Escola Superior de Agricultura
"Luiz de Queiroz"
Universidade de São Paulo

LCE0130 – Cálculo Diferencial e Integral

Profa. Dra. Andreia Adami
deiaadami@terra.com.br

Derivada

Definição: Seja f(x) uma função e x_0 um ponto de seu domínio. Chamamos derivada de f no ponto $x_{0,}$ se existir e for finito, o limite dado por:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Derivada

Assim, indica-se a derivada de $f(x)$ no ponto x_0 por $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$, ou ainda $\frac{dy}{dx}(x_0)$

Derivada

Exemplo: Qual a derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 3$?

Derivada

Exemplo: Qual a derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 3$?

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3 + \Delta x)^2 - 3^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3^2 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 - 3^2}{\Delta x}$$

Derivada

Exemplo: Qual a derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 3$?

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 6$$

O que mostra que um pequeno acréscimo Δx em dado em x, a partir do ponto $x_0 = 3$, acarretará em um correspondente acréscimo Δf que é 6 vezes maior que o acréscimo Δx .

Derivada

Função derivada: Dada uma função $f(x)$, podemos pensar em calcular a derivada de $f(x)$ em um ponto genérico de x, em vez de calcular em um ponto específico x_0. A essa derivada, calculada em um ponto genérico x, chamamos função derivada de $f(x)$; o domínio dessa função é o conjunto dos valores de x para os quais existe a derivada de $f(x)$.

Derivada

Função derivada:

A vantagem em calcular a função derivada é que com ela podemos calcular a derivada de $f(x)$ em qualquer ponto x_0 , bastando substituir , na função derivada, x por x_0.

Derivada

Função derivada: qual a função derivada de $f(x) = x^2$?

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2\mathrm{x}$$

Derivada

Função derivada: Assim, por exemplo, se quisermos a derivada no ponto $x_0 = 5$, basta calcularmos f'(5)=10

Derivada

Função derivada: É importante observar que $f'(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ para Δx pequeno,

Para $x = 5$ e Δx=0,1 temos:
Δf=f(5,1)-f(5)=(5,1)^2-(5)^2=1,01

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1{,}01}{0{,}1} = 10{,}1$$

Portanto: $f'(5) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}$

Derivada das principais funções elemantares

Função Constante: Seja $f(x)=c$, então $f'(x)=0$ para todo x pertencente ao domínio da função.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{c}{c} = 0,$$

para todo x

Derivada das principais funções elemantares

Função Constante: Seja *f(x)=c* , então *f'(x)=0* para todo x pertencente ao domínio da função.

$$f(x) = 5 \qquad f'(x) = 0$$
$$f(x) = e^2 \qquad f'(x) = 0$$

Derivada das principais funções elemantares

Função potência: Se $f(x) = x^n, então: f'(x) = nx^{n-1}$, para n real qualquer

Exemplos:

$$f(x) = x^2 \qquad \frac{df}{dx} = 2x^{2-1} \qquad f'(x) = 2x$$

Derivada das principais funções elemantares

Função potência: Se $f(x) = x^n, então: f'(x) = nx^{n-1}$, para n real qualquer

Exemplos:

$f(x) = x^4$

Derivada das principais funções elemantares

Função potência: Se $f(x) = x^n, então: f'(x) = nx^{n-1}$, para n real qualquer

Exemplos:

$f(x) = x^4$ $\qquad \dfrac{df}{dx} = 4x^{4-1}$ $\qquad f'(x) = 4x^3$

Derivada das principais funções elemantares

Função potência: Se $f(x) = x^n, então: f'(x) = nx^{n-1}$, para n real qualquer

Exemplos:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

Derivada das principais funções elemantares

Função potência: Se $f(x) = x^n, então: f'(x) = nx^{n-1}$, para n real qualquer

Exemplos:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$\frac{df}{dx} = -2x^{-2-1}$$

$$f'(x) = -2x^{-3}$$

Derivada das principais funções elemantares

Função potência: Se $f(x) = x^n, então: f'(x) = nx^{n-1}$, para n real qualquer

Exemplos:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$\frac{df}{dx} = -2x^{-2-1}$$

$$f'(x) = -2x^{-3}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$$

Derivada das principais funções elemantares

Função logarítmica:

Se $f(x) = \ln x, então: f'(x) = \frac{1}{x}$, para $x > 0$

Propriedades Operatórias

Derivada do Produto de uma constante por uma função

Seja f uma função e c uma constante, se g é definida por:

$$g(x) = cf(x)$$
$$g'(x) = cf'(x)$$

Exemplo:

$$g(x) = 2x^2$$
$$g'(x) = ?$$

Propriedades Operatórias

Derivada do Produto de uma constante por uma função

Seja f uma função e c uma constante, se g é definida por:

$$g(x) = cf(x)$$
$$g'(x) = cf'(x)$$

Exemplo:

$$g(x) = 2x^2$$
$$g'(x) = 2(2x^{2-1}) = 4x$$

Propriedades Operatórias

Derivada de uma soma e/ou diferença

Sejam f e g duas funções e h é definida por: $h(x) = f(x) + g(x)$. Se, $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então: $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Obs. O mesmo vale para: $h(x) = f(x) - g(x)$.

Exemplo:

$$h(x) = x^2 + 5$$

Propriedades Operatórias

Derivada de uma soma e/ou diferença

Sejam f e g duas funções e h é definida por: $h(x) = f(x) + g(x)$. Se, $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então: $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Obs. O mesmo vale para: $h(x) = f(x) - g(x)$.

Exemplo:

$$h(x) = x^2 + 5$$
$$h'(x) = 2x^{2-1} + 0 = 2x$$

Propriedades Operatórias

Derivada de uma soma e/ou diferença

Sejam f e g duas funções e h é definida por: $h(x) = f(x) + g(x\ \ )$. Se, $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então: $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Obs. O mesmo vale para: $h(x) = f(x) - g(x)$.

Exemplo:

$$h(x) = 5x^3 - 2x^2$$

Propriedades Operatórias

Derivada de uma soma e/ou diferença

Sejam f e g duas funções e h é definida por: $h(x) = f(x) + g(x\ )$. Se, $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então: $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Obs. O mesmo vale para: $h(x) = f(x) - g(x)$.

Exemplo:

$$h(x) = 5x^3 - 2x^2$$

$$h'^{(x)} = 3(5)x^{3-1} - 2(2)x^{2-1} =$$

Propriedades Operatórias

Derivada de uma soma e/ou diferença

Sejam f e g duas funções e h é definida por: $h(x) = f(x) + g(x)$. Se, $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então: $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Obs. O mesmo vale para: $h(x) = f(x) - g(x)$.

Exemplo:

$$h(x) = 5x^3 - 2x^2$$

$$h'(x) = 3(5)x^{3-1} - 2(2)x^{2-1} =$$

$$h'(x) = 15x^2 - 4x^1 = 15x^2 - 4x$$

Propriedades Operatórias

Derivada de um produto

Sejam f e g duas funções e h é definida por: $h(x) = f(x) * g(x)$. Se, $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então:

$$h'(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

Exemplo:

$$h(x) = (x^3+3) * (x + 5)$$

Propriedades Operatórias

Derivada de um produto

Sejam f e g duas funções e h é definida por: $h(x) = f(x) * g(x)$. Se, $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então:

$$h'(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

Exemplo:

$$h(x) = (x^3+3) * (x+5)$$

$$h'^{(x)} = [(3x^2) * (x+5)] + [(x^3+3) * 1] =$$

Propriedades Operatórias

Derivada de um produto

Sejam f e g duas funções e h é definida por: $h(x) = f(x) * g(x)$. Se, $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então:

$$h'(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

Exemplo:

$$h(x) = (x^3+3) * (x+5)$$

$$h'^{(x)} = [(3x^2) * (x+5)] + [(x^3+3) * 1] =$$

$$3x^3 + 15x^2 + x^3 + 3$$

$$4x^3 + 15x^2 + 3$$

Propriedades Operatórias

Derivada de um quociente

Sejam f e g duas funções e h é definida por: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ e g(x)≠ 0. Se, $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então:

$$h'(x) = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Propriedades Operatórias

Derivada de um quociente

Exemplo: $h(x) = \frac{(1+x)}{(1-x)}$

$$h'(x) = ?$$

Propriedades Operatórias

Derivada de um quociente

Exemplo: $h(x) = \frac{(1+x)}{(1-x)}$

$$h'(x) = \frac{1 * (1 - x) - (1 + x) * -1}{(1 - x)^2}$$

Propriedades Operatórias

Derivada de um quociente

Exemplo: $h(x) = \frac{(1+x)}{(1-x)}$

$$h'(x) = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$