

PME-5015

Tópicos da Teoria da Elasticidade

PPGEM – 1º Ciclo / 2018

Prof. Roberto Ramos Jr.

Estudo da Torção

Tópicos do livro-texto indicados para leitura complementar:

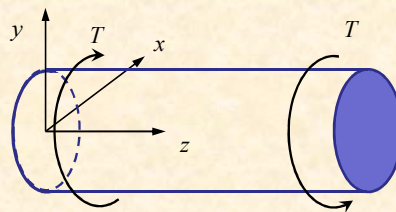
- Cap.10: Torção

- ✓ §104 – Torção de barras de eixo reto
- ✓ §105 – Torção de barras de seção transversal elíptica
- ✓ §106 – Outras soluções elementares
- ✓ §107 – Analogia da membrana
- ✓ §108 – Torção de barras de seção retangular estreita
- ✓ §109 – Torção de barras de seção retangular
- ✓ §110 – Resultados adicionais
- ✓ §111 – Solução de problemas de torção pelo método de energia
- ✓ §112 – Torção de perfis laminados
- ✓ §116 – Torção de tubos de parede fina
- ✓ §118 – Torção de barra em que uma S.T. permanece plana

1 – Torção de barras de eixo reto (§104)

* Solução de Coulomb para torção uniforme (seções circulares):

- $T = \text{constante}$ (não varia ao longo do eixo da barra);
- Barra com eixo reto e S.T. uniforme;
- Seções transversais da barra permanecem planas e giram sem apresentar distorção durante a torção.



3

Campo de deslocamentos:

$$\begin{cases} u_r = 0 \\ u_\theta = \beta r z \\ u_z = 0 \end{cases}$$

Campo de deformações:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0 & \gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} = \beta z + 0 - \beta z = 0 \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 & \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 & \gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = \beta r \end{cases}$$

Campo de tensões:

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_r = 0 & \tau_{r\theta} = G\gamma_{r\theta} = 0 \\ \sigma_\theta = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_\theta = 0 & \tau_{rz} = G\gamma_{rz} = 0 \\ \sigma_z = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z = 0 & \tau_{\theta z} = G\gamma_{\theta z} = G\beta r \end{cases}$$

4

Verifica-se que as equações diferenciais de equilíbrio ficam todas satisfeitas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2 \cdot \tau_{r\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0\end{aligned}$$

E, naturalmente as equações de compatibilidade de deformações também são atendidas já que todas as componentes de deformações foram obtidas a partir dos campos de deslocamentos (contínuos e com derivadas contínuas).

5

A relação entre β e o momento de torção é obtida a partir de:

$$T = \iint_A \tau_{z\theta} \cdot r \cdot dA = \iint_A (G\beta r) \cdot r \cdot dA = G\beta \iint_A r^2 dA = GJ\beta$$

Resultando as demais relações conhecidas da R.M.:

$$\tau_{\theta z} = G\beta r = \frac{T}{J} \cdot r$$

$$\gamma_{\theta z} = \beta r = \frac{T}{GJ} r$$

$$\beta = \frac{\Delta\varphi}{L} = \frac{T}{GJ} \Leftrightarrow \Delta\varphi = \frac{TL}{GJ}$$

6

* Solução para outras seções transversais:

Baseando-se na teoria proposta por Coulomb, Navier aplicou o mesmo procedimento a barras de S.T. não-circular, chegando a conclusões errôneas sobre o campo de deslocamentos e tensões nas barras, como:

- i) O ângulo de torção de uma barra é inversamente proporcional ao momento polar de inércia da S.T. em relação ao seu centroide e
- ii) A máxima tensão cisalhante ocorre nos pontos da S.T. mais afastados do centroide.

A solução correta foi obtida por Saint-Venant que utilizou o chamado método semi-inverso para resolver o problema geral da torção de barras prismáticas por conjugados aplicados em suas extremidades.

7

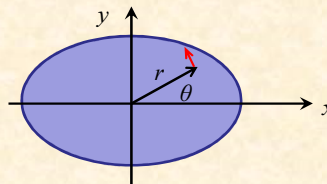
A solução de Saint-Venant para o caso da torção uniforme:

($T = \text{constante}$, S.T. uniforme, eixo reto, empenamento livre)

Campo de deslocamentos:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = 0 \\ u_\theta = \beta r z \\ u_z = \beta \psi(r, \theta) \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = -\beta y z \\ v = \beta x z \\ w = \beta \psi(x, y) \end{array} \right.$$

Onde: $\psi(x, y)$, ou $\psi(r, \theta)$, é a função empenamento.



8

Campo de deformações:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\beta z + \beta z = 0 \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \end{cases}$$

Campo de tensões:

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_x = 0 & \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 0 \\ \sigma_y = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_y = 0 & \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G\beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \\ \sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z = 0 & \tau_{zx} = G\gamma_{zx} = G\beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \end{cases}$$

9

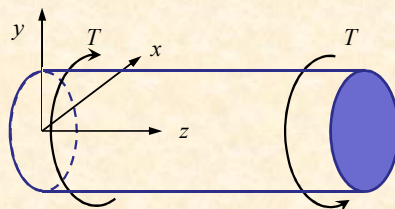
Substituindo as tensões nas equações diferenciais de equilíbrio, teremos:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \nabla^2 \psi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Logo: $\psi(x, y)$ deve ser harmônica!

10

Verificaremos agora as condições de contorno:



Estando a superfície lateral totalmente descarregada, teremos:

$$\vec{s} = \vec{\rho} = T[\vec{n}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y \end{Bmatrix}$$

Devemos ter: $\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y = 0$

11

Ou seja: $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right)n_x + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right)n_y = 0$

Mas: $\begin{cases} n_x = \cos \alpha \\ n_y = \sin \alpha \end{cases}$

E, sendo $\vec{t} = (t_x, t_y) = (-\sin \alpha, \cos \alpha) = (-n_y, n_x)$ o versor tangente ao contorno.

Teremos: $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \cdot (n_x, n_y) = (x, y) \cdot (-n_y, n_x) = (x, y) \cdot (t_x, t_y)$

Ou: $\boxed{\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{t}}$

Logo, as condições que a função empenamento deve satisfazer são:

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi(x, y) = 0 & \text{(no domínio)} \\ \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{t} & \text{(no contorno)} \end{cases}$$

12

A nova relação entre β e o momento de torção é obtida a partir de:

$$T = \iint_A (\tau_{zy} \cdot x - \tau_{zx} \cdot y) dA$$

E lembrando que:

$$\tau_{zy} = G\beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \quad \tau_{zx} = G\beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right)$$

Virá:

$$T = G\beta \iint_A \left(x^2 + y^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot x - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot y \right) dA$$

Designando:
$$I_t = \iint_A \left(x^2 + y^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot x - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot y \right) dA$$

Teremos:
$$T = G\beta I_t$$

13

A função de tensão de Prandtl:

Um método alternativo para a solução do problema de torção de barras prismáticas é através do uso da função de tensão introduzida por Prandtl. Observando que no problema visto as equações diferenciais de equilíbrio se reduzem apenas a:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

E, notando que as duas primeiras ficam prontamente satisfeitas uma vez que as tensões cisalhantes não dependem de z , podemos verificar que a 3ª equação de equilíbrio fica também atendida se definirmos tais tensões a partir de uma função (denominada função de tensão de Prandtl) tal que:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

14

Através da forma com que as tensões cisalhantes foram definidas, obtemos diretamente as relações entre a função empenamento e a função de Prandtl. Assim:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = G\beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = G\beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \end{cases}$$

Eliminando a função empenamento das relações acima, podemos mostrar que a função de Prandtl deve satisfazer a seguinte condição no domínio:

$$\nabla^2 \phi(x, y) = -2G\beta$$

15

E a condição sobre o contorno (superfície lateral descarregada) fica: expressa da seguinte forma:

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \cos \alpha - \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \sin \alpha = 0$$

Porém: $\vec{t} = (t_x, t_y) = (-\sin \alpha, \cos \alpha) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$

Assim: $\frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0$

Isto significa que a função de tensão deve ser constante ao longo do contorno que forma a seção transversal. No caso em que esta é simplesmente conexa (por exemplo, para barras maciças), esta constante pode ser escolhida arbitrariamente, sendo que no estudo a seguir consideraremos que ela seja nula no contorno.

16

Condições de contorno nas superfícies extremas:

Consideremos, agora, as condições de contorno nas superfícies extremas da barra, bastando analisar o caso da superfície de orientação positiva. Neste caso:

$$\vec{s} = \vec{\rho} = T[\vec{n}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Assim: } \begin{cases} Q_x = \iint_A \tau_{zx} dA = \iint_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy = 0 \\ Q_y = \iint_A \tau_{zy} dA = - \iint_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy = 0 \\ T = \iint_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = - \iint_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} x \right) dx dy - \iint_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} y \right) dx dy \Leftrightarrow \\ T = 2 \iint_A \phi(x, y) dx dy \end{cases}$$

17

2 – Torção de barras de S.T. elíptica (§105)

Consideremos a função: $\psi(x, y) = Cx, y$

que claramente satisfaz a condição: $\nabla^2 \psi(x, y) = 0$

Desta forma, tomemos a função dada como sendo a função empenamento associada ao problema de torção de uma barra (cuja seção transversal será ainda determinada).

Da imposição de que a superfície lateral deve estar descarregada, temos:

$$\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{t}$$

$$\text{Onde: } \vec{\nabla} \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = (Cy, Cx)$$

$$\vec{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha) = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right)$$

$$\vec{r} = (x, y)$$

$$\vec{t} = (t_x, t_y) = (-\sin \alpha, \cos \alpha) = \left(-\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$$

18

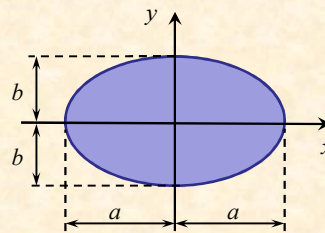
Levando a: $Cy \frac{dy}{ds} - Cx \frac{dx}{ds} = x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds}$

Ou seja: $(1+C)x \frac{dx}{ds} + (1-C)y \frac{dy}{ds} = 0 \Leftrightarrow (1+C) \frac{d}{ds}(x^2) + (1-C) \frac{d}{ds}(y^2) = 0$

Logo: $\frac{d}{ds}((1+C)x^2 + (1-C)y^2) = 0 \Leftrightarrow (1+C)x^2 + (1-C)y^2 = K$

Designando:
$$\begin{cases} \frac{(1+C)}{K} = \frac{1}{a^2} \\ \frac{(1-C)}{K} = \frac{1}{b^2} \end{cases}$$

Teremos: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



19

Das relações obtidas, é imediato verificar que:

$$K = (1+C)a^2 = (1-C)b^2 \Leftrightarrow C = -\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)$$

Logo, o empenamento de uma seção transversal elíptica de semi-eixos a e b fica dado por:

$$w = \beta \psi(x, y) = -\beta \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right) xy$$

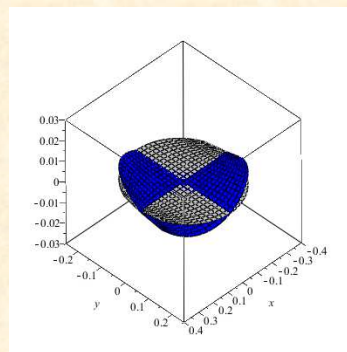
Plotagem para:

$$a = 0,3 \text{ m};$$

$$b = 0,2 \text{ m};$$

$$\beta = 0,5 \text{ rad/m}.$$

(apenas para visualizar)



20

O momento de inércia a torção será dado por:

$$I_t = \iint_A \left(x^2 + y^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot x - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot y \right) dA = \iint_A ((1+C)x^2 + (1-C)y^2) dA$$

$$I_t = (1+C) \iint_A x^2 dA + (1-C) \iint_A y^2 dA$$

E, como:
$$\begin{cases} I_y = \iint_A x^2 dA = \frac{\pi b a^3}{4} \\ I_x = \iint_A y^2 dA = \frac{\pi a b^3}{4} \end{cases}$$

Virá, após a substituição:
$$I_t = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

E, assim:
$$T = G I_t \cdot \beta = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \cdot G \beta$$

21

3 – Outras soluções elementares (§106)

Verifica-se que a solução do problema da torção de uma barra cuja seção transversal é um triângulo equilátero é dada pela função de Prandtl dada por:

$$\phi(x, y) = -G\beta \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2a}(x^3 - 3xy^2) - \frac{2}{27}a^2 \right]$$

Mostra-se ainda que a relação entre o momento de torção e o ângulo de giro por unidade de comprimento neste caso é:

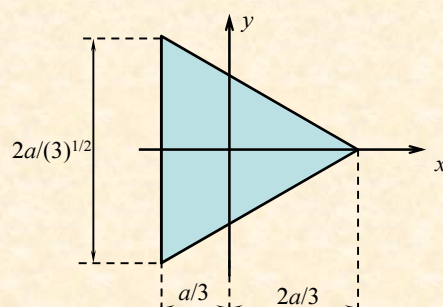
$$T = G\beta \frac{a^4}{15\sqrt{3}}$$

onde a corresponde à altura do triângulo equilátero.

22

A máxima tensão cisalhante ocorre nos pontos médios dos lados do triângulo e vale:

$$\tau_{\max} = G\beta \frac{a}{2}$$



23

4 – Analogia da membrana (§107)

Na solução de problemas de torção de barras prismáticas, a analogia da membrana, introduzida por Prandtl, fornece resultados bastante satisfatórios.

Equação da membrana:

$$\nabla^2 z(x, y) = -\frac{q}{S}$$

Condições sobre o contorno da membrana:

$$z(x_s, y_s) = 0$$

Equação da torção de barras:

$$\nabla^2 \phi(x, y) = -2G\beta$$

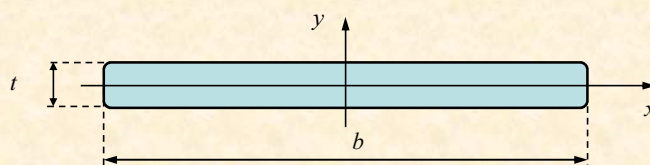
Condições sobre o contorno da barra:

$$\phi(x_s, y_s) = 0$$

24

5 – Torção de barras de S.T. retangular estreita (§108)

Utilizaremos a função de Prandtl para a solução do problema de torção de barras de S.T. retangular estreita.



Devemos ter:
$$\begin{cases} \nabla^2 \phi(x, y) = -2G\beta & \text{(no domínio)} \\ \phi = 0 & \text{(no contorno)} \end{cases}$$

E, lembrando ainda que: $\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ e $\tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$

25

Considerando, então, que a tensão cisalhante τ_{zy} é praticamente desprezível ao longo de quase toda a seção transversal:

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \cong 0 \Leftrightarrow \phi \cong \phi(y)$$

Assim:

$$\nabla^2 \phi(x, y) = -2G\beta \Leftrightarrow \frac{d^2 \phi}{dy^2} \cong -2G\beta \Leftrightarrow \phi(y) \cong -G\beta y^2 + C_1 y + C_2$$

As constantes de integração podem ser encontradas impondo-se que a função de Prandtl deve se anular no contorno. Então:

$$\phi|_{y=t/2} = 0 \Leftrightarrow C_1 \frac{t}{2} + C_2 = G\beta \frac{t^2}{4}$$

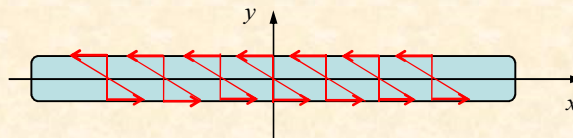
$$\phi|_{y=-t/2} = 0 \Leftrightarrow -C_1 \frac{t}{2} + C_2 = G\beta \frac{t^2}{4}$$

26

Resulta: $C_1 = 0$ e $C_2 = G\beta \frac{t^2}{4}$

E a função de tensão fica: $\phi(y) \cong -G\beta \left(y^2 - \frac{t^2}{4} \right)$

Resultando:
$$\begin{cases} \tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \cong -2G\beta y \\ y = \frac{t}{2} \Rightarrow \tau_{xy} \cong -G\beta t \\ y = -\frac{t}{2} \Rightarrow \tau_{xy} \cong G\beta t \end{cases}$$



27

O torque devido às tensões τ_{xy} será responsável pela metade do torque total. Desta forma podemos escrever:

$$T = \iint_A (\tau_{xy}x - \tau_{yx}y) dA \Leftrightarrow T = 2 \iint_A \phi(x, y) dx dy$$

$$T = -2 \iint_A G\beta \left(y^2 - \frac{t^2}{4} \right) dx dy$$

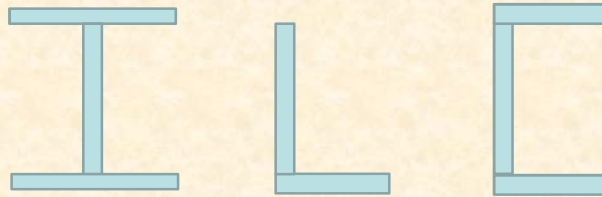
$$T = -2G\beta b \int_{-t/2}^{t/2} \left(y^2 - \frac{t^2}{4} \right) dy = -2G\beta b \left(\frac{y^3}{3} - \frac{t^2 y}{4} \right)_{-t/2}^{t/2}$$

$$T = G\beta \frac{bt^3}{3}$$

28

6 – Torção de perfis laminados (§112)

Aplicando os resultados obtidos para barras de seção retangular estreita a perfis laminados como os indicados abaixo, teremos:



$$T \cong G\beta \sum_{i=1}^n \frac{b_i t_i^3}{3}$$

$$|\tau_{máx,i}| \cong G\beta t_i$$

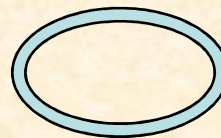
29

7 – Torção de tubos de parede fina (§116)

Para o caso da torção pura de tubos de parede fina, como os indicados na figura abaixo, valem as fórmulas:



$$T \cong 2qA$$



$$I_t \cong \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}}$$

Onde: $q = \tau(s)I(s)$ (fluxo de cisalhamento)

A = área interna à linha de meia espessura da seção transversal

30