Método de Elementos Finitos Aplicado à Seleção de Materiais

Prof. Dr. André Paulo Tschiptschin

Departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais

Método de Elementos Finitos

- ✓ A análise por elementos finitos é um método numérico utilizado em computadores, para resolver problemas de engenharia.
- ✓ Montam-se funções de interpolação para reduzir o comportamento de um campo infinito de pontos para um número finito de pontos.
- ✓ A interconectividade desses pontos é definida por elementos finitos que preenchem a geometria do componente a ser estudado.
- ✓ A genialidade do método consiste no fato de que possibilita a solução sistemática de problemas com boa aproximação das soluções analíticas e dos resultados experimentalmente observados.

Problemas de engenharia que podem ser resolvidos pelo método dos elementos finitos

PROBLEMA	INCÓGNITA	CONDIÇÕES DE CONTORNO
Estrutural	Deslocamento	Tensão e deslocamento
Térmico	Temperatura	Fluxo de calor, convecção ou radiação
Elétrico	Voltagem	Fonte de corrente
Magnético	Força eletromotriz	Campo magnético
Escoamento de fluídos	Pressão, velocidade	Velocidade
Difusão	Concentração mássica	Fluxo dos componentes
Corrosão	Taxa de consumo de anodo	Potencial elétrico
Proapgação de trincas	Liberação de energia de deformação	Tensão

Aproximação de solução baseado no princípio do trabalho virtual

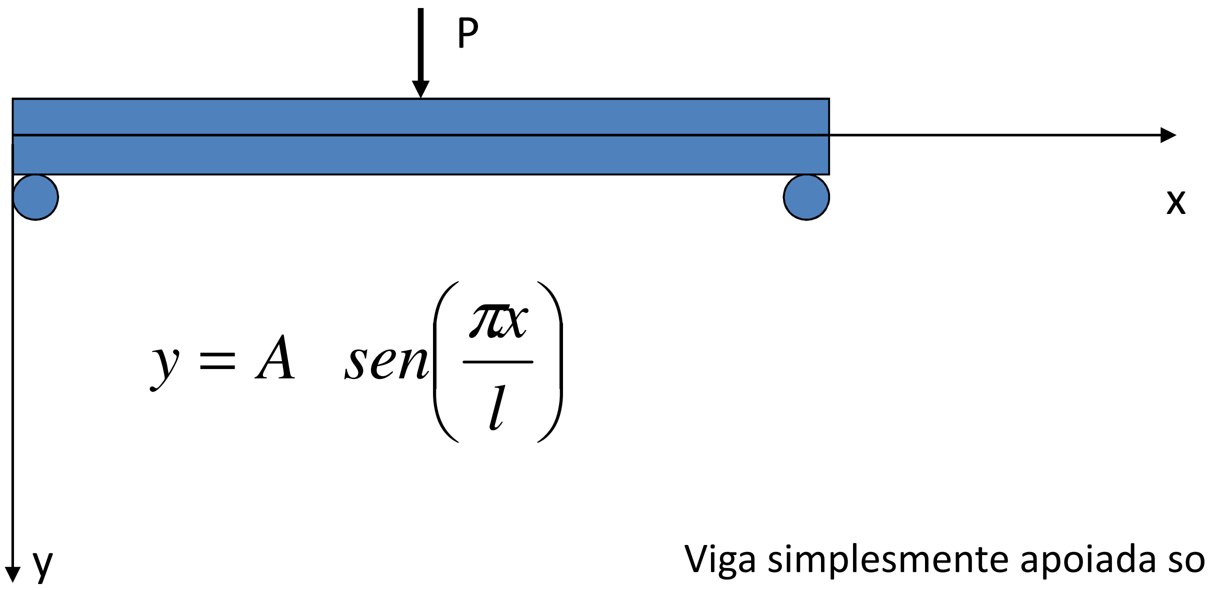
- O método de Raleigh-Ritz é um método aproximado de resolução de problemas, baseado no **princípio do trabalho virtual**.
- O princípio do trabalho virtual afirma que **a energia potencial total de um sistema elástico é mínima quando o sistema está em equilíbrio**.
- **A energia potencial total é a soma da energia potencial gravitacional e da energia de deformação elástica.**
- O **método** de Raleigh-Ritz **reduz um meio contínuo com infinitos graus de liberdade a um sistema com um número finito de graus de liberdade (DOF – degree of freedom)**.
- Entre o conjunto de funções diferenciáveis que satisfazem a condição limite, escolhe-se as funções que minimizam uma certa integral.

Graus de liberdade (DOF)

- Em mecânica, graus de liberdade (**degrees of freedom** - DOF) são os conjuntos de deslocamentos e/ou rotações independentes que especificam completamente a posição deslocada ou deformada e a orientação do corpo ou do sistema.
- Uma partícula que se move em três dimensões no espaço tem três componentes de deslocamento translacional como graus de liberdade (DOF), enquanto um corpo rígido tem no máximo seis graus de liberdade incluindo as três rotações.
- Translação corresponde a movimento sem rotação e a rotação é o movimento angular em torno de um eixo.

Fundamentos do método dos elementos finitos

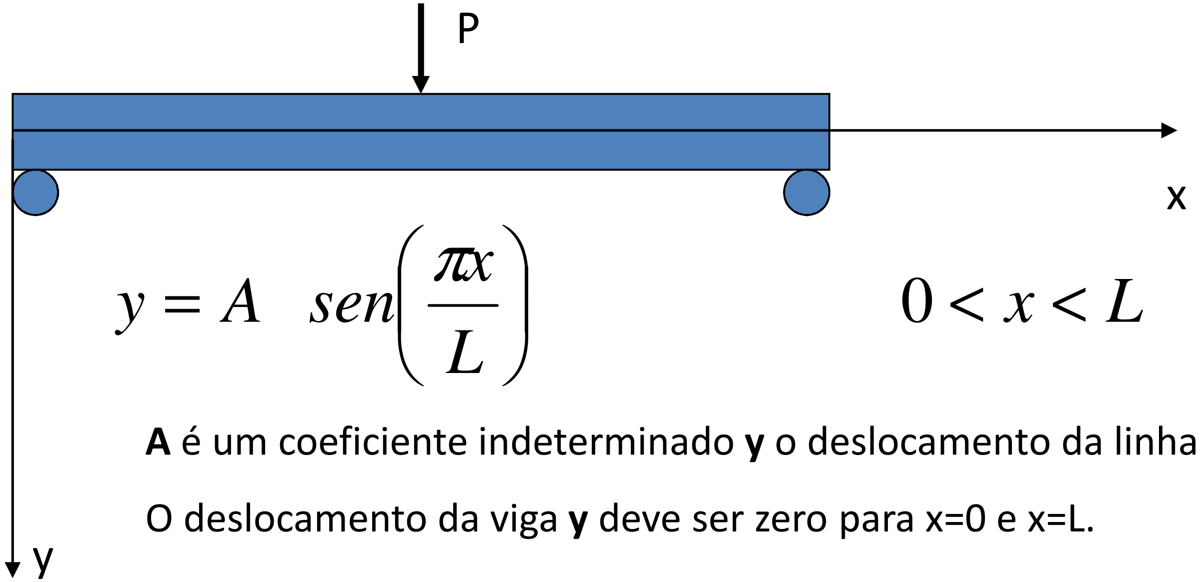
- O método torna isso possível, baseando-se na hipótese de que os deslocamentos no meio contínuo são função de um número finito de coeficientes indeterminados, que devem ser determinados.
- O problema passa a ser a determinação destes coeficientes. Por exemplo:



$$y = A \quad sen\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Viga simplesmente apoiada sob ação de uma carga P localizada no meio.

Condições de contorno para resolução do problema



$$y = A \quad sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) \qquad\qquad 0 < x < L$$

A é um coeficiente indeterminado **y** o deslocamento da linha central da viga .

O deslocamento da viga **y** deve ser zero para x=0 e x=L.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -A\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

A derivada segunda é proporcional à curvatura da viga e portanto aos momentos aplicados, que devem também ser zero nas extremidades, x=0 e x=L.

Condições de contorno são que y e d^2y/dx^2 são zero para x=o e x=L

Método de Raleigh-Ritz

- A solução do problema consiste em encontrar uma expressão para a energia potencial do sistema em termos de A, a constante da equação que descreve a deformação da viga.

- Para isso, deve-se diferenciar a função y do deslocamento com relação a A e igualar a zero. Em outras palavras, trata-se de encontrar a geometria que resulta em um valor mínimo de energia potencial total, dada por:

$$V = U + \Omega$$

sendo:

V a energia potencial total

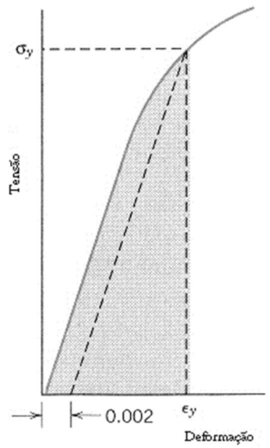
U a energia de deformação elástica

Ω a energia potencial gravitacional

Método de Raleigh-Ritz

A energia elástica U pode ser descrita por:

$$U = 1/2\int EI(d^2y/dx^2)^2 dx$$



Sendo:

E o módulo de Young ou rigidez do material

I o módulo da seção ou rigidez geométrica (momento de inércia)

A energia potencial no centro da viga é:

$$\Omega = P(-A)$$

P é a força aplicada

A é a máxima deflexão da viga

Método de Raleigh-Ritz

Diferenciando a equação da energia total V com relação a A e igualando a zero

$$dV/dA = 0$$

$$dV/dA = d/dA[(\pi^4 EIA^2/2L^3) - PA] = 0$$

portanto:

$$A = (2PL^3)/(\pi^4 EI) \quad e$$

e:

$$y = (2PL^3)/(\pi^4 EI) \quad sen(\pi x/L)$$

Método de Raleigh-Ritz

As soluções encontradas fornecem valores de deflexão 3% diferentes da solução analítica; entretanto os valores máximos de tensão são 19% maiores.

Uma melhor aproximação pode ser obtida se acrescentarmos mais um grau de liberdade:

$$y = A \quad sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) + B\, sen\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \qquad 0 < x < L$$

e usando: $$\frac{\partial V}{\partial A} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial B} = 0$$

obtém-se:

$$A = 2PL^3 / \pi^4 EI$$

$$B = 2PL^3 / 27\pi^4 EI$$

As soluções encontradas fornecem agora, valores de deflexão 1% diferentes da solução analítica, e valores máximos de tensão 8% maiores.

Método dos elementos finitos

- O método dos elementos finitos pode ser pensado como uma extensão do método de Raleigh-Ritz, salvo duas grandes diferenças:

  - As estruturas no método de Raleigh-Ritz são tratadas como um único elemento. No método dos elementos finitos utilizam-se múltiplos elementos e nós.

  - No método dos elementos finitos os valores de deslocamentos e rotações são as variáveis (coeficientes indeterminados). É um método mais intuitivo. Já no método de Raleigh-Ritz as deformações são as amplitudes de uma função senoidal e os coeficientes indeterminados são as constantes das equações.

Método dos elementos finitos

- **O meio contínuo** é dividido em um certo número de **elementos** (triângulos, quadriláteros, tetraedros, etc.). **Os deslocamentos internos** desses elementos são descritos pelo **deslocamentos dos nós** por meio de **funções de interpolação** geralmente polinomiais.
- **A partir destas funções obtêm-se expressões para a energia que devem ser minimizadas (**a fim de obter um conjunto de equações algébricas). **As soluções das equações descrevem os deslocamentos nos nós.**
- Os valores do deslocamento em cada nó são análogos aos valores do coeficiente **A** calculado no exemplo da viga simplesmente apoiada, pelo método de Raleigh-Ritz .
- **Ao se determinar os deslocamentos em cada nó consegue-se determinar os deslocamentos e as tensões em todo o contínuo**.
- De uma maneira geral os deslocamentos calculados dessa forma são mais precisos que as tensões.

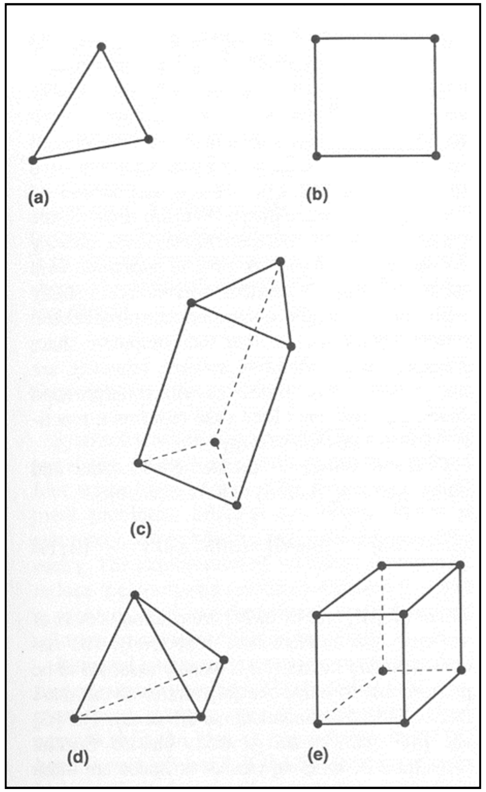
Comparação entre os métodos de Raleigh-Ritz e de elementos finitos

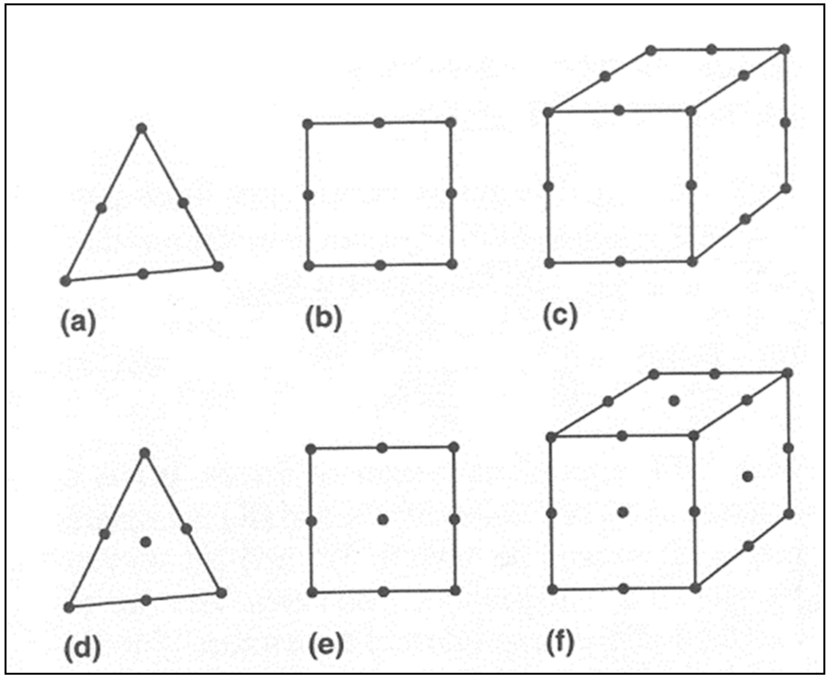
MÉTODO DE RALEIGH-RITZ	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS
A **estrutura** é tratada como um única entidade, portanto é **constituída por um único elemento (é um contínuo)**	A **estrutura** é **constituída por múltiplos elementos** conectados por **nós**.
As variáveis a serem otimizadas são os **coeficientes A, B, C,.... das equações** descritvas do problema.	Os **deslocamentos e as rotações** é que são as **variáveis** a serem otimizadas
Menos intuitivo. Necessita especificar **condições de contorno e restrições referentes a amplitude de ondas senoidais**.	Mais intuitivo, pois as **condições de contorno e as restrições são referentes a deslocamentos e rotações.**

Elementos contínuos

- ✓ **Um elemento tem uma geometria completamente definida por seus nós.**

(1)



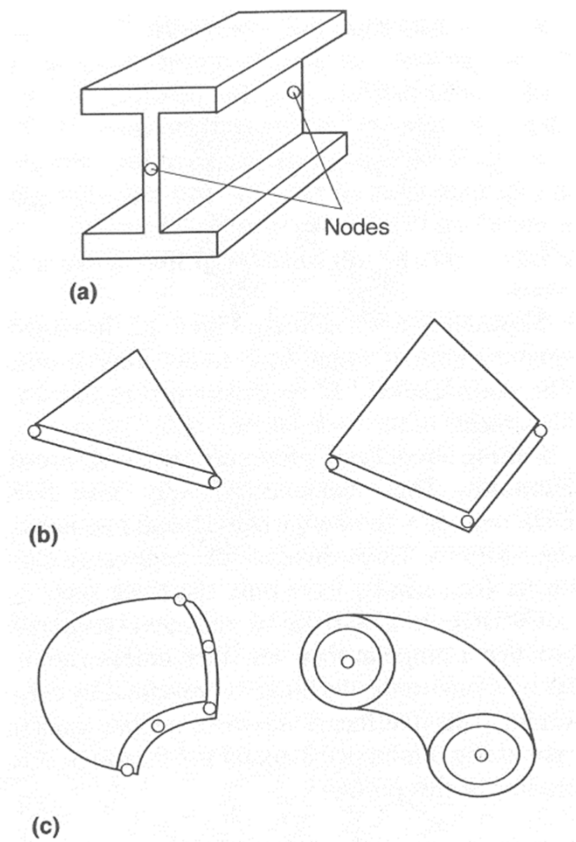


(2)

Elementos contínuos de (1) baixo-grau de liberdade; (2) alto grau de liberdade

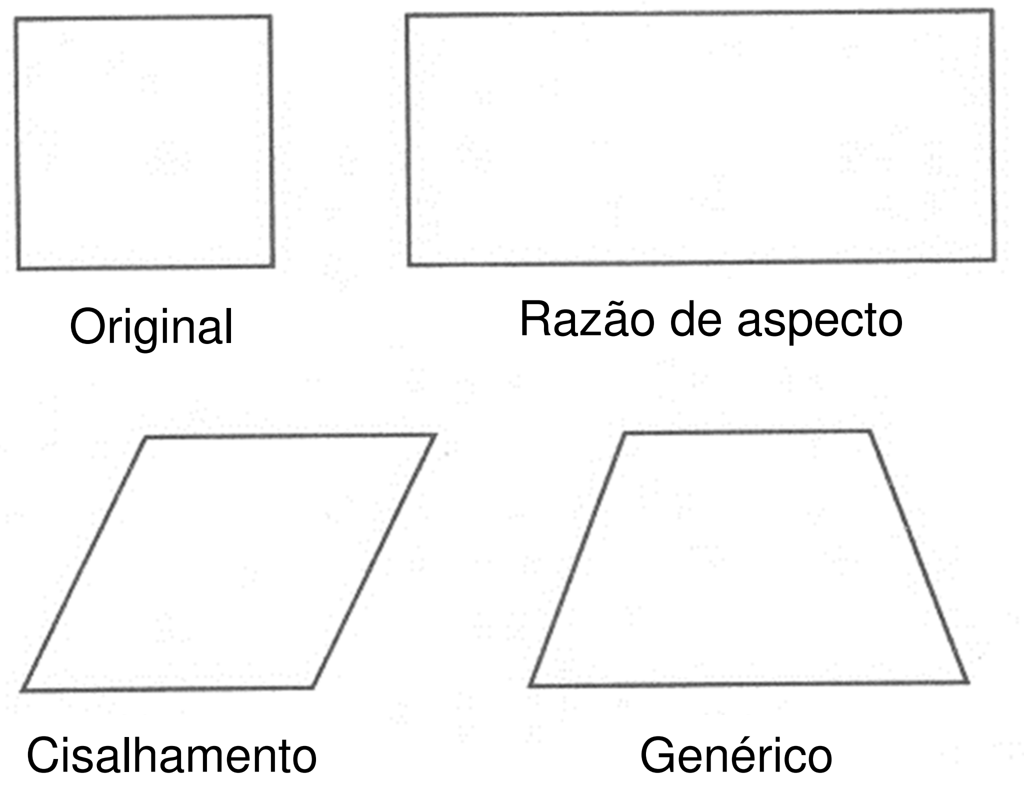
Elementos Estruturais

✓ **Têm comportamento que seguem certas hipóteses estruturais.**



Elementos estruturais: (a) viga, (b) placa, (c) conchas (d) cotovelos

Distorções típicas de elementos de malha



Tipos de distorção de elementos quadriláteros.

Problemas lineares e não lineares

- Muitos problemas de elementos finitos podem ser resolvidos usando como hipóteses a **linearização**:
  - **as deformações são pequenas e o comportamento dos materiais é considerado linearmente elástico**.
  - as soluções são em geral rápidas.
- Existe **um grande número de problemas em que as tensões e deslocamentos não são proporcionais às cargas aplicadas**. São problemas não lineares.
  - **As soluções requerem técnicas iterativas e recursos computacionais pesados.**
  - **Problemas que envolvem grandes deformações, materiais inelásticos, fluência, relaxação plástica, histerese, transformações de fase e tensões residuais também são tratados utilizando o modelamento não linear. A modelação envolve conhecimentos e modelos que precedem a modelação por elementos finitos: teoria da plasticidade, modelos de fluência, etc.**

Solução do sistema de equações

- Para problemas estruturais estáticos, o método dos elementos finitos resulta em um sistema de equações que podem ser expressas na forma de:

Lei de Hooke

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{K}][\mathbf{u}]$$

sendo $[\mathbf{F}]$ a coluna dos vetores de força

$[\mathbf{u}]$ a coluna dos vetores deslocamento

$[\mathbf{K}]$ uma matriz quadrada

O tamanho da matriz quadrada é dado pelo produto do número de nós pelo número de graus de liberdade por nó.

Exemplo

- O método dos elementos finitos emprega elementos interconectados
- Uma função deslocamento encontra-se acoplada a cada elemento finito
- Cada elemento encontra-se interconectado através de interfaces comuns, através de nós
- O problema pode ser descrito por uma relação:

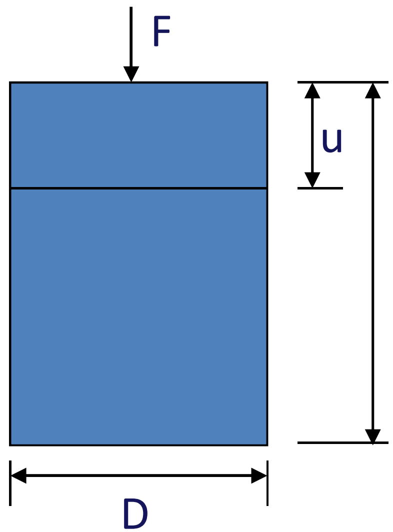
Força = Rigidez x deslocamento

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{K}]\ [\mathbf{u}]$$

$$\sigma = F / A = E\varepsilon$$

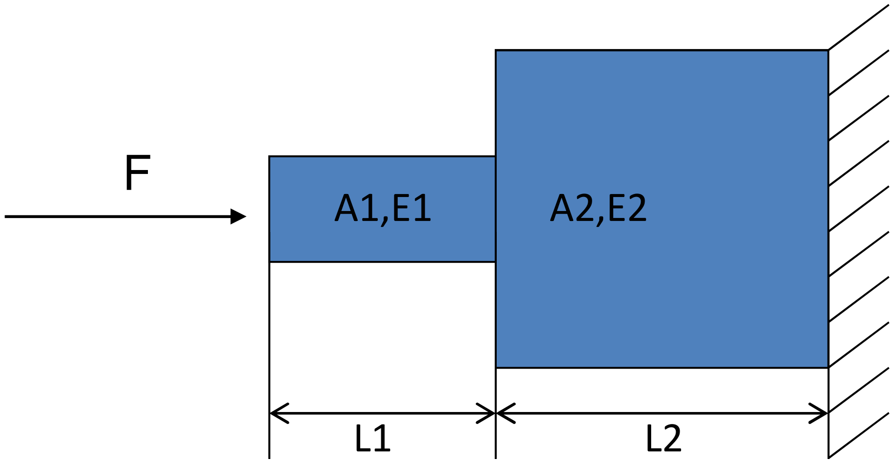
$$F = AE(u / L) = (AE / L)u = Ku$$

$$\sigma = E(u / L)$$

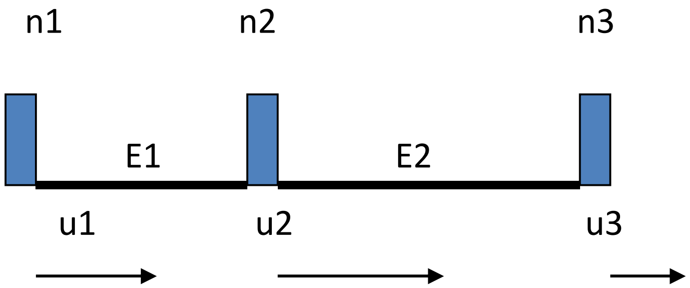


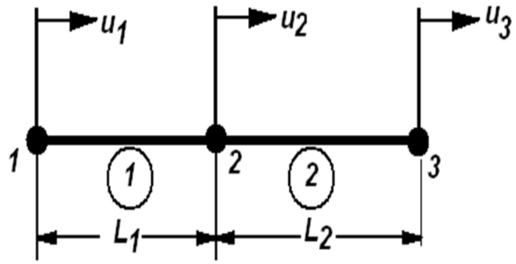
Exemplo

Aplicação



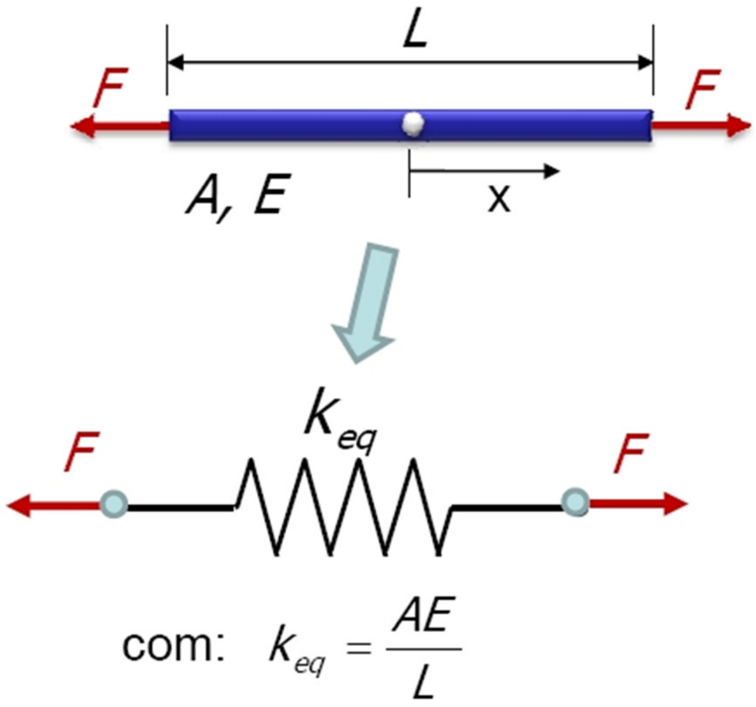
Modelo correspondente

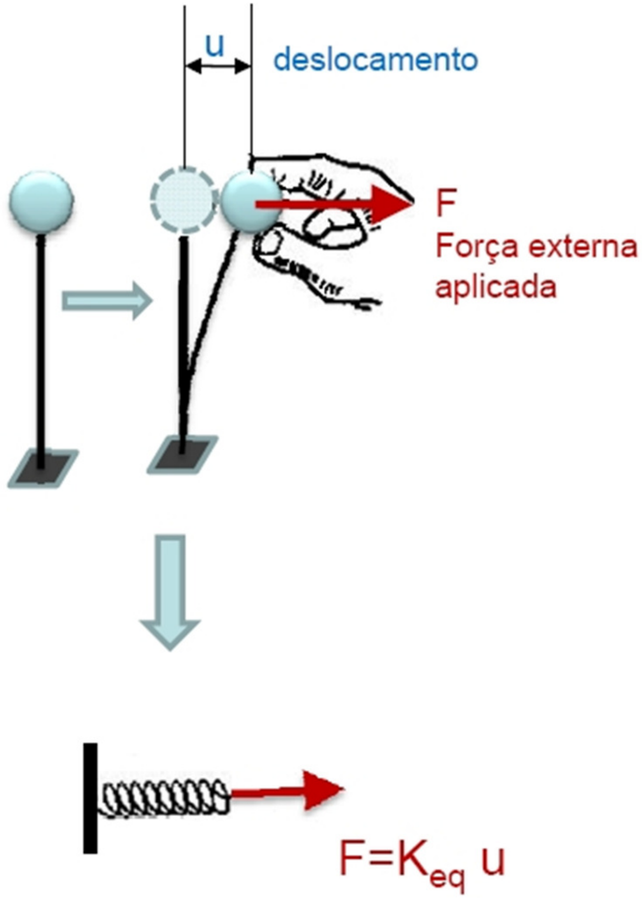




$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

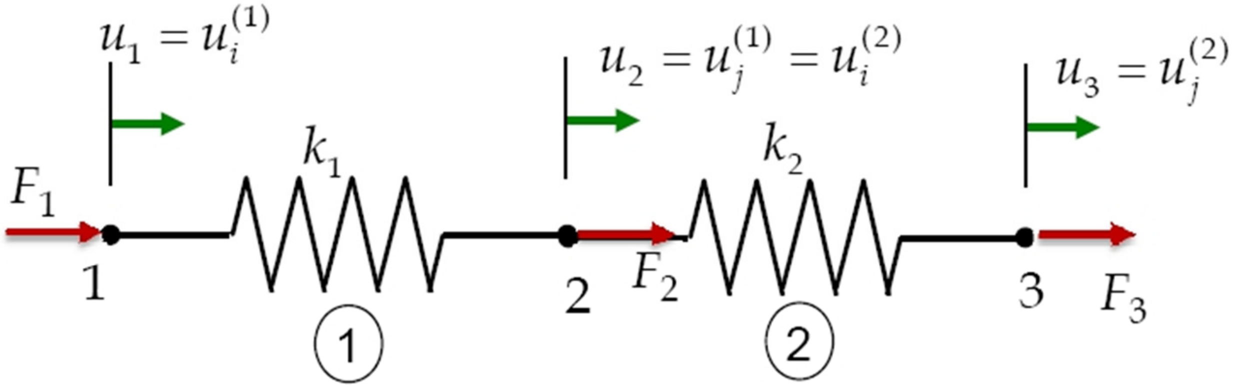
Analogia com molas





Analogia com molas para vários elementos

Os nós são numerados globalmente como nós 1,2 e 3.

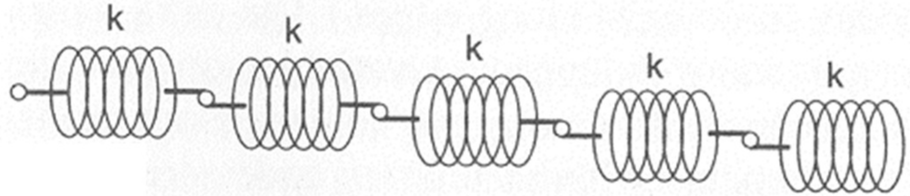


$u_{i,j}^{(1,2)}$ - índice inferior refere-se ao *número local do nó* , representado pelas letras *i* e *j*, e o índice superior refere-se ao *número global do elemento*

$u_{1,2,3}$ – índice inferior representa o número global do nó.

Solução do sistema de equações

A maior parte dos problemas estruturais tem termos de rigidez agrupados ou formando faixas ao longo da diagonal.



Matriz de rigidez do elemento 1

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

Os termos de rigidez das duas matrizes se somam nos GL coincidentes

Matriz de rigidez do elemento 2

All springs are in series, leading to a banded stiffness matrix; for unit stiffnesses:

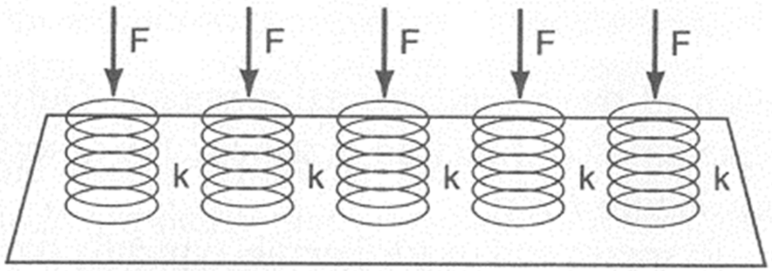
$$[K] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Matriz de rigidez para molas conectadas em série

METMAT

Solução do sistema de equações

Se todos os graus de liberdade são independentes (p.e. uma série de molas espirais independentes ligadas ao solo) a matriz de rigidez seria diagonal.



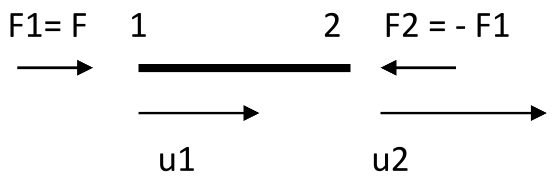
All springs are uncoupled, leading to a diagonal matrix; for unit stiffnesses:

$$[K] = \begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Matriz de rigidez para molas independentes

Exemplo

Análise no elemento 1



No nó 1: $u_1 > 0$ e $u_2 = 0$ logo

$$F_1 = \left[\frac{(A_1 \times E_1)}{L_1} \right] \times u_1 \qquad e \qquad F_2 = \left[\frac{(A_2 \times E_2)}{L_2} \right] \times u_2$$

No nó 2: $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$ logo

$$F_1 = \left[\frac{(A_1 \times E_1)}{L_1} \right] \times u_1 \qquad e \qquad F_2 = \left[\frac{(A_2 \times E_2)}{L_2} \right] \times u_2$$

Exemplo

Entretanto, u_1 e u_2 podem ser diferentes de zero, logo:

$K^*u_1 - K^*u_2 = F_1$ e $\quad -K^*u_1 + K^*u_2 = F2$

$$\begin{vmatrix} A1^*E1/L1 & -A1^*E1/L1 \\ -A2^*E2/L2 & A2^*E2/L2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} u1 \\ u2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F1 \\ F2 \end{vmatrix}$$

Donde:

A1*E1/L1*u1- A1*E1/L1*u2 = F1

- A2*E2/L2*u1+ A2*E2/L2*u2=F2

Matriz de rigidez

$$K1= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u1 & u2 & u3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} k1 & -k1 & 0 \\ -k1 & k1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \qquad k2= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u1 & u2 & u3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k2 & -k2 \\ 0 & -k2 & k2 \end{vmatrix} \end{array}$$

Exemplo

No conjunto dos elementos 1 e 2:

$$K = K_1 + K_2 = \begin{vmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{vmatrix}$$

Mas como $u_3 = 0$ (viga engastada), temos:

$$\begin{vmatrix} F \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix}$$

Deformações: $u_2 = F/k_2$ **e** $u_1 = (F/k_1) + (F/k_2)$

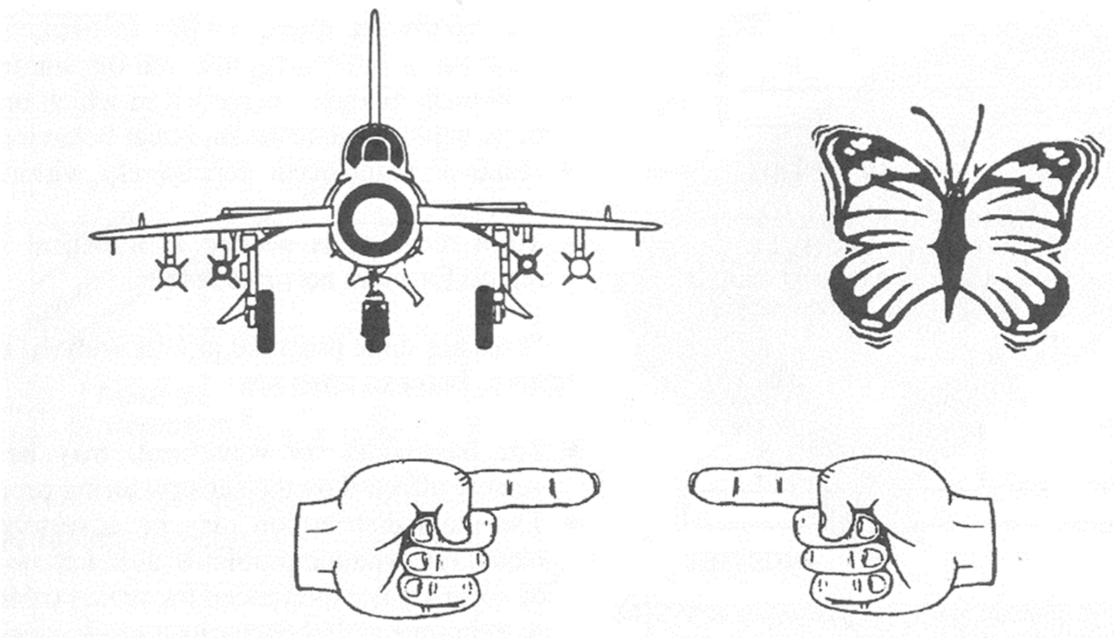
Tensões:

$s_1 = E_1 * e_1 = E_1 * (u_2 - u_1)/L_1 = E_1/L_1 * (-FL_1/A_1 * E_1) = -F/A_1$ **(compressão)**

$s_2 = E_2 * e_2 = E2 * (u_3 - u_2)/L_2 = E_2/L_2 * (-FL_2/A_2 * E_2) = -F/A_2$ **(compressão)**

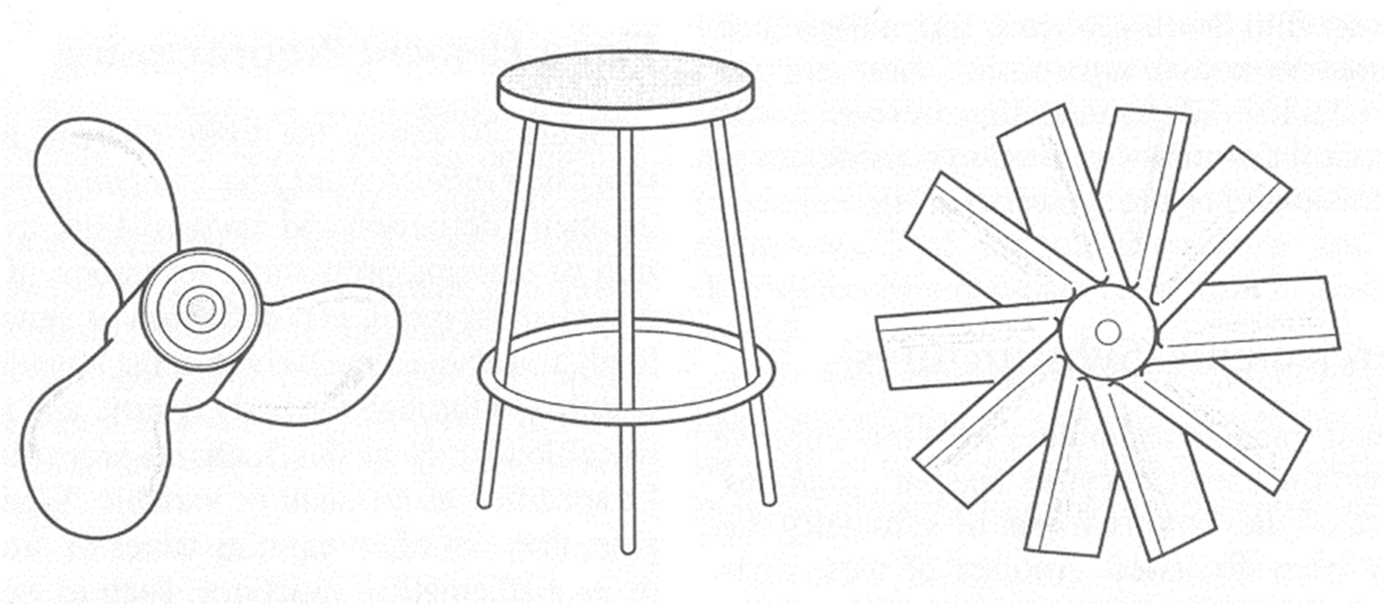
Simetria

Os problemas de elementos finitos podem ser muito simplificados considerando estruturas contendo elementos de simetria (de translação, rotação, reflexão, etc.). Os recursos computacionais necessários para resolver um problema podem ser muito reduzidos quando se lança mão da simetria.



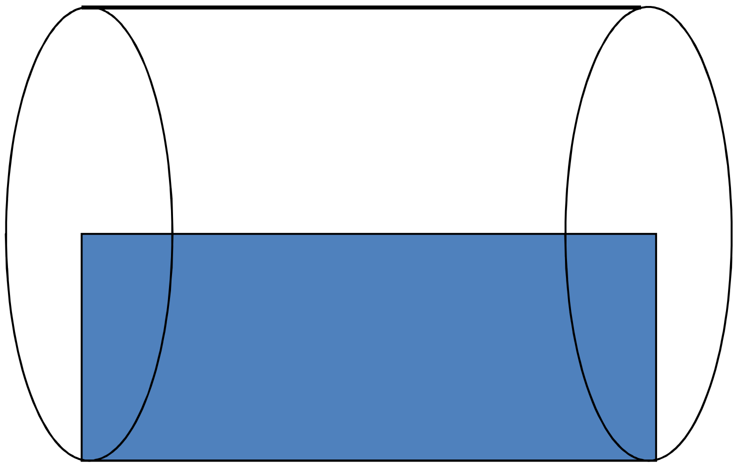
Simetria bilateral

Simetria rotacional

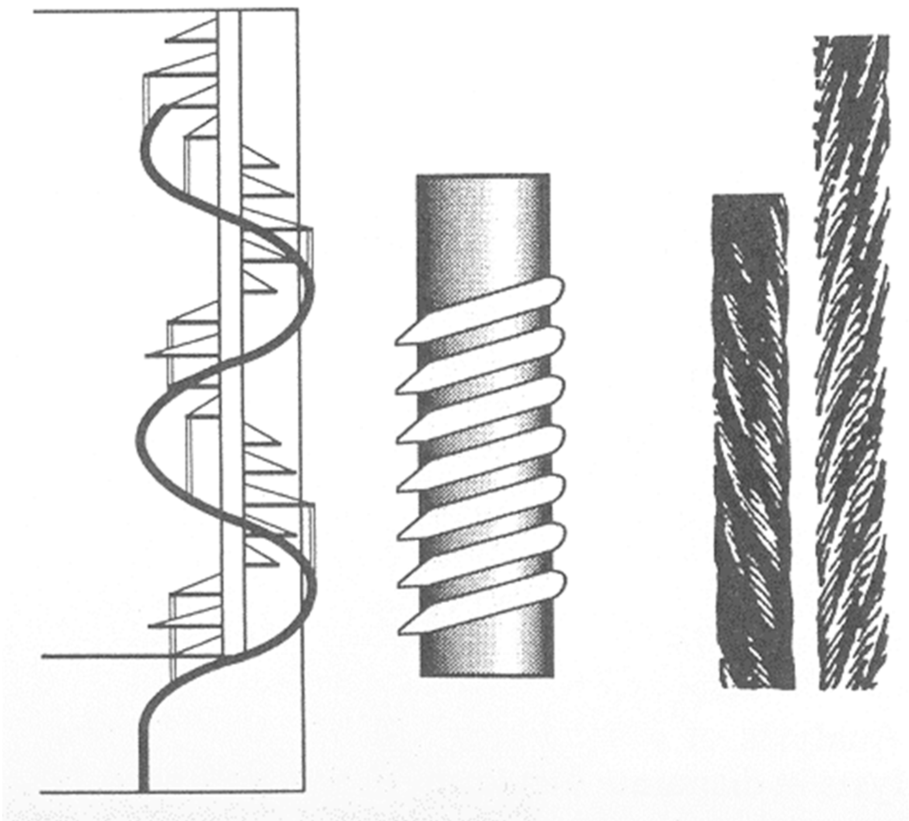


Axissimetria

Axissimetria é um caso particular de simetria rotacional. A axissimetria permite reduzir um problema tridimensional a um bidimensional.



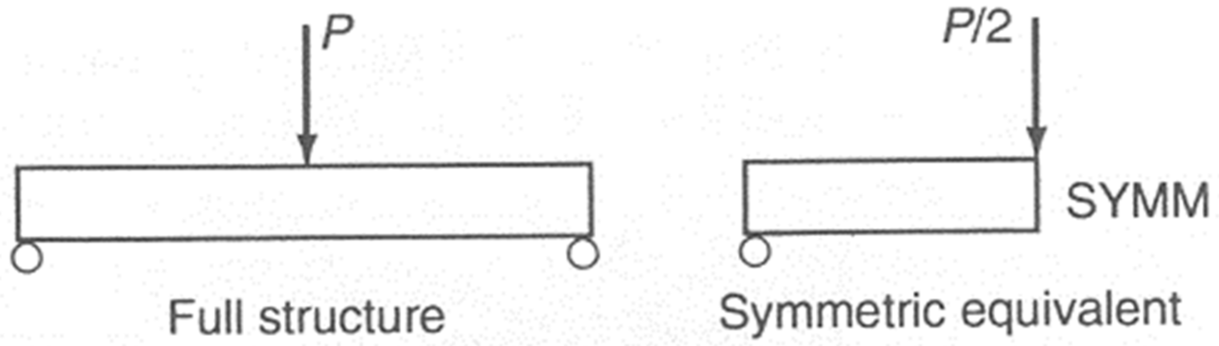
Simetrias combinadas



Simetria translacional combinada com simetria rotacional

Simetria

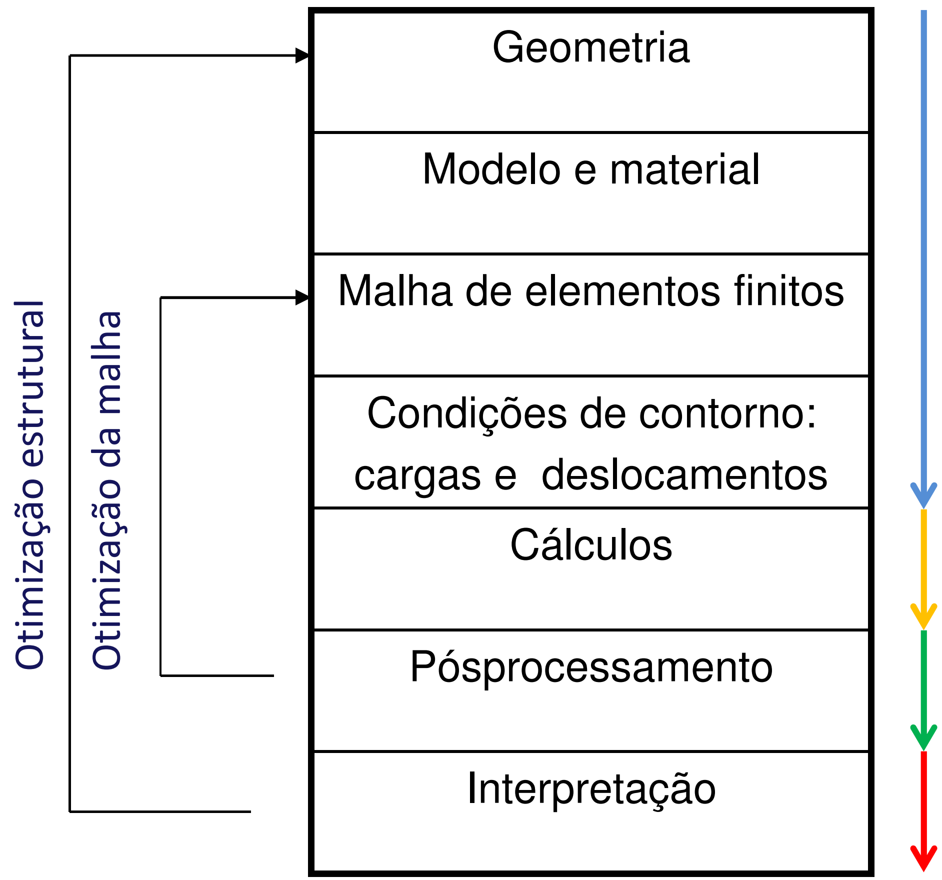
Quando além da geometria há simetria de aplicação de carga (e reações) é simples reduzir o problema à região fundamental.



Cargas simétricas. SYMM quer dizer que $u_x = 0$ em toda a seção

Processo típico de modelamento por elementos finitos

O modelamento por elementos finitos envolve a definição e a manipulação da da geometria, especificação do material e suas propriedades, geração da malha de elementos finitos e definição das cargas e deslocamentos que serão aplicados ao componente.



Processo típico de elementos finitos

Pré-processamento

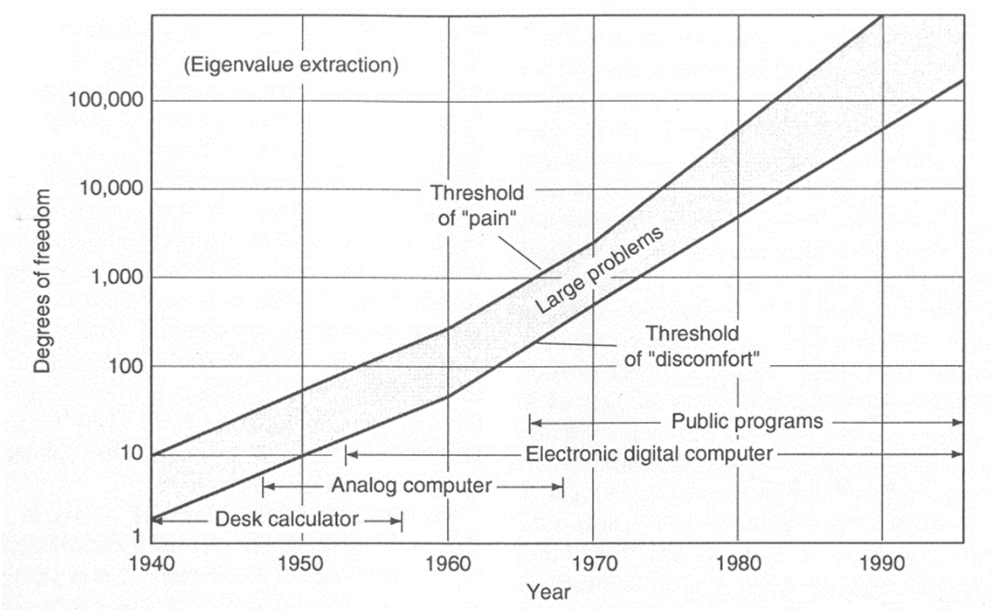
Processamento

Pós-processamento

Interpretação

Pré-processamento - propriedades dos materiais

- Propriedades dos materiais: constantes ou variáveis.
- Propriedades variáveis em função do tempo, da temperatura, etc.
- Consulta a tabelas ou funções matemáticas que definem a variação.
- Frequentemente o pré-processamento consome 80% do tempo do modelamento



Definição de problema grande.

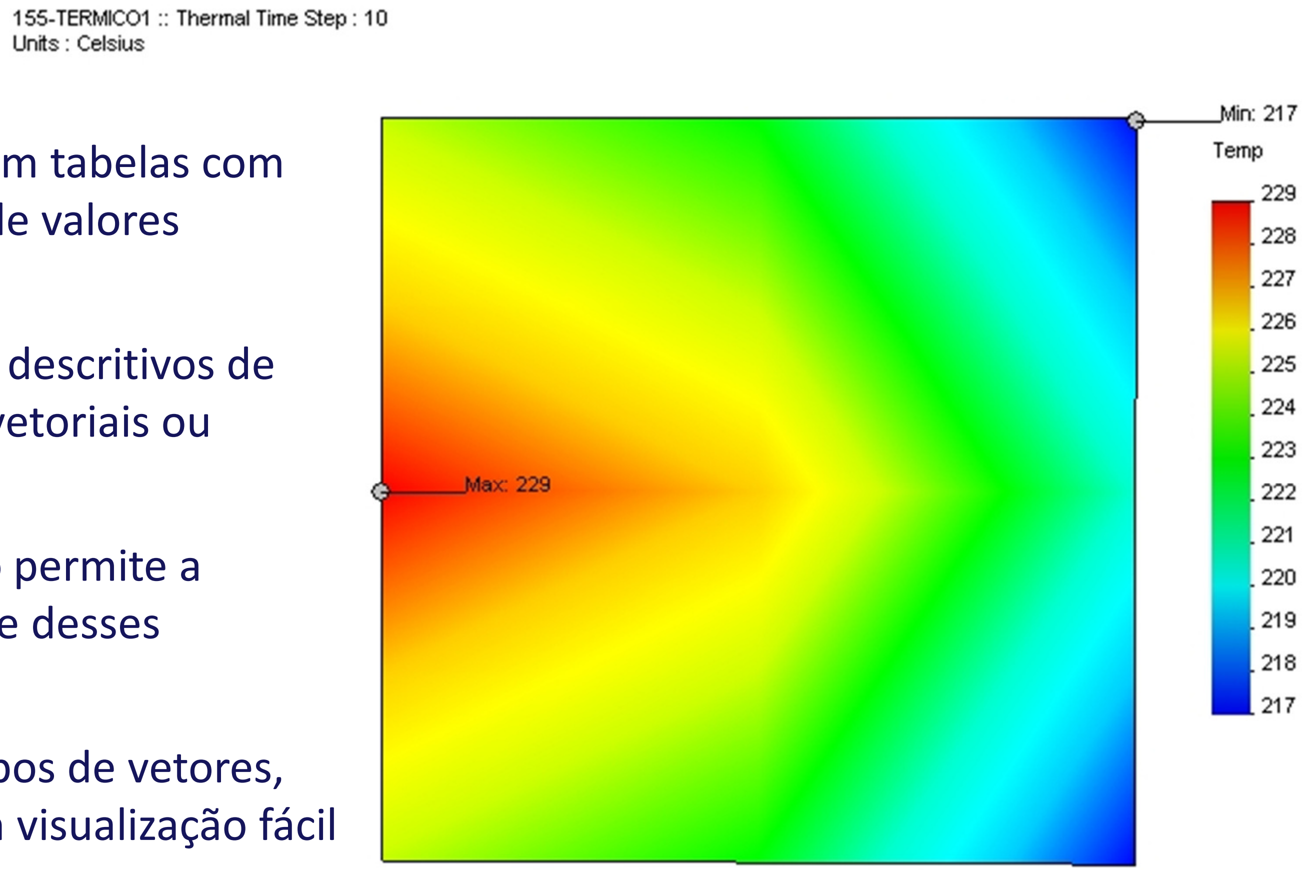
Pós-processamento

Os resultados fornecem tabelas com milhares ou milhões de valores numéricos

Os valores podem ser descritivos de grandezas escalares, vetoriais ou tensoriais.

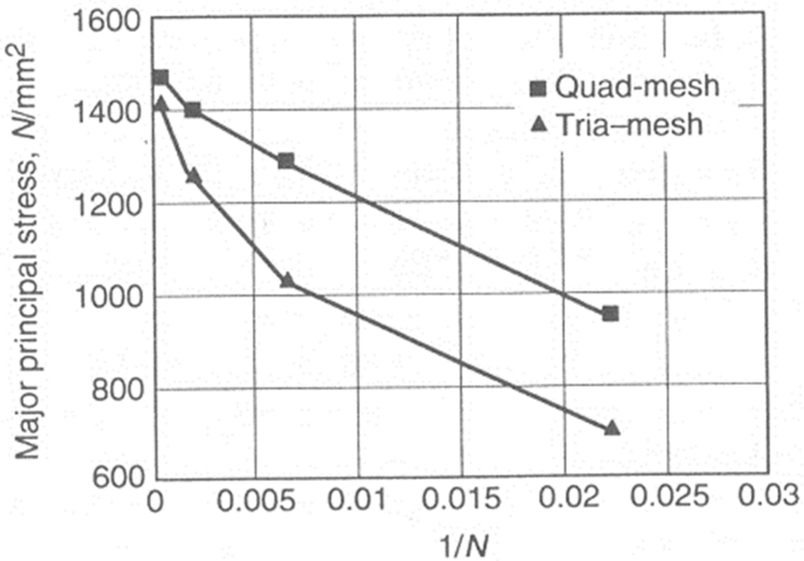
O pós-processamento permite a interpretação eficiente desses números.

Mapas de cores, campos de vetores, elipses, etc. Permitem visualização fácil dos resultados obtidos.

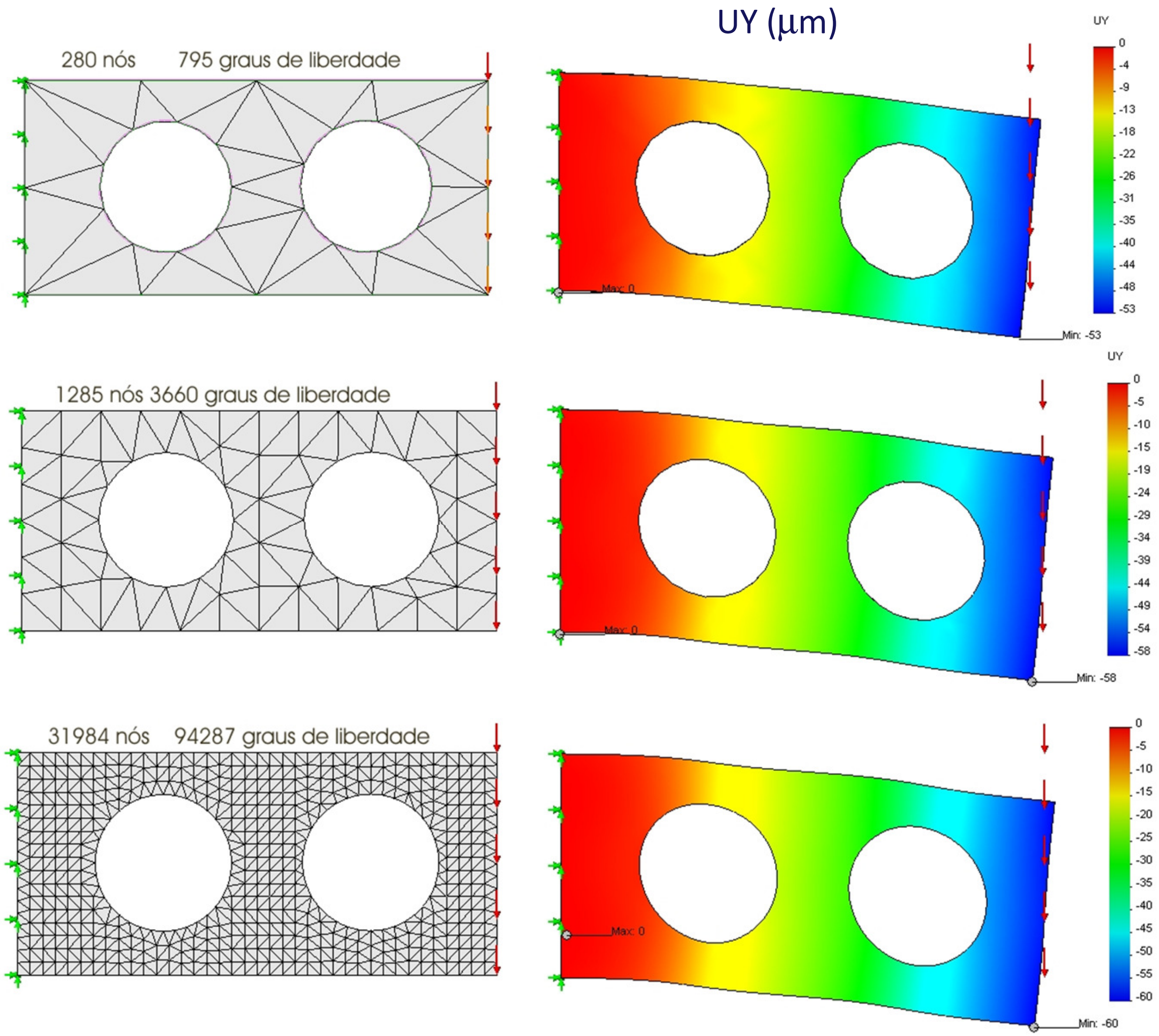


Tamanho da malha, precisão e tempo de processamento

Um dos problemas fundamentais em análise por elementos finitos é projetar uma malha que seja fina o suficiente para dar boas respostas mas grossa o suficiente para rodar sem necessitar recursos extraordinários de computação.



Tamanho da malha, precisão e tempo de processamento



Quando o número de nós na malha é reduzido os resultados tendem a ser mais imprecisos.

O aumento do número de nós e do número de graus de liberdade na malha aumenta a precisão.

O aumento do número de nós e de graus de liberdade aumenta muito o número de equações e o tempo necessário para processamento.

O problema pode se tornar intratável.