MAE515 programação linear e jogos

Pedro A Tonelli

16 de maio de 2018

1 introdução

Suponha que tenhamos um jogo de soma zero, com dois jogadores, cada um com um conjunto finito de estratégia puras. A matriz de pagamento do jogador L (das linhas) é chamada matriz de jogo A. Ela é uma matriz de dimensão $m \times n$ e chamaremos seus coeficientes de (a_{ij}). Encontrar a solução deste jogo é

1. achar o valor do jogo $v = \max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \min_{\mathbf{q}} \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$
2. e achar as estratégias mistas $\mathbf{p}^*$ e $\mathbf{q}^*$ tais que

$$v = \min_j E(\mathbf{p}^*, j) = \max_i E(i, \mathbf{q}^*)$$

Para resolver o problema é necessário avaliar o jogo com relação aos resultados dos dois jogadores separadamente. Vamos fazer somente a análise do jogador das colunas. O outro caso foi feito na aula.
O valor de coluna da matriz deve satisfazer $v \geq \max_i E(i, \mathbf{q}) = \sum_j a_{ij} q_j$. Supondo que $v > 0$ e definindo as variáveis $x_j = q_j/v$, reescrevemos está condição como o conjunto de m desigualdades $\sum_j a_{ij} x_j \leq 1$. Além disso precisamos garantir que o v seja o menor possível. Como sabemos que $\sum_j x_j = 1/v$ transformamos o problema original em

$$\text{Maximizar: } \sum_j x_j$$

sujeito a:

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq 1$$

Este é um problema primal de otimização linear.

2 Problema primal e dual

São dados uma matriz com coeficientes reais de dimensão $m \times n$ e vetores $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$. O problema primal é encontrar um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e um número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que μ é o valor máximo da função $f(\mathbf{x}) =< \mathbf{b}, \mathbf{x} >= \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$ restrito ao conjunto dos vetores que satisfazem $A\mathbf{x} \leq \mathbf{c}$, vamos escrever este problema de forma resumida como:

$$\text{max: } < \mathbf{b}, \mathbf{x} > +M \tag{1}$$

$$\text{suj: } A\mathbf{x} \leq \mathbf{c} \tag{2}$$

O conjunto dos vetores factíveis é

$$\mathbb{V}_p = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \leq \mathbf{c}\}$$

O elemento $\mathbf{x}^* \in \mathbb{V}_p$, tal que $f(\mathbf{x}^*) = \mu$ é chamado de vetor ótimo. Este elemento pode não existir, e neste caso dizemos que o problema é não limitado.
O problema dual do problema primal (1) é o problema

$$\text{min: } < \mathbf{c}, \mathbf{y} > +M \tag{3}$$

$$\text{suj: } A^t\mathbf{y} \geq \mathbf{b} \tag{4}$$

Analogamente ao caso primal podemos definir o conjunto dos vetores factiveis do problema dual

$$\mathbb{V}_d = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : A^t\mathbf{y} \geq \mathbf{b}\}$$

e o vetor ótimo $\mathbf{y}^*$ é aquele que minimiza o funcional $g(\mathbf{y}) =< \mathbf{b}, \mathbf{y} >$

3 Problema primal na forma básica e equivalência de problemas.

Vamos escrever os problemas em coordenadas e convencionar que a váriavel i assume valores entre 1 e m e a variável j está entre 1 e n. O problema primal na sua forma clássica fica:

$$\text{max: } \sum_j b_j x_j \tag{5}$$

$$\text{suj: } \sum_j a_{ij} x_j \leq c_i \tag{6}$$

Introduziremos agora m variáveis básicas que estenderão um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a um vetor $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n+m}$ reescrevendo as equações

$$\text{max: } \sum_j b_j x_j \tag{7}$$

$$\text{suj: } \sum_j a_{ij} x_j - c_i = -x_{n+i} \tag{8}$$

As variáveis $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ são chamadas variáveis básicas. Este é o problema primal na forma básica. Resolvê-lo significa achar o vetor $\mathbf{x}_{ot} \in \mathbb{R}^{n+m}$ que satisfaz as equações acima e maximiza o funcional.
Podemos mostrar que uma solução do problema primal básico fornece uma solução do problema primal e vice-versa, de forma que para achar a solução do primal vamos achar a solução do primal básico.

4 pivotação

Na equação primal básica em 8 temos um conjunto de $n+m$ variáveis, as primeiras $(x_1, \ldots, x_n)$ aparecem explicitamente apenas na função de custo e no lado esquerdo das equações de restrições, nesta situação são chamadas de variáveis não básicas. As outras $(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$, estão apenas no lado direito das equações de restrição e se expressam como função das variáveis não básicas.
O processo de pivotação realiza a troca de uma variável não básica, digamos x_α, com uma variável básica x_β. Para tanto achamos a expressão de x_α na linha que contém a variável x_β. Substituimos x_α em todas as ocorrências desta variável em todas as expressões. Obteremos uma nova forma básica com x_β sendo não básica e aparecendo explicitamente na expressão do custo, e x_α saindo dela.
Daremos um exemplo, mas antes explicamos que através de uma série de pivotações no problema primal na forma básica é possível chegar a uma na qual os coeficientes das variáveis não básicas, na expressão do custo são sempre menores ou iguais a zero.
Exemplo: Consideremos o seguinte problema primal na forma básica:

$$\max\ x_1 - x_4$$

$$\begin{gathered} \text{suj} \quad x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2 = -x_5 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 1 = -x_6 \end{gathered}$$

Aqui x_1, x_2, x_3 e x_4 são não básicas e x_5 e x_6 são básicas. $(0, 0, 0, 0, 2, -1)$ é uma solução da equação de restrição. É uma solução básica pois as variáveis não básicas são nulas. É não factível pois o último termo é menor que zero. Fazendo a pivotação da variável x_3 com x_6 obtemos

$$\max\ x_1 - x_4$$

$$\begin{gathered} \text{suj} \quad -2x_2 + x_6 + x_4 - 1 = -x_5 \\ x_1 + 3x_2 - x_6 - 2x_4 - 1 = -x_3 \end{gathered}$$

As variáveis não básicas agora são (x_1, x_2, x_4, x_6) e as básicas (x_5, x_3). O vetor $(0, 0, 1, 0, 1, 0)$ é uma solução das equações de restrição; é uma solução básica pois as variáveis não básicas são nulas e é factível pois todos os termos são maiores ou iguais a zero.

5 Tabela básica primal

Para explicitar o algoritmo simplex de resolução de um problema de otimização, iremos representar o problema por uma tabela básica. Se o problema primal é

$$\max f(\mathbf{x}) = <\mathbf{b}, \mathbf{x}> + M$$

$$\text{sub } A\mathbf{x} \leq \mathbf{c}$$

Com $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ então a tabela básica T é uma matriz $(m+1)\times(n+1)$ da forma

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline A & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{b} & M \\ \hline \end{array}$$

Ou seja,

$$t_{ij} = a_{ij} \text{ se } i \leq m, j \leq n$$
$$t_{i(n+1)} = c_i \text{ se } i \leq m$$
$$t_{(m+1)j} = b_j \text{ se } j \leq n$$
$$t_{(m+1)(n+1)} = M$$

A tabela do exemplo acima é:

x_1	x_2	x_3	x_4	-1	
1	1	1	-1	2	$-x_5$
-1	-3	-1	2	-1	$-x_6$
1	0	0	-1	0	f

Depois de executada a pivotação entre as variáveis x_3 e x_6 a tabela fica

x_1	x_2	x_6	x_4	-1	
0	-2	1	1	1	$-x_5$
1	3	-1	-2	1	$-x_3$
1	0	0	-1	0	f

Esta nova tabela corresponde à uma pivotação no elemento t_{23} da tabela anterior. Vamos ver como é feita a pivotação num elemento t_{kl} de uma tabela qualquer. Esta operação resultará numa nova tabela T' onde:

1. $t'_{kl} = 1/t_{kl}$ (fórmula no pivo)
2. $t'_{il} = -t_{il}/t_{kl}$ (fórmula na linha fora o pivo)
3. $t'_{kj} = t_{kj}/t_k l$ (fórmula na coluna fora o pivo)
4. $t'_{ij} = \dfrac{t_{ij}t_{kl} - t_{il}t_{kj}}{t_{kl}}$

Note que só podemos fazer a pivotação nos elementos t_{kl} diferentes de zero.