AGG0243 – MÉTODOS MATEMÁTICOS EM GEOFÍSICA

LISTA 2/2018 Entrega até 04/05/2018

0.50

QUESTÃO 1 – Encontre a integral de Fourier real da função $f(x) = e^{-kx}$, onde $x > 0$ e $k > 0$.

0.50

QUESTÃO 2 – Represente a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 \; se \; 0 < x < a \\ 0 \; se \; x > a \end{cases}$$

como uma:

a) integral de Fourier cosseno; 0.25

b) integral de Fourier seno. 0.25

0.50

QUESTÃO 3 – Seja

$$f(x) = \begin{cases} -1 \; se \; 0 < x < 1 \\ 1 \; se \; 1 < x < 2 \\ 0 \; se \; x > 2 \end{cases}$$

0.2

a) Esboce o gráfico de $f(x)$;

0.3 b) Encontre a transformada de Fourier cosseno de $f(x)$.

0.50

QUESTÃO 4 – Seja

$$f(x) = \begin{cases} x \; se \; 0 < x < k \\ 0 \; se \; x > k \end{cases}.$$

Encontre a transformada de Fourier cosseno de $f(x)$.

0.50

QUESTÃO 5 – Seja $\hat{f}_c(\omega) = e^{-\omega}$. Encontre a transformada de Fourier cosseno inversa de $\hat{f}_c(\omega)$.

0.50

QUESTÃO 6 – Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \; se \; 0 < x < 1 \\ 0 \; se \; x > 1 \end{cases}.$$

Encontre a transformada de Fourier seno de $f(x)$.

0.50

QUESTÃO 7 – Dada a função $f(x) = e^{-\pi x}$, encontre a transformada de Fourier cosseno de $f(x)$.

1.50

QUESTÃO 8 – Sejam $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ duas funções seccionalmente contínuas e absolutamente integráveis. Prove que $\mathcal{F}\{f(x).\, g(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[F(\omega) * G(\omega)]$ (Recíproca do Teorema da Convolução).

2.00

QUESTÃO 9 – Dada a função $f(x) = e^{-ax^2}$, pede-se:

1.0

a) Prove que $f(x)$ é absolutamente integrável;

1.00

b) Encontre a transformada de Fourier de $f(x)$.

1.00

QUESTÃO 10 – Utilizando a propriedade da transformada de Fourier de uma derivada, encontre a transformada de Fourier da função $f(x) = -2xe^{-x^2}$.

1.00

QUESTÃO 11 – Encontre a transformada de Fourier das seguintes funções:

0.30 a) $f(x) = \begin{cases} e^{2ix} \; se \; |x| < 1 \\ 0 \; se \; |x| > 1 \end{cases}$

0.30 b) $f(x) = \begin{cases} e^{kx} \; se \; x < 0, k > 0 \\ 0 \; se \; x > 0 \end{cases}$

0.40 c) $f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} \; se \; |t| \leq a, a > 0 \\ 0 \; se \; |t| > a \end{cases}$

1.00

QUESTÃO 12 – Seja $f(t) = e^{-t}$ e $g(t) = \sin t$, determine a convolução entre $f(t)$ e $g(t)$ $(f(t) * g(t))$, com os respectivos gráficos de cada passo da operação.

Solução da Lista 2

Questão 1 - Encontre a integral de Fourier real da função $f(x)=e^{-kx}$, onde $x>0$ e $k>0$.

Solução:

A integral de Fourier é dada por:

$$f(x)=\int_0^{\infty} A(w)\cos wx\,dw + B(w).\sin wx\,dw$$

onde $A(w)$ é:

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v).\cos wv\,dv$$

e $B(w)$ é:

$$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v).\sin wv\,dv$$

Como para $x>0$ e $k>0$ a função $f(x)$ é absolutamente convergente, já que $\int_0^{\infty}|e^{-kx}|dx=\int_0^{\infty}e^{-kx}dx=\frac{1}{k}$ e $f(x)$ é seccionamente contínua, pelo teorema de Fourier a integral de Fourier existe. Logo:

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-kv}.\cos wv\,dv}_{\mathrm{I}}$$

$$\mathrm{I} \to \int_0^{+\infty} e^{-kv}.\cos wv\,dv = \left[\frac{\cos wv.e^{-k}}{-k}\right]_0^{+\infty} - \int\frac{(-w\sin wv).e^{-k}}{(-k)}dv = \left[\frac{\cos wv.e^{-k}}{-k}\right]_0^{+\infty} - \Bigg\{$$

$$\left[\frac{(-w\sin wv).e^{-kv}}{k^2}\right]_0^{+\infty} - \left.\int_0^{+\infty}\frac{(-w^2\cos wv).e^{-kv}}{k^2}dv\right]\Bigg\} = \left[\frac{\cos wv.e^{-kv}}{-k}\right]_0^{+\infty} + \left[\frac{\sin wv\,e^{-kv}}{k^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{\cos wv.e^{-kv}}{k^2}dv$$

$$\int_0^{+\infty} \cos wv\, e^{-kv}\, dv + \int_0^{+\infty} \frac{w^2 \cos wv\, e^{-kv}}{k^2}\, dv = \left[\frac{\cos wv.e^{-kv}}{-k}\right]_0^{+\infty} + \left[\frac{w\sin wv.e^{-kv}}{k^2}\right]_0^{+\infty} \quad ②$$

$$\int_0^{+\infty} \cos wv.e^{-kv}\, dv \left[1 + \frac{w^2}{k^2}\right] = \left[\frac{\cos wv.e^{-kv}}{-k}\right]_0^{+\infty} + \left[\frac{w\sin wv.e^{-kv}}{k^2}\right]_0^{+\infty}$$

$$\int_0^{+\infty} \cos wv.e^{-kv}\, dv = \frac{k^2}{w^2+k^2} \cdot \frac{1}{k^2}\left(\left[\underbrace{-k\cos wv.e^{-kv}}_{II}\right]_0^{+\infty} + \left[\underbrace{w\sin wv.e^{-kv}}_{III}\right]_0^{+\infty}\right)$$

II $\lim_{v\to\infty} (-k.\cos wv.e^{-kv})$. Para resolver este limite, devemos utilizar o teorema do confronto. Como a função cosseno é limitada e oscila entre -1 e 1. Logo:

$$-1 \leq \cos wv \leq 1$$

Multiplicando a expressão acima por e^{-kv}, obtemos:

$$-e^{-kv} \leq e^{-kv}.\cos wv \leq e^{-kv}$$

Tirando o limite da expressão acima, obtemos:

$$\lim_{v\to\infty} -e^{-kv} \leq \lim_{v\to\infty} e^{-kv}.\cos wv \leq \lim_{v\to\infty} e^{-kv} \Rightarrow 0 \leq \lim_{v\to\infty} e^{-kv}.\cos wv \leq 0$$

Logo,

$$\boxed{\lim_{v\to\infty} e^{-kv}.\cos wv = 0}$$

. O mesmo raciocínio pode ser utilizado para III:

$$\boxed{\lim_{v\to\infty} w\sin wv.e^{-kv} = 0}$$

$$\int_0^{+\infty} \cos wv.e^{-kv}\, dv = \frac{\cancel{k^2}}{w^2+k^2} \cdot \frac{1}{\cancel{k^2}} \cdot k = \frac{k}{w^2+k^2} \quad \therefore$$

$$\boxed{A(w) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{k}{k^2+w^2}}$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-kv}.\sin wv\, dv}_{IV}$$

IV $\rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-kv} \cdot \sin wv \, dv = \left[\frac{\sin wv}{-k} \cdot e^{-kv}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{w \cdot \cos wv \cdot e^{-kv}}{(-k)} dv = \left[\frac{\sin wv}{-k} \cdot e^{-kv}\right]_0^{+\infty} - \Bigg\{ \left[\frac{w \cdot \cos wv \cdot e^{-kv}}{k^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{(-w^2) \cdot \sin wv \cdot e^{-kv}}{k^2} dv \Bigg\} = \left[\frac{\sin wv}{-k} \cdot e^{-kv}\right]_0^{+\infty} - \left[\frac{w \cdot \cos wv \cdot e^{-kv}}{k^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{w^2 \cdot \sin wv \cdot e^{-kv}}{k^2} \cdot dv \Rightarrow$

$$\int_0^{+\infty} e^{-kv} \cdot \sin wv \, dv \left[1 + \frac{w^2}{k^2}\right] = \frac{1}{k^2} \left\{ \left[-k \sin wv \cdot e^{-kv}\right]_0^{+\infty} - \left[w \cdot \cos wv \cdot e^{-kv}\right]_0^{+\infty} \right\} \Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-kv} \cdot \sin wv \, dv = \frac{k^2}{k^2+w^2} \cdot \frac{1}{k^2} \left\{ \left[-k \cdot \sin wv \cdot e^{-kv}\right]_0^{+\infty} - \left[w \cdot \cos wv \cdot e^{-kv}\right]_0^{+\infty} \right\} \Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-kv} \cdot \sin wv \, dv = \frac{1}{k^2+w^2} \left\{ \underbrace{\left[-k \cdot \sin wv \cdot e^{-kv}\right]_0^{+\infty}}_{V} - \underbrace{\left[w \cdot \cos wv \cdot e^{-kv}\right]_0^{+\infty}}_{VI} \right\} \Rightarrow$$

V $\rightarrow \lim_{v \to \infty} \left[-k \cdot \sin wv \cdot e^{-kv}\right] = 0$ VI $\rightarrow \lim_{v \to \infty} \left[w \cdot \cos wv \cdot e^{-kv}\right] = 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-kv} \cdot \sin wv \cdot dv = \frac{1}{k^2+w^2} \cdot w = \frac{w}{k^2+w^2} \quad \therefore \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{w}{k^2+w^2}$$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{k}{k^2+w^2}\right) \cdot \cos wx \, dw + \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{w}{k^2+w^2}\right) \cdot \sin wx \, dw \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{+\infty} \left(\frac{k \cdot \cos wx + w \cdot \sin wx}{k^2+w^2} \right) dw \right]}$$ $\rightarrow$ Integral de Fourier real

Questão 2 - Represente a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < a \\ 0 & \text{se } x > a \end{cases}$$

como uma:

a) integral de Fourier cosseno; (4)

Como a função $f(x)$ satisfaz os critérios do teorema de Fourier, então a integral de Fourier cosseno de $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(w) \cdot \cos wx \, dw \quad , \quad \text{onde}$$

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(v) \cdot \cos wv \, dv .$$

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{a} 1 \cdot \cos wv \, dv = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin wv}{w} \right]_0^a = \frac{2}{\pi} \frac{\sin wa}{w}$$

$\therefore$

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin wa \cdot \cos wv}{w} \, dw}$$

b) integral de Fourier cosseno

Como a função $f(x)$ satisfaz os critérios do teorema de Fourier, então a integral de Fourier seno de $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} B(w) \cdot \sin wx \, dw \quad , \quad \text{onde}$$

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(v) \cdot \sin wv \, dv .$$

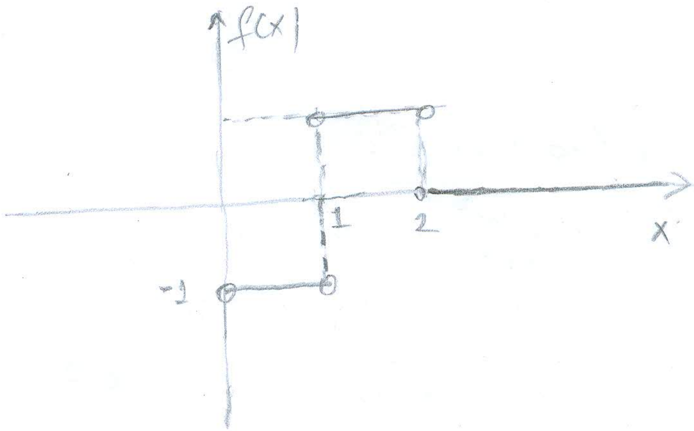
$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{a} 1 \cdot \sin wv \, dv = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos wv}{w} \right]_0^a = \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-\cos wa)}{w} + \frac{1}{w} \right] \therefore$$

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{-\cos wa}{w} + \frac{1}{w} \right] \cdot \sin wv \, dv}$$

Questão 3 - Seja 5

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ se } 0 < x < 1 \\ 1 \text{ se } 1 < x < 2 \\ 0 \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de $f(x)$;



b) Encontre a transformada de Fourier cosseno de $f(x)$

Como a função $f(x)$ atende aos critérios do Teorema de Fourier, então a transformada de Fourier cosseno pode ser calculada da seguinte forma

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cdot \cos \omega x \, dx$$

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^1 -1 \cdot \cos \omega x \, dx + \int_1^2 1 \cdot \cos \omega x \, dx \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^1 -\cos \omega x \, dx + \int_1^2 \cos \omega x \, dx \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \left[-\frac{\sin \omega x}{\omega} \right]_0^1 + \left[\frac{\sin \omega x}{\omega} \right]_1^2 \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \left[-\frac{\sin \omega}{\omega} + 0 \right] + \left[\frac{\sin 2\omega}{\omega} - \frac{\sin \omega}{\omega} \right] \right\} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ -\frac{2 \sin \omega}{\omega} + \frac{\sin 2\omega}{\omega} \right\} \therefore$$

$$\boxed{\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin 2\omega - 2 \sin \omega}{\omega} \right)}$$

4

Questão 4 - Seja $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0<x<k \\ 0 & \text{se } x>k \end{cases}$ (6)

Encontre a transformada de Fourier cosseno de $f(x)$.

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^k x\cdot\cos wx\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[\frac{x\cdot\sin wx}{w}\right]_0^k - \int_0^k \frac{\sin wx}{w}dx\right\} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[\frac{x\cdot\sin wx}{w}\right]_0^k + \left[\frac{\cos wx}{w^2}\right]_0^k\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{k\cdot\sin wx}{w} + \frac{\cos kw}{w^2} - \frac{1}{w^2}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{k\cdot\sin wx}{w} + \frac{(\cos kw - 1)}{w^2}\right\}}$$

Questão 5 - Seja $\hat{f}_c(w) = e^{-w}$. Encontre a transformada de Fourier cosseno inversa de $\hat{f}_c(w)$.

A transformada de Fourier cossenno inversa é dada por:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\hat{f}_c(w)\cos wx\,dw$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-w}\cdot\cos wx\,dw = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[\frac{\cos wx\cdot e^{-w}}{(-1)}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{x(-\sin wx)\cdot e^{-w}}{(-1)}dx\right\}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[\frac{\cos wx\cdot e^{-w}}{(-1)}\right]_0^{+\infty} - \left[\frac{x(-\sin wx)\cdot e^{-w}}{1^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{x^2(-\cos wx)\cdot e^{-w}}{1^2}dw\right\}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\cos wx\cdot e^{-w}dw + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos wx\cdot e^{-w}}{1^2}dw = \left[\frac{\cos wx\cdot e^{-w}}{-1}\right]_0^{+\infty} + \left[\frac{\sin wx\cdot e^{-w}}{1^2}\right]_0^{+\infty} =$$

$$\int_0^{+\infty}\cos wx\cdot e^{-w}dw\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot(1+x^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[\frac{\cos wx\cdot e^{-w}}{-1}\right]_0^{+\infty} + \left[\frac{x\sin wx\cdot e^{-w}}{1^2}\right]_0^{+\infty}\right\} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\cos wx\cdot e^{-w}dx = \frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left\{\left[-1\cdot\cos wx\cdot e^{-w}\right]_0^{+\infty} + \left[x\sin wx\cdot e^{-w}\right]_0^{+\infty}\right\}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\cos wx\cdot e^{-w}dx = \frac{1}{x^2+1}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[\lim_{w\to\infty} -1\cdot\cos wx\cdot e^{-w} + 1\right] + \left[\lim_{w\to\infty} x\sin wx\cdot e^{-w} - 0\right]\right\}$$

Como já vimos, o limite $\lim_{w \to +\infty} -1 \cdot \cos wx \cdot e^{-w}$ e $\lim_{w \to +\infty} x \sin wx \cdot e^{-w}$ são iguais a zero.

Portanto,

$$\boxed{f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{x^2+1}}$$

6 - Questão 6 - Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Encontre a transformada de Fourier seno de $f(x)$.

A transformada de Fourier seno de $f(x)$ é dada por:

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 f(x) \cdot \sin wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 x^2 \cdot \sin wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \left[\frac{(-\cos wx)}{w} \cdot x^2 \right]_0^1 - \int_0^{+\infty} \frac{2x(-\cos wx)}{w} dx \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \left[\frac{(-\cos wx)}{w} \cdot x^2 \right]_0^1 - \left\{ \left[\frac{2x \cdot (-\sin wx)}{w^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2(-\sin wx)}{w^2} dx \right\} \right\} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \left[\frac{(-\cos wx) \cdot x^2}{w} \right]_0^1 - \left[\frac{2x(-\sin wx)}{w^2} \right]_0^1 + \left[\frac{2\cos wx}{w^3} \right]_0^1 \right\} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \left[\frac{-\cos w}{w} + 0 \right] - \left[\frac{-2\sin w}{w^2} + 0 \right] + \left[\frac{2\cos w}{w^3} - \frac{2}{w^3} \right] \right\} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{(-\cos w)}{w} + \frac{2\sin w}{w^2} + \frac{2\cos w}{w^3} - \frac{2}{w^3} \right]$$

$$\boxed{\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\cos w \left(\frac{2}{w^3} - \frac{1}{w} \right) + \frac{2\sin w}{w^2} - \frac{2}{w^3} \right]}$$

Questão 7 - Dada a função $f(x) = e^{-\pi x}$, encontre a transformada de Fourier cosseno de $f(x)$.

A transformada de Fourier cosseno é dada por:

8

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x).\cos\omega x \, dx =$$

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\pi x}.\cos\omega x . dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \left[\frac{\cos\omega x}{(-\pi)}. e^{-\pi x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{(-\omega).\sin\omega x . e^{-\pi x}}{(-\pi)} dx \right\} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \left[\frac{\cos\omega x}{(-\pi)} e^{-\pi x} \right]_0^{+\infty} - \left\{ \left[\frac{(-\omega).\sin\omega x . e^{-\pi x}}{\pi^2} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{(-\omega^2).\cos\omega x . e^{-\pi x}}{\pi^2} dx \right\} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos\omega x . e^{-\pi x} dx . \left\{ 1 + \frac{\omega^2}{\pi^2} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \left[\frac{\cos\omega x}{(-\pi)} . e^{-\pi x} \right]_0^{+\infty} + \left[\frac{\omega . \sin\omega x . e^{-\pi x}}{\pi^2} \right]_0^{+\infty} \right\} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos\omega x . e^{-\pi x} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\pi^2}{\pi^2 + \omega^2} . \frac{1}{\pi^2} \left\{ \left[-\pi . \cos\omega x . e^{-\pi x} \right]_0^{+\infty} + \left[\omega . \sin\omega x . e^{-\pi x} \right]_0^{+\infty} \right\} =$$

Como já vimos, o limite $\lim_{x \to +\infty} \cos\omega x . e^{-\pi x} = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} \omega . \sin\omega x . e^{-\pi x} = 0$, então

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos\omega x . e^{-\pi x} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} . \frac{1}{\pi^2 + \omega^2} \left\{ \left[-0 + \pi \right] + \left[0 - 0 \right] \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} . \frac{\pi}{\pi^2 + \omega^2}$$

Logo:

$$\boxed{\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} . \frac{\pi}{\pi^2 + \omega^2} = \sqrt{2\pi} . \frac{1}{\pi^2 + \omega^2}}$$

Questão 8 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ duas funções seccionalmente contínuas e absolutamente integráveis. Prove que $\mathcal{F}\{f(x).g(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[F(\omega) * G(\omega) \right]$ (Recíproca do Teorema da Convolução).

Solução:

O teorema da convolução nos diz que

$$\mathcal{F}\{(f * g)(x)\} = \sqrt{2\pi} \, F(\omega) . G(\omega)$$

e a recíproca

$$\mathcal{F}\{f(x).g(x)\} = \mathcal{F}\{f(x)\} * \mathcal{F}\{g(x)\}$$

Escreveremos, $h(x) = f(x).g(x)$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são originais ou também ditas transformada de Fourier inversa.

Assim, f(x) e g(x) podem ser escritas como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) . e^{+i\omega x} d\omega \quad e \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\theta) . e^{+i\theta x} d\theta$$

Dessa forma f(x). g(x) será dado por:

$$f(x).g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega).e^{i\omega x} d\omega \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\theta).e^{+i\theta x} d\theta \Rightarrow$$

$$f(x).g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega).G(\theta).e^{i\omega x}.e^{i\theta x}.d\omega d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega).G(\theta).$$

$$e^{i(\omega+\theta)x}.d\omega d\theta$$

Para resolvermos a integral acima, é conveniente fazermos mudança de variável:

$$\omega + \theta = \lambda \Rightarrow \frac{d\lambda}{d\theta} = 1 \Rightarrow d\lambda = d\theta \quad e \quad \theta = \lambda - \omega.$$

Quando $\theta \to \pm\infty$, $\lambda = \pm\infty$ ∴

$$f(x).g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega).G(\lambda-\omega).e^{i\lambda x} d\omega d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega).G(\lambda-\omega).d\omega}_{\text{convolução } F(\lambda) * G(\lambda)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (F(\lambda) * G(\lambda)).e^{i\lambda x}.d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda).e^{i\lambda x} d\lambda, \text{ onde}$$

$H(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\lambda) * G(\lambda)$. Veja que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda).e^{i\lambda x} d\lambda$ é a transformada de Fourier inversa de $H(\lambda)$, ou seja, $h(x)$. Portanto

$$\mathcal{F}\{h(x)\} = H(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\lambda) * G(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\{f(x)\} * \mathcal{F}\{g(x)\}$$

ou seja

$$\mathcal{F}\{f(x).g(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\{f(x)\} * \mathcal{F}\{g(x)\}$$ e que sem nenhuma perda de generalidade pode ser escrito como $\boxed{\mathcal{F}\{f(x).g(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [F(\omega) * G(\omega)]}$

Questão 9 - Dada a função $f(x) = e^{-ax^2}$, pede-se

a) Prove que $f(x)$ é absolutamente integrável;

$f(x)$ é absolutamente integrável se $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| < \infty$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-ax^2}| dx = \lim_{M,N \to \infty} \underbrace{\int_{-M}^{N} |e^{-ax^2}| dx}_{=I}$$. Veja, como dito em aula é muito importante que esse limite vá de forma independente para infinito para se evitar uma situação como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} x\, dx = 0$$

o que não é verdade.

$$I = \int_{-M}^{N} |e^{-ax^2}| dx$$. Se elevarmos I^2 teremos:

$$I^2 = \int_{-M}^{N} |e^{-ax^2}| dx \cdot \underbrace{\int_{-M}^{N} |e^{-ax^2}| dx}_{II}$$. Sem perda de generalidade, podemos fazer uma simples mudança de variável em II chamando $x = y$.

Logo

$$I^2 = \int_{-M}^{N}\int_{-M}^{N} e^{-ax^2} \cdot e^{-ay^2} dx dy = \int_{-M}^{N}\int_{-M}^{N} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy.$$

Uma forma de resolvermos a integral acima é fazendo mudança de variável que envolva mudança do sistema de coordenadas. Mudando de coordenadas Cartesianas para polares, temos:

$x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, tal que $r^2 = x^2 + y^2$. Dessa forma

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-ar^2} |J(r,\theta)| \, dr \, d\theta$$

onde $|J|$ é o Jacobiano da transformação. O Jacobiano é o determinante da matriz Jacobiana, que é dada por:

$$J(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}, \text{ logo}$$

$$J(r,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

Assim, $|J(r,\theta)|$ será $|J(r,\theta)| = \det(J(r,\theta)) = r\sin^2\theta + r\cos^2\theta = r$.

Portanto,

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r \cdot e^{-ar^2} \cdot dr \, d\theta$$

Para resolver esta integral, devemos proceder com outra mudança de variável:

$$z = r^2 \Rightarrow \frac{dz}{dr} = 2r \Rightarrow dr = \frac{dz}{2r}. \text{ Assim,}$$

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \cancel{r} \cdot \frac{e^{-za}}{2\cancel{r}} \cdot dz \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{e^{-z}}{2a}\right]_0^{\infty} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2a} d\theta = \left[\frac{\theta}{2a}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{a}$$

$$\therefore \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-ax^2}| \, dx = \lim_{m,N \to +\infty} \int_{-m}^{N} |e^{-ax^2}| \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

b) Encontre a transformada de Fourier de $f(x)$.

Como $f(x)$ é absolutamente integrável e seccionalmente contínua, então a transformada de Fourier de $f(x)$ é:

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-iwx} \, dx$$

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cdot e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 - iwx} dx}_{I}$$

Para conseguirmos resolver a integral I, devemos completar o quadrado de $-ax^2 - iwx \rightarrow -\left(\sqrt{a}x + \frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2$. Assim

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x + \frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx.$$

Veja que $e^{\left(\frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2}$ é um termo independende de X. Logo $F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(\frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(\sqrt{a}x + \frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx}_{= L}$

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x + \frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx$$

Para resolver esta integral, faremos a seguinte mudança de variável: $u = \sqrt{a}x + \frac{iw}{2\sqrt{a}} \rightarrow \frac{du}{dx} = \sqrt{a} \rightarrow dx = \frac{du}{\sqrt{a}}$

Assim;

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{a}} du$$

No item a, resolvemos uma integral muito parecida:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \therefore \text{ Para } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}, \text{ Logo}$$

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Assim,

$$\boxed{F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{w^2}{4a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot e^{-\frac{w^2}{4a}}}$$

Questão 10 - Utilizando a propriedade da transformada de Fourier de uma derivada, encontre a transformada de Fourier da função $f(x) = -2x\,e^{-x^2}$.

Solução: Sabendo que a derivada de $e^{-x^2} = -2x\,e^{-x^2}$ e que

$$\mathcal{F}\{f^{n}(x)\} = (iw)^n \cdot \mathcal{F}\{f(x)\}, \text{ então}$$

$$\mathcal{F}\{-2xe^{-x^2}\} = (iw)^1 \mathcal{F}\{e^{-x^2}\}.$$

No exercício 9, item b, obtivemos a transformada de Fourier de $\mathcal{F}\{e^{-ax^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot e^{-\frac{w^2}{4a}}$. Assim $\mathcal{F}\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{w^2}{4}}$. Logo,

$$\boxed{\mathcal{F}\{-2x \cdot e^{-x^2}\} = \frac{iw}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{w^2}{4}}}$$

Questão 11 - Encontre a transformada de Fourier das seguintes funções.

a) $f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 0 \end{cases}$ Como a função e^{2ix} é absolutamente integrável no intervalo $-1 < x < 1$, pois $\int_{-1}^{1} |e^{2ix}|\,dx = \int_{-1}^{1} 1\,dx = [x]_{-1}^{1} = 2$ e ela é seccionalmente contínua, então:

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{2ix} \cdot e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{(2i-iw)x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{(2i-iw)x}}{(2i-iw)} \right]_{-1}^{1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{(2-w)i}}{(2-w)i} - \frac{e^{-(2-w)i}}{(2-w)i}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{(2-w)}\cdot\frac{2}{2}\left[\frac{e^{(2-w)i} - e^{(2-w)i}}{i}\right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{(2-w)}\cdot\sin(2-w)$$

$$\boxed{F(w) = \frac{2\cdot\sin(2-w)}{\sqrt{2\pi}\,(2-w)}}$$

24

b)

$$f(x) = \begin{cases} e^{kx} & \text{se } x<0,\ k>0 \\ 0 & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Como a função e^{kx}, para $x<0$ e $k>0$ é absolutamente integrável pois $\int_{-\infty}^{0} |e^{kx}|\,dx = \int_{-\infty}^{0} |e^{kx}|\,dx = \left[\frac{e^{kx}}{k}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{k}$ e ela é seccionalmente contínua, então:

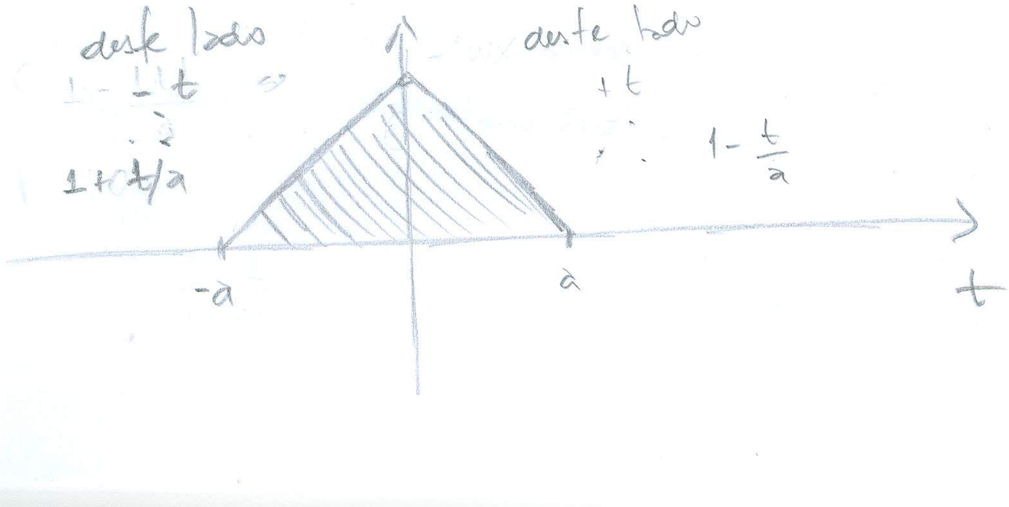
$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{kx}\cdot e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{(k-iw)x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{(k-iw)x}}{(k-iw)}\right]_{-\infty}^{0} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{(k-iw)} - 0\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{(k-iw)}\cdot\frac{(k+iw)}{(k+iw)} = \frac{k+iw}{\sqrt{2\pi}\,(k^2+w^2)}$$

$$\boxed{F(w) = \frac{k+iw}{\sqrt{2\pi}\,(k^2+w^2)}}$$

c)

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & \text{se } |t| \le a,\ a>0 \\ 0 & \text{se } |t|>a \end{cases} \qquad -a \le t \le a$$



A transformada de Fourier será dada, portanto,

15

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-i\omega t}.dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-a}^{0} \left(1+\frac{t}{a}\right).e^{-i\omega t} dt + \right.$$

$$\left. \int_{0}^{a} \left(1-\frac{t}{a}\right).e^{-i\omega t} dt \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-a}^{0} e^{-i\omega t} dt + \underbrace{\int_{-a}^{0} \frac{t}{a}.e^{-i\omega t} dt}_{\mathrm{I}} + \int_{0}^{a} e^{-i\omega t} dt - \underbrace{\int_{0}^{a} \frac{t e^{-i\omega t}}{a} dt}_{\mathrm{II}} \right]$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow \int_{-a}^{0} \frac{t}{a}.e^{-i\omega t} dt = \left[\frac{t.e^{-i\omega t}}{a}\right]_{-a}^{0} - \int_{-a}^{0} \frac{e^{-i\omega t}}{a(-i\omega)} dt = \left[\frac{t.e^{-i\omega t}}{(-i\omega).a}\right]_{-a}^{0} - \left[\frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)^2.a}\right]_{-a}^{0}$$

$$\mathrm{II} \Rightarrow \int_{0}^{a} e^{-i\omega t}.\frac{t}{a} dt = \left[\frac{t.e^{-i\omega t}}{(-i\omega).a}\right]_{0}^{a} - \left[\frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)^2.a}\right]_{0}^{a}$$. Assim,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[\frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)}\right]_{-a}^{0} + \left[\frac{t.e^{-i\omega t}}{(-i\omega).a}\right]_{-a}^{0} - \left[\frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)^2 a}\right]_{-a}^{0} + \left[\frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)}\right]_{0}^{a} - \left[\frac{t.e^{-i\omega t}}{(-i\omega).a}\right]_{0}^{a} \right.$$

$$\left. + \left[\frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)^2.a}\right]_{0}^{a} \right\}$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[\cancel{\frac{1}{(-i\omega)}} - \cancel{\frac{e^{i\omega a}}{(-i\omega)}}\right] + \left[\cancel{\frac{a.e^{i\omega a}}{(-i\omega)a}}\right] - \left[\frac{1}{(-i\omega)^2 a} - \frac{e^{i\omega a}}{(-i\omega)^2 a}\right] + \left[\cancel{\frac{e^{-i\omega a}}{(-i\omega)}} - \cancel{\frac{1}{(-i\omega)}}\right] \right.$$

$$\left. - \left[\cancel{\frac{a\, e^{-i\omega a}}{(-i\omega).a}}\right] + \left[\frac{e^{-i\omega a}}{(-i\omega)^2.a} - \frac{1}{(-i\omega)^2.a}\right] \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -\frac{1}{(-i\omega)^2 a} + \frac{e^{i\omega a}}{(-i\omega)^2 a} + \frac{e^{-i\omega a}}{(-i\omega)^2 a} - \frac{1}{(-i\omega)^2.a} \right\} =$$

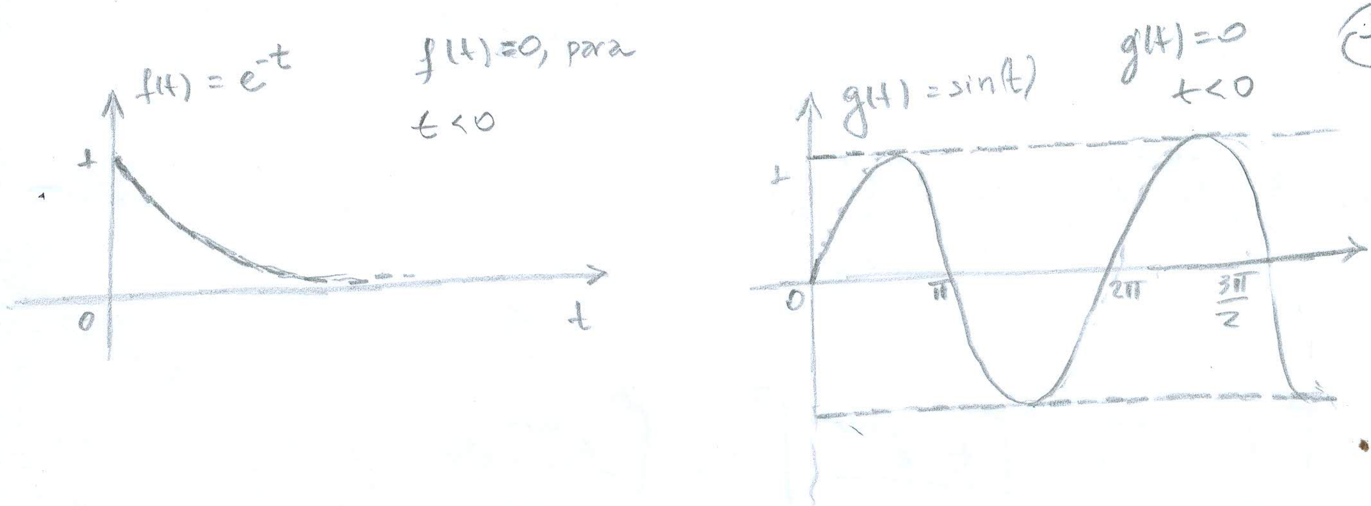
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -\frac{1}{(-i\omega)^2.a} + \frac{\cos\omega a + i\sin\omega a}{(-i\omega)^2 a} + \frac{\cos\omega a - i\sin\omega a}{(-i\omega)^2 a} - \frac{1}{(-i\omega)^2 a} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -\frac{2}{(-i\omega)^2 a} + \frac{2\cos\omega a}{(-i\omega)^2 a} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{2\cos\omega a}{-\omega^2 a} + \frac{2}{\omega^2 a} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{2(1+\cos\omega a)}{\omega^2 a} \right\}$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{2(1+\cos\omega a)}{\omega^2 a} \right\}$$

Questão 12 - Sejam $f(t) = e^{-t}$ e $g(t) = \sin t$. Determine a convolução entre $f(t)$ e $g(t)$ $(f(t) * g(t))$, com os respectivos gráficos de cada passo da operação.

(16)



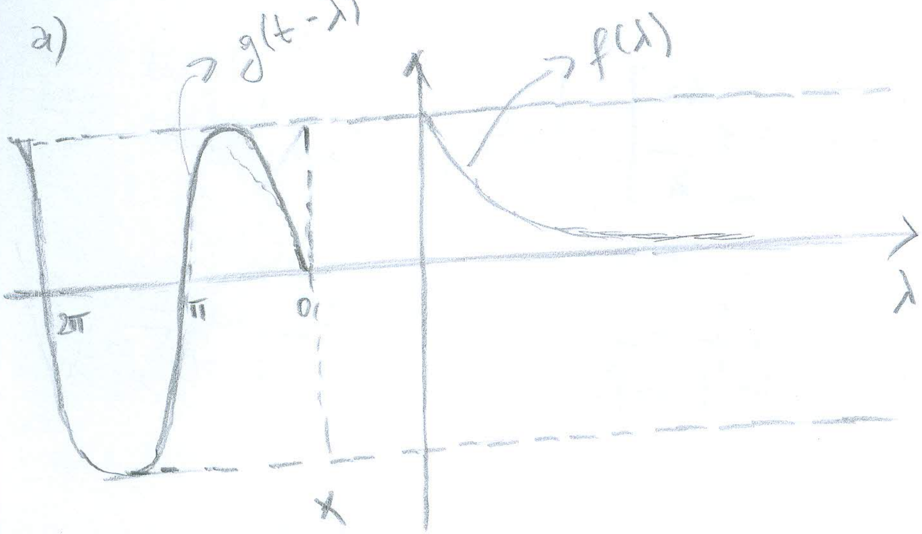
A operação de convolução é definida como:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \cdot g(t-\lambda)\, d\lambda$$

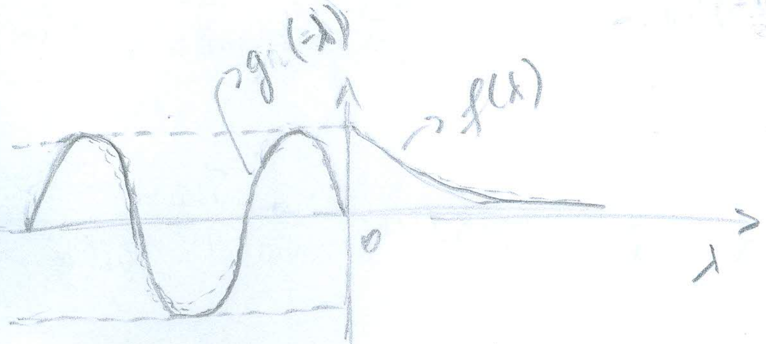
Na troca de variáveis dentro da integral

$$f(\lambda) = e^{-\lambda} \quad , \quad g(-\lambda) = \sin(-\lambda) \quad e \quad g(t-\lambda) = \sin(t-\lambda)$$

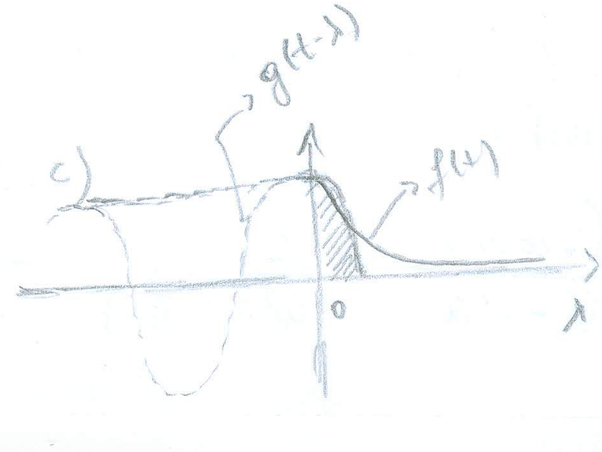
a)



b)



c)



$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda).g(t-\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda}.\sin(t-\lambda).d\lambda$$ (17)

como só há sobreposição entre os sinais entre 0 e t, então:

$$(f*g)(t) = \int_0^t e^{-\lambda}.\sin(t-\lambda)\,d\lambda = \int_0^t \sin(\lambda).e^{-(t-\lambda)}\,d\lambda$$ já que a operação

de convolução é comutativa, ou seja, $(f*g)(t) = (g*f)(t)$

$$\int_0^t \sin(\lambda).e^{-(t-\lambda)}\,d\lambda = e^{-t}\left\{\left[\sin\lambda.e^{\lambda}\right]_0^t - \int_0^t \cos\lambda\, e^{\lambda}\,d\lambda\right\} = e^{-t}\left\{\left[\sin\lambda.e^{\lambda}\right]_0^t -\right.$$

$$\left(\left[\cos\lambda.e^{\lambda}\right]_0^t - \int_0^t(-\sin\lambda).e^{\lambda}\,dt = e^{-t}.\left[\sin\lambda.e^{\lambda}\right]_0^t - e^{-t}\left[\cos\lambda.e^{\lambda}\right]_0^t -\right.$$

$$e^{-t}\int_0 \sin\lambda.e^{\lambda}\,d\lambda \Rightarrow \int_0^t \sin\lambda.e^{-(t-\lambda)}\,d\lambda = \frac{1}{2}\left\{e^{-t}\left[\sin\lambda.e^{\lambda}\right]_0^t - e^{-t}\left[\cos\lambda.e^{\lambda}\right]_0^t\right\}$$

$$\int_0^t \sin\lambda.e^{-(t-\lambda)}\,d\lambda = \frac{1}{2}.e^{-t}\left\{\left[\sin t.e^{t}-0\right] - \left[\cos t.e^{t} - 1\right]\right\} =$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\left[\sin t - \cos t + e^{-t}\right]} \Rightarrow (f*g)(t) = \frac{1}{2}\left[\sin t - \cos t + e^{-t}\right]$$

1