Jogos com soma não zero

Pedro Aladar Tonelli

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística USP

2018

Dilema dos Prisioneiros (um exemplo)

O Jogo: Dois prisioneiros são mantidos em escritórios separados e o promotor do caso oferece a cada um o seguinte: caso ele testemunhe contra o comparsa e este não testemunhar contra ele, sua pena será de 1 ano de prisão cabendo a seu colega cumprir 10 anos. Caso o comparsa também testemunhe contra ele sua pena será de 5 anos. Se, todavia, ambos se recusarem a testemunhar um contra o outro, ambos passarão dois anos na cadeia.

Tabela de pagamentos do dilema dos prisioneiros

	N	T
N	$(-2, -2)$	$(-10, -1)$
T	$(-1, -10)$	$(-5, -5)$

Jogos soma não zero, e dois jogadores

- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_m\}$ estratégias puras.
- $\Pi(e_i, f_j) = (\Pi_1(e_i, f_j), \Pi_2(e_i, f_j)) = (a_{ij}, b_{ij})$
- $A = (a_{ij})$ matriz de Luiza e $B = (b_{ij})$ matriz de Carlos.
- Se Luiza escolhe a estratégia mista $\mathbf{p}$ e Carlos escolhe $\mathbf{q}$ então o pagamento de Luiza será:
- $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$
- E de Carlos:
- $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} b_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t B \mathbf{q}$
- Note que agora não há o interesse racional de Carlos minimizar o pagamento de Luiza uma vez que isto não significa mais que ele estará aumentando seu pagamento.

Jogos soma não zero, e dois jogadores

- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_m\}$ estratégias puras.
- $\Pi(e_i, f_j) = (\Pi_1(e_i, f_j), \Pi_2(e_i, f_j)) = (a_{ij}, b_{ij})$
- $A = (a_{ij})$ matriz de Luiza e $B = (b_{ij})$ matriz de Carlos.
- Se Luiza escolhe a estratégia mista $\mathbf{p}$ e Carlos escolhe $\mathbf{q}$ então o pagamento de Luiza será:
- $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$
- E de Carlos:
- $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} b_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t B \mathbf{q}$
- Note que agora não há o interesse racional de Carlos minimizar o pagamento de Luiza uma vez que isto não significa mais que ele estará aumentando seu pagamento.

Jogos soma não zero, e dois jogadores

- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_m\}$ estratégias puras.
- $\Pi(e_i, f_j) = (\Pi_1(e_i, f_j), \Pi_2(e_i, f_j)) = (a_{ij}, b_{ij})$
- $A = (a_{ij})$ matriz de Luiza e $B = (b_{ij})$ matriz de Carlos.
- Se Luiza escolhe a estratégia mista $\mathbf{p}$ e Carlos escolhe $\mathbf{q}$ então o pagamento de Luiza será:
- $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$
- E de Carlos:
- $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} b_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t B \mathbf{q}$
- Note que agora não há o interesse racional de Carlos minimizar o pagamento de Luiza uma vez que isto não significa mais que ele estará aumentando seu pagamento.

Jogos soma não zero, e dois jogadores

- $\Sigma_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $\Sigma_2 = \{f_1, \dots, f_m\}$ estratégias puras.
- $\Pi(e_i, f_j) = (\Pi_1(e_i, f_j), \Pi_2(e_i, f_j)) = (a_{ij}, b_{ij})$
- $A = (a_{ij})$ matriz de Luiza e $B = (b_{ij})$ matriz de Carlos.
- Se Luiza escolhe a estratégia mista $\mathbf{p}$ e Carlos escolhe $\mathbf{q}$ então o pagamento de Luiza será:
- $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$
- E de Carlos:
- $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} b_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t B \mathbf{q}$
- Note que agora não há o interesse racional de Carlos minimizar o pagamento de Luiza uma vez que isto não significa mais que ele estará aumentando seu pagamento.

Jogos soma não zero, e dois jogadores

- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_m\}$ estratégias puras.
- $\Pi(e_i, f_j) = (\Pi_1(e_i, f_j), \Pi_2(e_i, f_j)) = (a_{ij}, b_{ij})$
- $A = (a_{ij})$ matriz de Luiza e $B = (b_{ij})$ matriz de Carlos.
- Se Luiza escolhe a estratégia mista $\mathbf{p}$ e Carlos escolhe $\mathbf{q}$ então o pagamento de Luiza será:
- $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$
- E de Carlos:
- $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} b_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t B \mathbf{q}$
- Note que agora não há o interesse racional de Carlos minimizar o pagamento de Luiza uma vez que isto não significa mais que ele estará aumentando seu pagamento.

Jogos soma não zero, e dois jogadores

- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_m\}$ estratégias puras.
- $\Pi(e_i, f_j) = (\Pi_1(e_i, f_j), \Pi_2(e_i, f_j)) = (a_{ij}, b_{ij})$
- $A = (a_{ij})$ matriz de Luiza e $B = (b_{ij})$ matriz de Carlos.
- Se Luiza escolhe a estratégia mista $\mathbf{p}$ e Carlos escolhe $\mathbf{q}$ então o pagamento de Luiza será:
- $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A\mathbf{q}$
- E de Carlos:
- $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} b_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t B\mathbf{q}$
- Note que agora não há o interesse racional de Carlos minimizar o pagamento de Luiza uma vez que isto não significa mais que ele estará aumentando seu pagamento.

Jogos soma não zero, e dois jogadores

- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_m\}$ estratégias puras.
- $\Pi(e_i, f_j) = (\Pi_1(e_i, f_j), \Pi_2(e_i, f_j)) = (a_{ij}, b_{ij})$
- $A = (a_{ij})$ matriz de Luiza e $B = (b_{ij})$ matriz de Carlos.
- Se Luiza escolhe a estratégia mista $\mathbf{p}$ e Carlos escolhe $\mathbf{q}$ então o pagamento de Luiza será:
- $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$
- E de Carlos:
- $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} b_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t B \mathbf{q}$
- Note que agora não há o interesse racional de Carlos minimizar o pagamento de Luiza uma vez que isto não significa mais que ele estará aumentando seu pagamento.

Equilíbrios de Nash

- Para que um par de estratégias puras (e_k, f_l) seja um perfil de equilíbrio de Nash devemos ter
- $a_{kl} \geq a_{il} \forall i$ e $b_{kl} \geq b_{kj} \forall j$
- Então para descobrirmos se existe equíbrios de estratégias puras, marcamos os maiores elementos em cada coluna de A e os maiores elementos em cada linha de B, se existir uma posição kl em que a_{kl} e b_{kl} estiverem marcados então (e_k, f_l) será um equilíbrio. Claro que pode não existir.

Equilíbrios de Nash

- Para que um par de estratégias puras (e_k, f_l) seja um perfil de equilíbrio de Nash devemos ter
- $a_{kl} \geq a_{il} \forall i$ e $b_{kl} \geq b_{kj} \forall j$
- Então para descobrirmos se existe equíbrios de estratégias puras, marcamos os maiores elementos em cada coluna de A e os maiores elementos em cada linha de B, se existir uma posição kl em que a_{kl} e b_{kl} estiverem marcados então (e_k, f_l) será um equilíbrio. Claro que pode não existir.

Equilíbrios de Nash

- Para que um par de estratégias puras (e_k, f_l) seja um perfil de equilíbrio de Nash devemos ter
- $a_{kl} \geq a_{il} \forall i$ e $b_{kl} \geq b_{kj} \forall j$
- Então para descobrirmos se existe equíbrios de estratégias puras, marcamos os maiores elementos em cada coluna de A e os maiores elementos em cada linha de B, se existir uma posição kl em que a_{kl} e b_{kl} estiverem marcados então (e_k, f_l) será um equilíbrio. Claro que pode não existir.

Um Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & 1 \\ 7 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Um Exemplo

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline (5,2) & (3,0) & (8,1) & (2,3) \\ \hline (6,3) & (5,4) & (7,4) & (1,1) \\ \hline (7,5) & (4,6) & (6,8) & (0,2) \\ \hline \end{array} \tag{2}$$

Um Exemplo

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline (5,2) & (3,0) & (8,1) & (2,3) \\ \hline (6,3) & (5,4) & (7,4) & (1,1) \\ \hline (7,5) & (4,6) & (6,8) & (0,2) \\ \hline \end{array} \tag{3}$$

Um Exemplo

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline (5,2) & (3,0) & ({\color{blue}8},1) & ({\color{blue}2},{\color{red}3}) \\ \hline (6,3) & ({\color{blue}5},{\color{red}4}) & (7,{\color{red}4}) & (1,1) \\ \hline ({\color{blue}7},5) & (4,6) & (6,{\color{red}8}) & (0,2) \\ \hline \end{array} \tag{4}$$

Equilíbrios na extensão mista

- $M_1 = \{(x, 1-x) : x \in [0,1]\}$ e
  $M_2 = \{(y, 1-y) : y \in [0,1]\}$: Estratégias mistas.
- $E(x,y) =$
  $(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}$
- é o pagamento de Luiza. O pagamento de Carlos é:
- $F(x,y) =$
  $(b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21})xy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}$

Equilíbrios na extensão mista

- $M_1 = \{(x, 1-x) : x \in [0,1]\}$ e
  $M_2 = \{(y, 1-y) : y \in [0,1]\}$: Estratégias mistas.
- $E(x,y) =$
  $(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}$
- é o pagamento de Luiza. O pagamento de Carlos é:
- $F(x,y) =$
  $(b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21})xy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}$

Equilíbrios na extensão mista

- $M_1 = \{(x, 1-x) : x \in [0,1]\}$ e
  $M_2 = \{(y, 1-y) : y \in [0,1]\}$: Estratégias mistas.
- $E(x,y) =$
  $(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}$
- é o pagamento de Luiza. O pagamento de Carlos é:
- $F(x,y) =$
  $(b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21})xy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}$

Equilíbrios na extensão mista

- $M_1 = \{(x, 1-x) : x \in [0,1]\}$ e $M_2 = \{(y, 1-y) : y \in [0,1]\}$: Estratégias mistas.
- $E(x,y) = (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}$
- é o pagamento de Luiza. O pagamento de Carlos é:
- $F(x,y) = (b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21})xy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}$

Conjuntos dos Perfís racionais

- Para achar os equilíbrios de Nash achamos os perfís racionais.
- Para Luiza:
- $R_1 = \{(x, y) : E(x, y) = \sup_{\bar{x} \in [0,1]} E(\bar{x}, y)\}$
- E para Carlos:
- $R_2 = \{(x, y) : F(x, y) = \sup_{\bar{y} \in [0,1]} F(x, \bar{y})\}$
- Encontramos $R_1 \cap R_2$.

Conjuntos dos Perfís racionais

- Para achar os equilíbrios de Nash achamos os perfís racionais.
- Para Luiza:
- $R_1 = \{(x,y) : E(x,y) = \sup_{\bar{x}\in[0,1]} E(\bar{x},y)\}$
- E para Carlos:
- $R_2 = \{(x,y) : F(x,y) = \sup_{\bar{y}\in[0,1]} F(x,\bar{y})\}$
- Encontramos $R_1 \cap R_2$.

Conjuntos dos Perfís racionais

- Para achar os equilíbrios de Nash achamos os perfís racionais.
- Para Luiza:
- $R_1 = \{(x, y) : E(x, y) = \sup_{\bar{x} \in [0,1]} E(\bar{x}, y)\}$
- E para Carlos:
- $R_2 = \{(x, y) : F(x, y) = \sup_{\bar{y} \in [0,1]} F(x, \bar{y})\}$
- Encontramos $R_1 \cap R_2$.

Conjuntos dos Perfís racionais

- Para achar os equilíbrios de Nash achamos os perfís racionais.
- Para Luiza:
- $R_1 = \{(x, y) : E(x, y) = \sup_{\bar{x}\in[0,1]} E(\bar{x}, y)\}$
- E para Carlos:
- $R_2 = \{(x, y) : F(x, y) = \sup_{\bar{y}\in[0,1]} F(x, \bar{y})\}$
- Encontramos $R_1 \cap R_2$.

Um exemplo da estratégia descrita acima

O jogo é descrito pela seguinte bimatrix de pagamento

$(3,2)$	$(2,4)$
$(2,3)$	$(4,-3)$

Pagamento de Luiza e Carlos

- O pagamento de Luiza será
- $E(x, y) = (3y - 2)x - 2y + 4$
- Pagamento de Carlos:
- $F(x, y) = (-8x + 6)y + 7x - 3$

Pagamento de Luiza e Carlos

- O pagamento de Luiza será
- $E(x, y) = (3y - 2)x - 2y + 4$
- Pagamento de Carlos:
- $F(x, y) = (-8x + 6)y + 7x - 3$

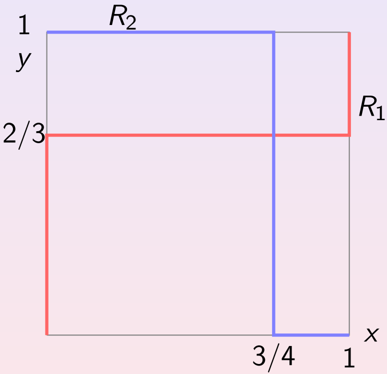
Pagamento de Luiza e Carlos

- O pagamento de Luiza será
- $E(x, y) = (3y - 2)x - 2y + 4$
- Pagamento de Carlos:
- $F(x, y) = (-8x + 6)y + 7x - 3$

Pagamento de Luiza e Carlos

- O pagamento de Luiza será
- $E(x, y) = (3y - 2)x - 2y + 4$
- Pagamento de Carlos:
- $F(x, y) = (-8x + 6)y + 7x - 3$

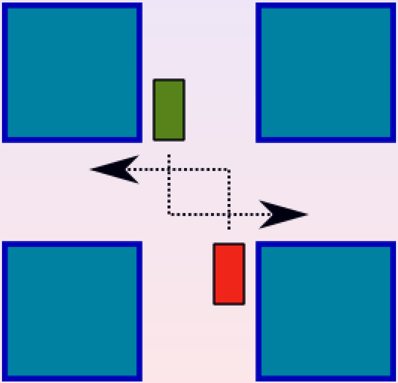
Conjuntos R_1 e R_2



$(3/4, 1/4)$ e $(2/3, 1/3)$ é equilíbrios de Nash.

Jogo do Cruzamento

Neste Jogo Carlos e Luiza encontram-se num cruzamento.



As Matrizes de Pagamentos

$$A = \begin{pmatrix} -t_2/2 - \epsilon & -t_2 \\ 0 & -t_2/2 - \delta \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -t_1/2 - \epsilon & 0 \\ -t_1 & -t_1/2 - \delta \end{pmatrix}$$

As Estratégias

- Cada um pode esperar (E) e prosseguir (P).
- t_1 é o tempo para Luiza completar a conversão.
- t_2 é o tempo pa Carlos completar a conversão.
- ϵ atraso devido a mútua espera.
- δ atraso devido ao mútuo avanço.

As Estratégias

- Cada um pode esperar (E) e prosseguir (P).
- t_1 é o tempo para Luiza completar a conversão.
- t_2 é o tempo pa Carlos completar a conversão.
- ϵ atraso devido a mútua espera.
- δ atraso devido ao mútuo avanço.

As Estratégias

- Cada um pode esperar (E) e prosseguir (P).
- t_1 é o tempo para Luiza completar a conversão.
- t_2 é o tempo pa Carlos completar a conversão.
- ϵ atraso devido a mútua espera.
- δ atraso devido ao mútuo avanço.

As Estratégias

- Cada um pode esperar (E) e prosseguir (P).
- t_1 é o tempo para Luiza completar a conversão.
- t_2 é o tempo pa Carlos completar a conversão.
- ϵ atraso devido a mútua espera.
- δ atraso devido ao mútuo avanço.

As Estratégias

- Cada um pode esperar (E) e prosseguir (P).
- t_1 é o tempo para Luiza completar a conversão.
- t_2 é o tempo pa Carlos completar a conversão.
- ϵ atraso devido a mútua espera.
- δ atraso devido ao mútuo avanço.

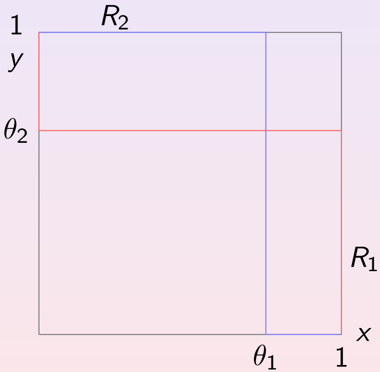
Fórmula dos pagamentos dos jogadores

- $E(x,y) = (-(\epsilon+\delta)y + (\delta - t_2/2))x + (t_2/2+\delta)y - t_2/2 - \delta$
- $F(x,y) = (-(\epsilon+\delta)x + (\delta - t_1/2))y + (t_1/2+\delta)x - t_1/2 - \delta$

Fórmula dos pagamentos dos jogadores

- $E(x,y) = (-(\epsilon+\delta)y + (\delta - t_2/2))x + (t_2/2+\delta)y - t_2/2 - \delta$
- $F(x,y) = (-(\epsilon+\delta)x + (\delta - t_1/2))y + (t_1/2+\delta)x - t_1/2 - \delta$

Representação Gráfica de R_1 e R_2



O Jogo Hawk-Dove

Dois leões competem pela posse de território. Se dois leões se encontram numa disputa cada um deles pode agir de duas maneiras: comportamento agressivo (Hawk), ou ele apenas ruge ameaçadoramente mas foge se vier um ataque (Dove). Digamos que o leão Jubinha encontra-se com o Sansão e iniciam a competição. Se Jubinha agir como Hawk e Sansão como Dove, Jubinha ficará com o território e ganhará ρ pontos. Se Sansão reagir, ou seja, agir com Hawk também, aí haverá luta com chances iguais de ganho para cada um dos lados. O lado ganhador receberá ρ e o perdedor perderá C. O valor esperado de ganho de Jubinha é $\rho/2 - C/2$. Quando Jubinha agir como dove, não ganha nada se Sansão for Hawk (ele foge) e ganhará metade das disputas por rugidos se Sansão for Dove.

As matrizes deste Jogo

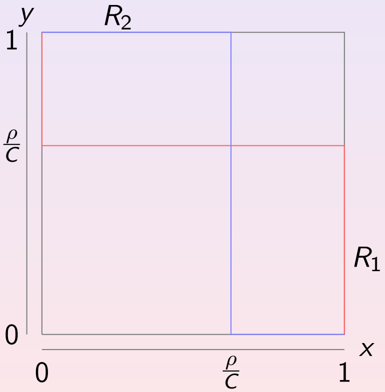
$$A = \begin{pmatrix} 1/2(\rho - C) & \rho \\ 0 & 1/2\rho \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1/2(\rho - C) & 0 \\ \rho & 1/2\rho \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Funções de pagamentos

$$E(x,y) = (-\frac{C}{2}y + \frac{\rho}{2})x - \frac{\rho}{2}y + \frac{\rho}{2} \quad (6)$$

$$F(x,y) = (-\frac{C}{2}x + \frac{\rho}{2})y - \frac{\rho}{2}x + \frac{\rho}{2} \quad (7)$$

Identificação dos pontos de equilíbrio



Jogo Populacional

- Um jogo em que $A = B^t$ como o jogo Hawk-Dove é chamado de Jogo Populacional.
- Neste caso, o jogo é simétrico e não é importante quem tem as linhas ou colunas.
- A idéia é que este jogo ocorra entre os elementos de uma população, constantemente e de forma aleatória.
- A idéia do jogo populacional foi introduzida por Maynard-Smith.

Jogo Populacional

- Um jogo em que $A = B^t$ como o jogo Hawk-Dove é chamado de Jogo Populacional.
- Neste caso, o jogo é simétrico e não é importante quem tem as linhas ou colunas.
- A idéia é que este jogo ocorra entre os elementos de uma população, constantemente e de forma aleatória.
- A idéia do jogo populacional foi introduzida por Maynard-Smith.

Jogo Populacional

- Um jogo em que $A = B^t$ como o jogo Hawk-Dove é chamado de Jogo Populacional.
- Neste caso, o jogo é simétrico e não é importante quem tem as linhas ou colunas.
- A idéia é que este jogo ocorra entre os elementos de uma população, constantemente e de forma aleatória.
- A idéia do jogo populacional foi introduzida por Maynard-Smith.

Jogo Populacional

- Um jogo em que $A = B^t$ como o jogo Hawk-Dove é chamado de Jogo Populacional.
- Neste caso, o jogo é simétrico e não é importante quem tem as linhas ou colunas.
- A idéia é que este jogo ocorra entre os elementos de uma população, constantemente e de forma aleatória.
- A idéia do jogo populacional foi introduzida por Maynard-Smith.

Escolha dos equilíbrios de Nash

- Em alguns jogos podem ter muitos equilíbrios de Nash.
- Se estes equilibrios dão o mesmo pagamento para os jogadores e podem ser alternados, são soluções de Nash do Jogo.
- Se isto não acontecer são necessários outros critérios para escolha de um equilíbrio.
- No caso de jogos populacionais, são os equilibrios evolucionáriamente estáveis.

Escolha dos equilíbrios de Nash

- Em alguns jogos podem ter muitos equilíbrios de Nash.
- Se estes equilibrios dão o mesmo pagamento para os jogadores e podem ser alternados, são soluções de Nash do Jogo.
- Se isto não acontecer são necessários outros critérios para escolha de um equilíbrio.
- No caso de jogos populacionais, são os equilibrios evolucionáriamente estáveis.

Escolha dos equilíbrios de Nash

- Em alguns jogos podem ter muitos equilíbrios de Nash.
- Se estes equilibrios dão o mesmo pagamento para os jogadores e podem ser alternados, são soluções de Nash do Jogo.
- Se isto não acontecer são necessários outros critérios para escolha de um equilíbrio.
- No caso de jogos populacionais, são os equilibrios evolucionáriamente estáveis.

Escolha dos equilíbrios de Nash

- Em alguns jogos podem ter muitos equilíbrios de Nash.
- Se estes equilibrios dão o mesmo pagamento para os jogadores e podem ser alternados, são soluções de Nash do Jogo.
- Se isto não acontecer são necessários outros critérios para escolha de um equilíbrio.
- No caso de jogos populacionais, são os equilibrios evolucionáriamente estáveis.

Estratégias não invadíveis

- Por causa da simetria de um jogo populacional só consideramos uma função de pagamento.
- No caso H-D: $E(x,y) = (-\frac{C}{2}y + \frac{\rho}{2})x - \frac{\rho}{2}y + \frac{\rho}{2}$.
- Uma estratégia x^* é não invadível se:
- $E(x^*,x^*) \geq E(y,x^*)$ para todo $y \in [0,1]$
- $E(x^*,x^*) = E(y,x^*)$ então $E(x^*,y) > E(y,y)$

Estratégias não invadíveis

- Por causa da simetria de um jogo populacional só consideramos uma função de pagamento.
- No caso H-D: $E(x, y) = (-\frac{C}{2}y + \frac{\rho}{2})x - \frac{\rho}{2}y + \frac{\rho}{2}$.
- Uma estratégia x^* é não invadível se:
- $E(x^*, x^*) \geq E(y, x^*)$ para todo $y \in [0, 1]$
- $E(x^*, x^*) = E(y, x^*)$ então $E(x^*, y) > E(y, y)$

Estratégias não invadíveis

- Por causa da simetria de um jogo populacional só consideramos uma função de pagamento.
- No caso H-D: $E(x,y) = (-\frac{C}{2}y + \frac{\rho}{2})x - \frac{\rho}{2}y + \frac{\rho}{2}$.
- Uma estratégia x^* é não invadível se:
- $E(x^*,x^*) \geq E(y,x^*)$ para todo $y \in [0,1]$
- $E(x^*,x^*) = E(y,x^*)$ então $E(x^*,y) > E(y,y)$

Estratégias não invadíveis

- Por causa da simetria de um jogo populacional só consideramos uma função de pagamento.
- No caso H-D: $E(x,y) = (-\frac{C}{2}y + \frac{\rho}{2})x - \frac{\rho}{2}y + \frac{\rho}{2}$.
- Uma estratégia x^* é não invadível se:
- $E(x^*,x^*) \geq E(y,x^*)$ para todo $y \in [0,1]$
- $E(x^*,x^*) = E(y,x^*)$ então $E(x^*,y) > E(y,y)$

Estratégias não invadíveis

- Por causa da simetria de um jogo populacional só consideramos uma função de pagamento.
- No caso H-D: $E(x, y) = (-\frac{C}{2}y + \frac{\rho}{2})x - \frac{\rho}{2}y + \frac{\rho}{2}$.
- Uma estratégia x^* é não invadível se:
- $E(x^*, x^*) \geq E(y, x^*)$ para todo $y \in [0, 1]$
- $E(x^*, x^*) = E(y, x^*)$ então $E(x^*, y) > E(y, y)$

Interpretação da estratégia não invadível

Se a maioria da população usa a estratégia x^* e um invasor da espécie usa a estratégia y então o ganho do invasor contra um elemento que usa a estratégia da maioria x^* não será maior que o ganho de alguém com a estratégia comum x^*. Ainda que o invasor logre igualar o ganho contra x^*, contra outro invasor ele sairia perdendo.

Equilíbrio evolucionariamente estável no Hawk-Dove

- (x^*, x^*) é um equilíbrio de Nash. Chamaremos este equilíbrio de evolucionariamente estáveis.
- No jogo Hawk-Dove o par $(\rho/C, \rho/C)$ é um equilíbrio evolucionariamente estável.
- Este equilíbrio tem uma caracterização dinâmica.

Equilíbrio evolucionariamente estável no Hawk-Dove

- (x^*, x^*) é um equilíbrio de Nash. Chamaremos este equilíbrio de evolucionariamente estáveis.
- No jogo Hawk-Dove o par $(\rho/C, \rho/C)$ é um equilíbrio evolucionariamente estável.
- Este equilíbrio tem uma caracterização dinâmica.

Equilíbrio evolucionariamente estável no Hawk-Dove

- (x^*, x^*) é um equilíbrio de Nash. Chamaremos este equilíbrio de evolucionariamente estáveis.
- No jogo Hawk-Dove o par $(\rho/C, \rho/C)$ é um equilíbrio evolucionariamente estável.
- Este equilíbrio tem uma caracterização dinâmica.

Equação do replicador

- Equação geral do replicador para jogo populacional $n \times n$.
- $\dot{x}_i(t) = x_i(t)(E(i, \mathbf{x}) - E(\mathbf{x}, \mathbf{x}))$
- $\dot{x}_i(t) = e_i A\mathbf{x} - \mathbf{x}A\mathbf{x}$
- Equilíbrios assintóticamente estáveis dão equilíbrios evolucionariamente estáveis.

Equação do replicador

- Equação geral do replicador para jogo populacional $n \times n$.
- $\dot{x}_i(t) = x_i(t)(E(i, \mathbf{x}) - E(\mathbf{x}, \mathbf{x}))$
- $\dot{x}_i(t) = e_i A\mathbf{x} - \mathbf{x}A\mathbf{x}$
- Equilíbrios assintóticamente estáveis dão equilíbrios evolucionariamente estáveis.

Equação do replicador

- Equação geral do replicador para jogo populacional $n \times n$.
- $\dot{x}_i(t) = x_i(t)(E(i, \mathbf{x}) - E(\mathbf{x}, \mathbf{x}))$
- $\dot{x}_i(t) = e_i A\mathbf{x} - \mathbf{x}A\mathbf{x}$
- Equilíbrios assintóticamente estáveis dão equilíbrios evolucionariamente estáveis.

Equação do replicador

- Equação geral do replicador para jogo populacional $n \times n$.
- $\dot{x}_i(t) = x_i(t)(E(i, \mathbf{x}) - E(\mathbf{x}, \mathbf{x}))$
- $\dot{x}_i(t) = e_i A\mathbf{x} - \mathbf{x}A\mathbf{x}$
- Equilíbrios assintóticamente estáveis dão equilíbrios evolucionariamente estáveis.

Exemplo do Hawk-Dove

- Neste caso só temos duas estratégias e a equação do Replicador se reduz a
- $\dot{x} = x(E(1,x) - E(x,x))$ ou
- $\dot{x} = \frac{x}{2}(Cx^2 - (\rho + C)x + \rho) = F(x)$

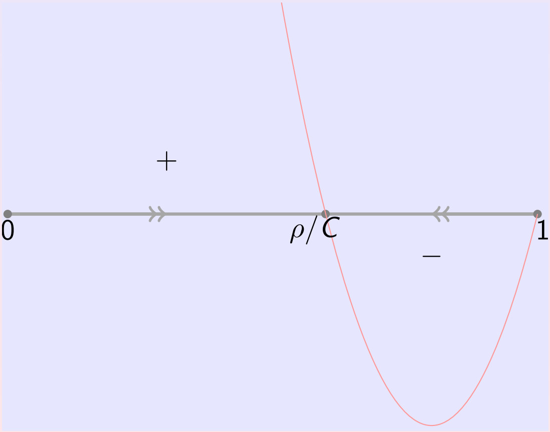
Exemplo do Hawk-Dove

- Neste caso só temos duas estratégias e a equação do Replicador se reduz a
- $\dot{x} = x(E(1,x) - E(x,x))$ ou
- $\dot{x} = \frac{x}{2}(Cx^2 - (\rho + C)x + \rho) = F(x)$

Exemplo do Hawk-Dove

- Neste caso só temos duas estratégias e a equação do Replicador se reduz a
- $\dot{x} = x(E(1,x) - E(x,x))$ ou
- $\dot{x} = \frac{x}{2}(Cx^2 - (\rho + C)x + \rho) = F(x)$

Determinando os pontos de equilíbrios estáveis



Bibliografia

- Peter Morris **Introduction to Game Theory** - Springer Verlag, 1994.
- Martin J. Osborne e Ariel Rubinstein **A Course in Game Theory** - MIT Press, 1994.
- Michael Mesterton-Gibbons **An Introduction to Game-Theoretic Modelling** second ed. AMS, 2001.
- Saul Stahl **A Gentle Introduction to Game Theory** AMS, 1999.

Mais referências

- J Maynard Smith **Evolution and the Theory of Games** CUP, 1974.
- J.von Neumann e O. Morgenstern **Theory of Games and Economic Behavior** J. Willey Sons, 1944.
- J. Harsanyi e R. Selten **A General Theory of Equilibrium Selection in Games** MIT Press, 1988.