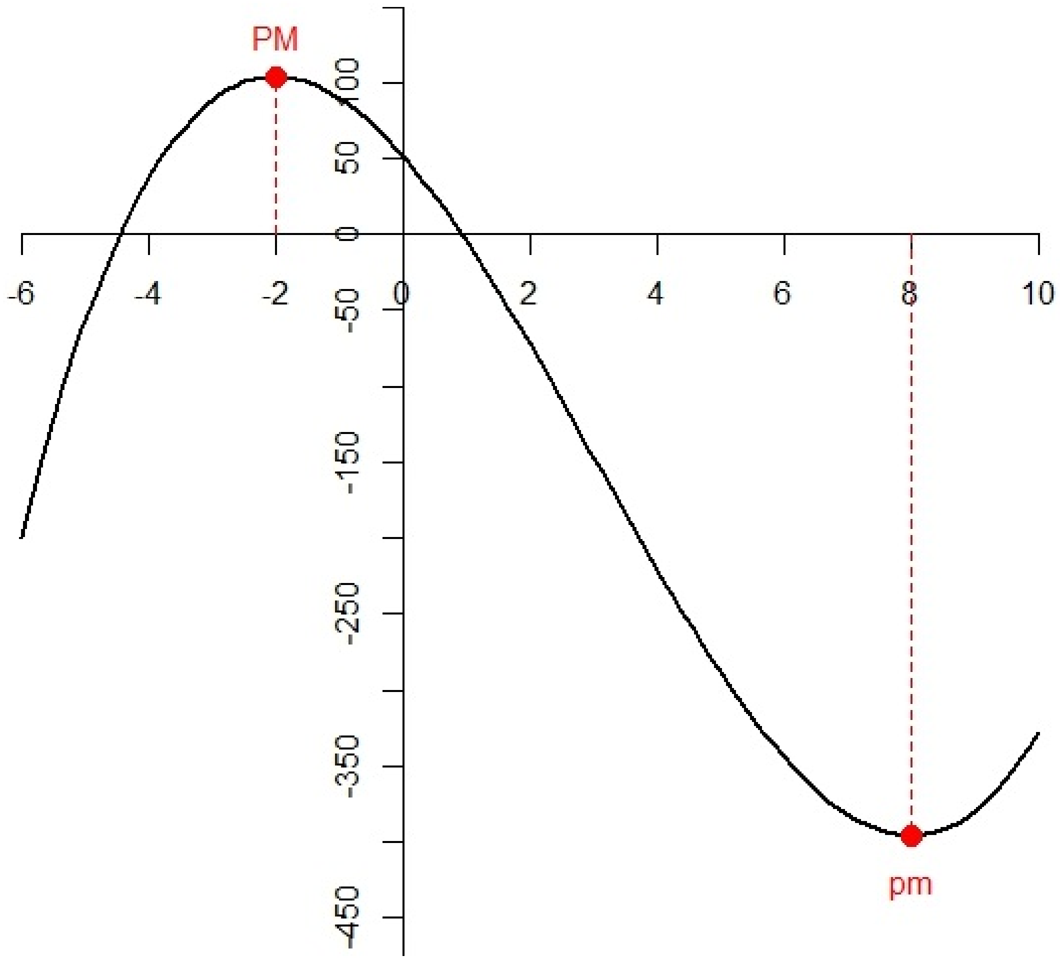
- Côncavo para cima se $f''(c) > 0$;
- Côncavo para baixo se $f''(c) < 0$;

EXEMPLO:

Considere a função $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$, definida no intervalo [-6,10].

Determine os intervalos de crescimento/decrescimento da função $f(x)$ e faça um esboço do gráfico identificando os pontos de máximo e mínimo da função.

Esboço gráfico da função $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$



CUIDADO!

Nem todo ponto crítico (x_0) de uma função pode ser classificado como máximo ou mínimo (local/global).

Quando não há troca de sentido da função $f(x)$

(crescente - decrescente ou decrescente - crescente)

o ponto crítico x_0 não é nem máximo, nem mínimo e sim um ponto denominado **"Ponto de Inflexão"** onde acontece a troca de concavidade da função $f(x)$.

EXEMPLO:

Considere a função $f(x) = x^3$, definida no $\mathbb{R}$.

Determine os intervalos de crescimento/decrescimento da função $f(x)$ e faça um esboço do gráfico identificando os pontos de máximo e mínimo da função, se houverem!

As técnicas utilizadas para calcular máximos e mínimos são muito úteis em uma área chamada "otimização"

Por exemplo:

- Uma empresa que tente "maximizar" seu lucro por ter isso "minimizando" seus custos!
- Como descobrir em que momento a fotossíntese está ocorrendo com velocidade máxima?

Exemplo: Com o tempo, $t \geq 0$, medido em dias, a taxa segundo a qual a fotossíntese ocorre na folha de uma planta, representada pela taxa de produção de oxigênio, é dada aproximadamente por:

$$p(t) = 100(e^{-0{,}02t} - e^{-0{,}1t}).$$

Em que momento a fotossíntese está ocorrendo mais rápido? Segundo que taxa (unidade de oxigênio/unidade de tempo)?

Maximizar o lucro é um dos problemas fundamentais de um produtor de bens de consumo.

Dada uma quantidade, q, o lucro, $L(q)$, é a diferença entre a receita, $R(q)$, e o custo, $C(q)$, de produzir a quantidade q. Portanto,

$$L(q) = R(q) - C(q)$$

Lembrando: "Os máximos e mínimos de uma função só podem ocorrer nos pontos críticos da função."

Se queremos maximizar o Lucro......

.....encontrar os pontos críticos da função $L(q)$.

$$L'(q) = 0$$

Mas,

$$L'(q) = R'(q) - C'(q)$$

Logo, o lucro máximo "pode" ocorrer quando

$$R'(q) - C'(q) = 0$$

$$R'(q) = C'(q)$$

em que: $R'(q)$ é a receita margina e $C'(q)$ é o custo marginal.

Exemplo: Encontre a quantidade que maximiza o Lucro se a receita e custo totais (em reais) são dados por:

$$R(q) = 5q - 0{,}003q^2$$

$$C(q) = 300 + 1{,}1q$$

em que: q é a quantidade, $0 \leq q \leq 1.000$

Que nível de produção corresponde ao Lucro Máximo?

Exemplo: A demanda de entradas para um parque ecológico é dada pela equação $p = 70 - 0{,}02q$, em que p é o preço da entrada, em reais, e q é o número de pessoas que frequentam o parque pagando este preço.

(a) Que preço gera um público de 3.000 pessoas?

(b) Qual a receita total com este preço?

(c) Qual a receita total se o preço for R$ 20,00?

(d) Escreva a função receita como função do público q que frequenta o parque ecológico;

(e) Que frequência maximiza a receita do parque?

(f) Que preço deve ser cobrado para maximizar a receita?

(g) Qual é a receita máxima?

(h) Qual o lucro correspondente?

Exercícios:

1) Para as funções a seguir use a primeira derivada para obter todos os pontos críticos da função e a segunda derivada para obter todos os pontos de inflexão. Use gráficos para indicar cada ponto crítico como máximo local, mínimo local, ou nenhum dos dois casos.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 3$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 5$

b) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6$

2) A função $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x$ tem um ponto crítico em $x = 1$. Use o teste da segunda derivada para descobrir se ele é um máximo local ou mínimo local.

3) Durante uma enchente, o nível da água de um rio subiu, primeiro, cada vez mais rápido e, depois, cada vez mais devagar até atingir seu ponto mais alto e, então, voltar ao nível anterior à enchente. Considere a profundidade do rio (nível da água) como função do tempo.

a) O instante em que o rio atinge o nível mais alto é um ponto crítico ou um ponto de inflexão desta função?

b) O instante em que começou a subir mais devagar é um ponto crítico ou um ponto de inflexão?

4) Na estatística, temos uma função muito importante (função densidade de probabilidade) denominada curva Normal. Uma de suas características é apresentar a forma de sino e tem a seguinte expressão:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

em que: μ é um parâmetro (constante) denominado média; σ é um parâmetro denominado desvio padrão (o seu quadrado σ^2 é denominado variância).

a) em que ponto a função $f(x)$ tem um máximo?

b) a função tem ponto(s) de inflexão? Se sim, onde?