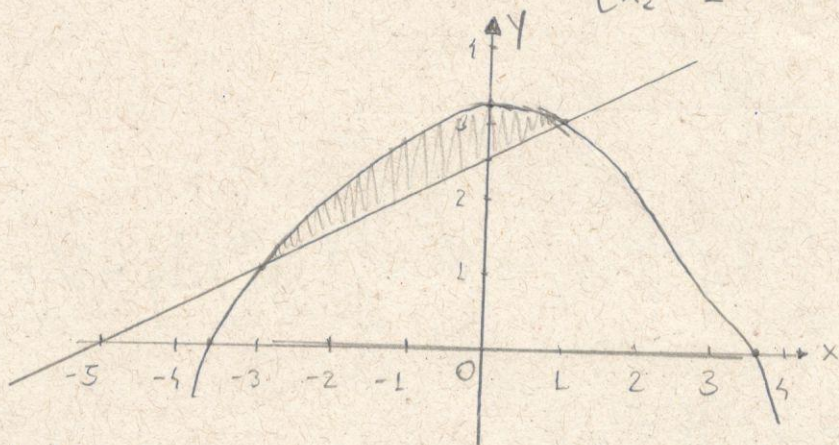


Sólidos de Revolução

1- Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo x , da região limitada pelas parábola $y = \frac{1}{4}(13-x^2)$ e pela reta $y = \frac{1}{2}(x+5)$.

Ponto de interseção: $\frac{1}{4}(13-x^2) = \frac{1}{2}(x+5) \Rightarrow 2(13-x^2) = 4(x+5) \Rightarrow 13-x^2 = 2(x+5)$

$$\Rightarrow 13-x^2 = 2x+10 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$



$$V = \pi \int_{-3}^1 \left[\left(\frac{1}{4}(13-x^2) \right)^2 - \left[\frac{1}{2}(x+5) \right]^2 \right] dx \Rightarrow V = \pi \int_{-3}^1 \left(\frac{1}{16}(13-x^2)^2 - \frac{1}{4}(x+5)^2 \right) dx$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_{-3}^1 \left(\frac{1}{16}(169 - 26x^2 + x^4) - \frac{1}{4}(x^2 + 10x + 25) \right) dx \Rightarrow V =$$

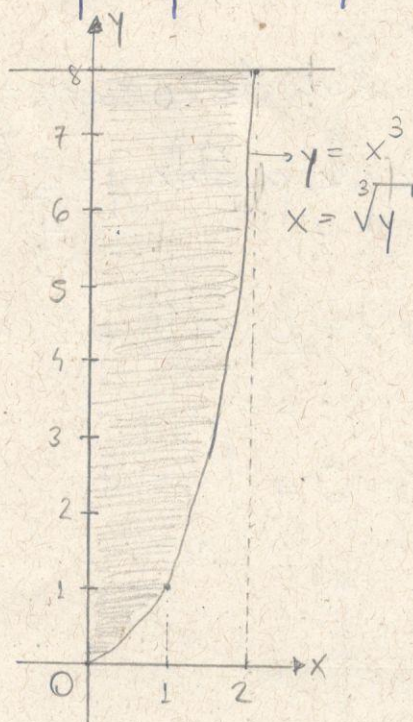
$$= \pi \int_{-3}^1 \left(\frac{x^4}{16} - \frac{26x^2}{16} + \frac{169}{16} - \frac{x^2}{4} - \frac{10x}{4} - \frac{25}{4} \right) dx \Rightarrow V = \pi \int_{-3}^1 \left(\frac{x^4}{16} - \frac{30x^2}{16} - \frac{10x}{4} + \frac{69}{16} \right) dx$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{16} \int_{-3}^1 x^4 dx - \frac{\pi}{16} \int_{-3}^1 30x^2 dx - \frac{10\pi}{4} \int_{-3}^1 x dx + \frac{69\pi}{16} \int_{-3}^1 1 dx \Rightarrow V =$$

$$= \frac{\pi}{16} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-3}^1 - \frac{30\pi}{16} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-3}^1 - \frac{10\pi}{4} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-3}^1 + \frac{69\pi}{16} [x]_{-3}^1 \Rightarrow V = \frac{\pi}{16} \left(\frac{1^5}{5} - \frac{(-3)^5}{5} \right) -$$

$$- \frac{30\pi}{16} \left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3} \right) - \frac{10\pi}{4} \left(\frac{1^2}{2} - \frac{(-3)^2}{2} \right) + \frac{69\pi}{16} (1 - (-3)) \Rightarrow V = \frac{64\pi}{5} \mu V$$

2- Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada pela parábola $y = x^3$ e pela reta $y = 8$.

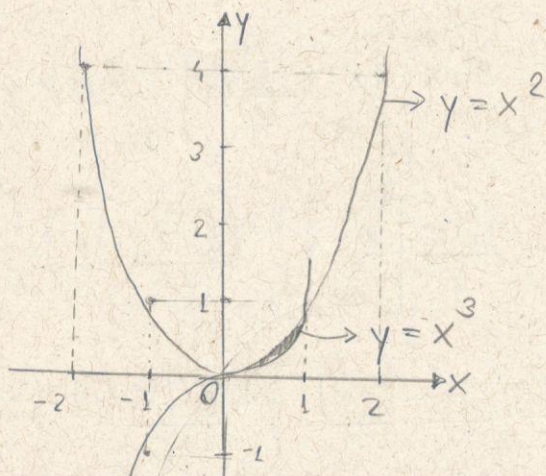


$$V = \pi \int_0^8 [\sqrt[3]{y}]^2 dy \Rightarrow V = \pi \int_0^8 (y^{1/3})^2 dy \Rightarrow V = \pi \int_0^8 (y^{2/3}) dy \Rightarrow V = \pi \left[\frac{3y^{5/3}}{5} \right]_0^8$$

$$\Rightarrow V = \pi \left(\frac{3 \cdot 8^{5/3}}{5} - \frac{3 \cdot 0^{5/3}}{5} \right) \Rightarrow V = \frac{96\pi}{5} \text{ u.v.}$$

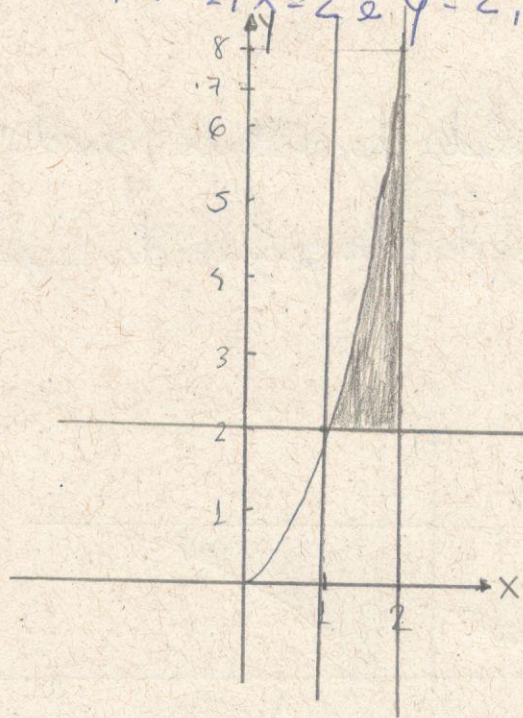
3- Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região delimitada pelos gráficos das equações dadas: $y = x^2$, $y = x^3$, $y = 0$ e $y = 8$.

Pontos de interseção: $x^2 = x^3 \Rightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$



É inviável calcular o volume com a reta $y = 8$!

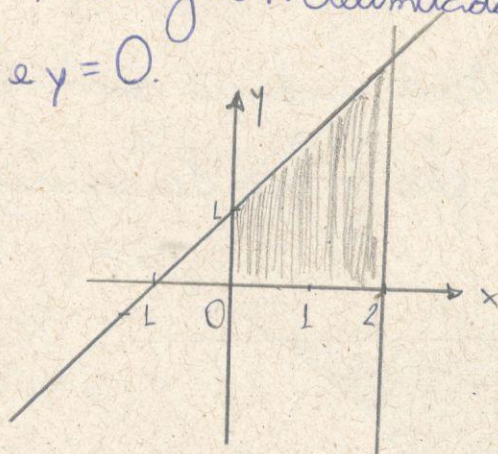
4- Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada por $y = 2x^2$, $x = 1$, $x = 2$ e $y = 2$, em torno da reta $y = 2$.



(2)

$$V = \pi \int_1^2 [2x^2 - 2]^2 dx \Rightarrow V = \pi \int_1^2 (4x^4 - 8x^2 + 4) dx \Rightarrow V = 4\pi \int_1^2 x^4 dx - 8\pi \int_1^2 x^2 dx + 4\pi \int_1^2 1 dx \Rightarrow V = 4\pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_1^2 - 8\pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + 4\pi [x]_1^2 \Rightarrow V = \frac{4\pi}{5} (2^5 - 1^5) - \frac{8\pi}{3} (2^3 - 1^3) + 4\pi (2 - 1) \Rightarrow V = \frac{152\pi}{15} \text{ u.v.}$$

5- Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo dos x , da região R delimitada pelos gráficos das equações: $y = x + 1$, $x = 0$, $x = 2$ e $y = 0$.



$$V = \pi \int_0^2 (x+1)^2 dx$$

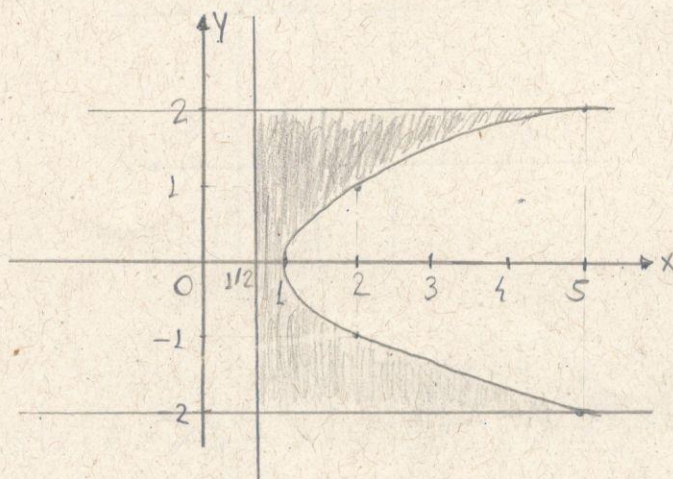
$$V = \pi \int_0^2 (x^2 + 2x + 1) dx$$

$$V = \pi \int_0^2 x^2 dx + 2\pi \int_0^2 x dx + \pi \int_0^2 1 dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \pi [x^2]_0^2 + \pi [x]_0^2$$

$$V = \pi \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) + \pi (2^2 - 0^2) + \pi (2 - 0) \rightarrow V = \frac{26\pi}{3} \text{ u.v.}$$

6-Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região R delimitada pelos gráficos das equações: $x = y^2 + 1$; $x = \frac{1}{2}$; $y = -2$ e $y = 2$.

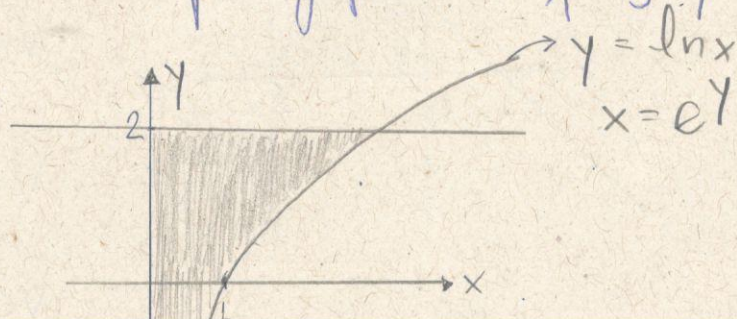


$$V = \pi \int_{-2}^2 \left[(y^2 + 1)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] dy = \pi \int_{-2}^2 \left[(y^2 + 1)^2 - \frac{1}{4} \right] dy \Rightarrow V = \pi \int_{-2}^2 \left(y^4 + 2y^2 + 1 - \frac{1}{4} \right) dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_{-2}^2 y^4 dy + 2\pi \int_{-2}^2 y^2 dy + \frac{3\pi}{4} \int_{-2}^2 1 dy \Rightarrow V = \pi \left[\frac{y^5}{5} \right]_{-2}^2 + 2\pi \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-2}^2 + \frac{3\pi}{4} [y]_{-2}^2$$

$$\Rightarrow V = \pi \left(\frac{2^5}{5} - \frac{(-2)^5}{5} \right) + 2\pi \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} \right) + \frac{3\pi}{4} (2 - (-2)) \Rightarrow V = \frac{397\pi}{15} \text{ u.v.}$$

7) Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo y , da região R delimitada pelos gráficos das equações $y = \ln x$; $y = -1$; $y = 2$ e $x = 0$.



$$V = \pi \int_{-1}^2 (e^y)^2 dy \Rightarrow V = \pi \int_{-1}^2 e^{2y} dy$$

(3)

Pelo método de integração por substituição de variáveis, temos que:

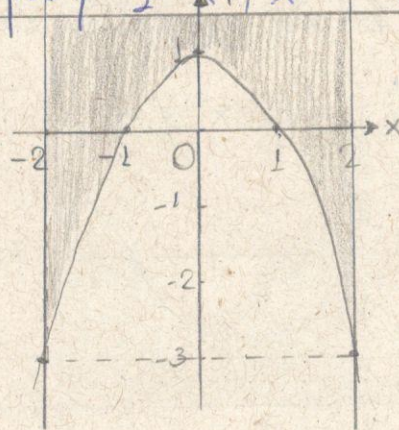
Fazendo $u = 2y$, $du = 2dy \Rightarrow dy = \frac{du}{2}$

$y \rightarrow -1, u \rightarrow -2$
 $y \rightarrow 2, u \rightarrow 4$

$$V = \pi \int_{-1}^2 e^{2y} dy \Rightarrow V = \pi \int_{-2}^4 e^u \frac{du}{2} \Rightarrow V = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^4 e^u du \Rightarrow V = \frac{\pi}{2} [e^u]_{-2}^4 \Rightarrow V =$$

$$= \frac{\pi}{2} (e^4 - e^{-2})$$

8- Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y=2$, da região limitada por $y=1-x^2$, $x=-2$, $x=2$ e $y=2$.

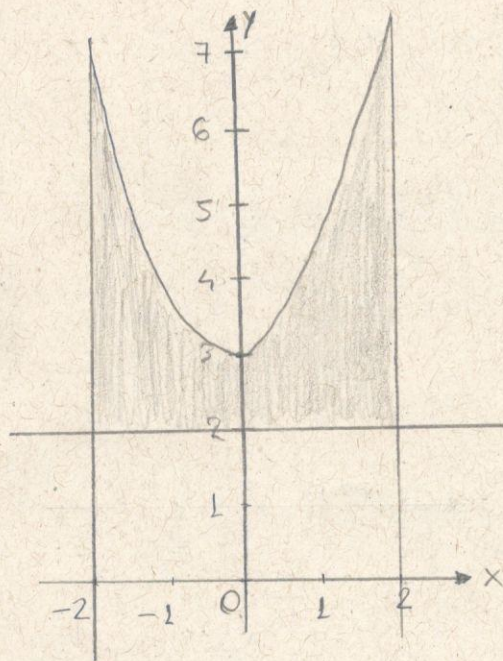


$$V = \pi \int_{-2}^2 [2 - (1 - x^2)]^2 dx \Rightarrow V = \pi \int_{-2}^2 (x^2 + 1)^2 dx \Rightarrow V = \pi \int_{-2}^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_{-2}^2 x^4 dx + 2\pi \int_{-2}^2 x^2 dx + \pi \int_{-2}^2 1 dx \Rightarrow V = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2 + 2\pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 + \pi [x]_{-2}^2$$

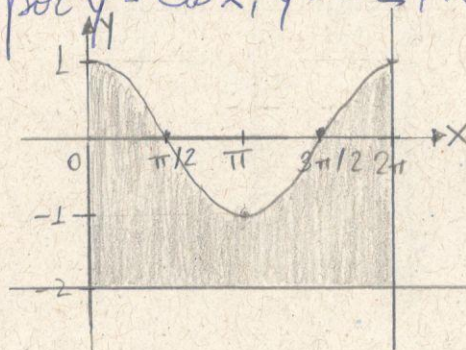
$$\Rightarrow V = \pi \left(\frac{2^5}{5} - \frac{(-2)^5}{5} \right) + 2\pi \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} \right) + \pi (2 - (-2)) \Rightarrow V = \frac{412\pi}{15} \text{ u.v.}$$

9- Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y=2$, da região limitada por $y=3+x^2$, $x=-2$, $x=2$ e $y=2$.



$$V = \pi \int_{-2}^2 [3 + x^2 - 2]^2 dx \Rightarrow V = \pi \int_{-2}^2 (x^2 + 1)^2 dx \Rightarrow V = \frac{412\pi}{15} \text{ u.v.}$$

10- Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = -2$, da região limitada por $y = \cos x$, $y = -2$, $x = 0$ e $x = 2\pi$.



$$V = \pi \int_0^{2\pi} (\cos x - (-2))^2 dx \Rightarrow V = \pi \int_0^{2\pi} (\cos x + 2)^2 dx \Rightarrow V = \pi \int_0^{2\pi} (\cos^2 x + 4\cos x + 4) dx$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx + 4\pi \int_0^{2\pi} \cos x dx + 4\pi \int_0^{2\pi} 1 dx \Rightarrow V = \pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx + 4\pi \int_0^{2\pi} 1 dx$$

$$+ 4\pi \int_0^{2\pi} \cos x dx + 4 \int_0^{2\pi} 1 dx \Rightarrow V = \frac{9\pi}{2} \int_0^{2\pi} 1 dx + \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2x dx + 4\pi \int_0^{2\pi} \cos x dx$$

$$\Rightarrow V = \frac{9\pi}{2} [x]_0^{2\pi} + \frac{\pi}{4} [\sin 2x]_0^{2\pi} + 4\pi [\sin x]_0^{2\pi} \Rightarrow V = 9\pi^2 \text{ u.v.}$$

Comprimento e Área

11- No exercício a seguir, encontra o comprimento do arco da curva da

(4)

$$a) x = \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{6y} - 1, 1 \leq y \leq 3;$$

$$g(y) = \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{6y} - 1, g'(y) = \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{6y^2}$$

$$S = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{3y^2 - \frac{1}{6y^2}}{1}\right)^2} dy \Rightarrow S = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{9y^4 - 1}{6y^2}\right)^2} dy \Rightarrow S = \int_1^3 \sqrt{\frac{1 + (9y^4 - 1)^2}{36y^4}} dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int_1^3 \sqrt{\frac{36y^4 + 81y^8 - 18y^4 + 1}{36y^4}} dy \Rightarrow S = \int_1^3 \sqrt{\frac{18y^4 + 81y^8 + 1}{36y^4}} dy \Rightarrow S = \int_1^3 \sqrt{\frac{(9y^4 + 1)^2}{36y^4}} dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int_1^3 \left(\frac{9y^4 + 1}{6y^2}\right) dy \Rightarrow S = \int_1^3 \left(\frac{9y^4}{6y^2} + \frac{1}{6y^2}\right) dy \Rightarrow S = \int_1^3 \left(\frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{6y^2}\right) dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int_1^3 \frac{3}{2}y^2 dy + \int_1^3 \frac{1}{6y^2} dy \Rightarrow S = \frac{118}{9} \text{ u.c.}$$

$$b) y = 5x - 2, -2 \leq x \leq 2;$$

$$f(x) = 5x - 2, f'(x) = 5$$

$$S = \int_{-2}^2 \sqrt{1 + 5^2} dx \Rightarrow S = \int_{-2}^2 \sqrt{26} dx \Rightarrow S = \sqrt{26} [x]_{-2}^2 \Rightarrow S = 4\sqrt{26} \text{ u.c.}$$

$$c) y = x^{2/3} - 1, 1 \leq x \leq 2;$$

$$f(x) = x^{2/3} - 1, f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$S = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{2x^{-1/3}}{3}\right)^2} dx \Rightarrow S = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{4x^{-2/3}}{9}} dx \Rightarrow S = \int_1^2 \sqrt{\frac{9 + 4x^{-2/3}}{9}} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{3} \int_1^2 \sqrt{\frac{9 + 4}{x^{2/3}}} dx \Rightarrow S = \frac{1}{3} \int_1^2 \sqrt{\frac{9x^{2/3} + 4}{x^{2/3}}} dx \Rightarrow S = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{(x^{2/3})^{1/2}} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{\sqrt{9 + 4x^{2/3}}}{x^{1/3}} dx$$

Pelo método de integração por substituição de variáveis, temos que:

$$\text{Fazendo } u = 9x^{2/3} + 4; \quad du = 9 \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3} dx \Rightarrow du = \frac{6}{x^{1/3}} dx \Rightarrow dx = \frac{x^{1/3}}{6} du$$

$$S = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{x^{1/3}} dx \Rightarrow S = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{\sqrt{u}}{x^{1/3}} \cdot \frac{x^{1/3}}{6} du \Rightarrow S = \frac{1}{18} \int_1^2 u^{1/2} du$$

$$x \rightarrow 1; u \rightarrow 13$$

$$x \rightarrow 2; u \rightarrow 9 \cdot 2^{2/3} + 4$$

$$S = \frac{1}{18} \int_{13}^{9 \cdot 2^{2/3} + 4} u^{1/2} du \Rightarrow S = \frac{1}{18} \left[\frac{2}{3} \sqrt{u^3} \right]_{13}^{9 \cdot 2^{2/3} + 4} \Rightarrow S = \frac{1}{27} (\sqrt{9 \cdot 2^{2/3} + 4} - \sqrt{13})$$

u.c

2) $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$

$$f(x) = \ln x; \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$S = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx \Rightarrow S = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2}} dx \Rightarrow S = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} dx \Rightarrow S = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx$$

Pelo método de integração por substituição de variáveis, vem:

$$\text{Fazendo } u^2 = x^2 + 1, \quad x = \sqrt{u^2 - 1}, \quad dx = \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} du$$

$x \rightarrow \sqrt{3}; u \rightarrow 2$
 $x \rightarrow \sqrt{8}; u \rightarrow 3$

$$S = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx \Rightarrow S = \int_2^3 \frac{\sqrt{u^2}}{x} \cdot \frac{1 \cdot u du}{\sqrt{u^2 - 1}} \Rightarrow S = \int_2^3 \frac{\sqrt{u^2}}{(\sqrt{u^2 - 1})^2} dx \Rightarrow S = \int_2^3 \frac{u^2}{u^2 - 1} du$$

$$\Rightarrow S = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{u^2 - 1} \right) du \Rightarrow S = \int_2^3 1 du + \int_2^3 \frac{1}{u^2 - 1} du$$

Pelo método de frações parciais, temos:

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{1}{(u+1)(u-1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1}$$

$A = 1/2$
 $B = -1/2$

$$S = \int_2^3 1 \, du + \int_2^3 \left(\frac{1/2}{u+1} - \frac{1/2}{u-1} \right) du \Rightarrow S = \int_2^3 1 \, du + \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{u+1} du - \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{u-1} du$$

$$\Rightarrow S = 1 + \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 3) - \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = 1 + \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 3 - \ln 2) \quad (5)$$

$-\ln 2) u.c.$

f) $y = 4\sqrt{x^3} + 2$, de $P_0 = (0, 2)$ até $P_1 = (1, 6)$;

$$f(x) = 4\sqrt{x^3} + 2; \quad f'(x) = 6\sqrt{x}$$

$$S = \int_0^1 \sqrt{1 + (6\sqrt{x})^2} \, dx \Rightarrow S = \int_0^1 \sqrt{1 + 36x} \, dx$$

Pelo método de integração por substituição de variáveis, temos

Fazendo $u = 1 + 36x$, $du = 36 \, dx \Rightarrow dx = \frac{du}{36}$

$x \rightarrow 0, u \rightarrow 1$
 $x \rightarrow 1, u \rightarrow 37$

$$S = \int_1^{37} \sqrt{u} \frac{du}{36} \Rightarrow S = \frac{1}{36} \int_1^{37} u^{1/2} \, du \Rightarrow S = \frac{1}{36} \left[\frac{2}{3} \sqrt{u^3} \right]_1^{37} \Rightarrow S =$$

$$= \frac{1}{54} (\sqrt{37^3} - \sqrt{1^3}) = \frac{1}{54} (37\sqrt{37} - 1) u.c.$$

12- Nos exercícios a seguir, calcule a área da superfície gerada pela rotação do arco da curva dada em torno do eixo indicado:

a) $y = 2x^3, 0 \leq x \leq 2$, eixo dos x ;

$$f(x) = 2x^3; \quad f'(x) = 6x^2$$

$$A = 2\pi \int_0^2 2x^3 \sqrt{1 + (6x^2)^2} \, dx \Rightarrow A = 2\pi \int_0^2 2x^3 \sqrt{1 + 36x^4} \, dx$$

Pelo método de integração por substituição de variáveis, vem

Fazendo $u = 1 + 36x^4$, $du = 144x^3 \, dx \Rightarrow dx = \frac{du}{144x^3}$

$x \rightarrow 0, u \rightarrow 1$
 $x \rightarrow 2, u \rightarrow 577$

$$A = 2\pi \int_1^{577} 2x^3 u^{1/2} \frac{du}{144x^3} \Rightarrow A = \frac{4\pi}{144} \int_1^{577} u^{1/2} du \Rightarrow A = \frac{\pi}{36} \left[\frac{2}{3} \sqrt{u^3} \right]_1^{577} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{\pi}{54} (\sqrt{577^3} - \sqrt{1^3}) \Rightarrow A = \frac{\pi}{54} (577\sqrt{577} - 1) \text{ u.a.}$$

b) $x = \sqrt{y}$, $1 \leq y \leq 4$; eixo dos y ;

$$g(y) = \sqrt{y}, g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$A = 2\pi \int_1^4 \sqrt{y} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{1}{4y}}{4y}} dy \Rightarrow A = 2\pi \int_1^4 \sqrt{y + \frac{1}{4}} dy$$

Usando o método de integração por substituição de variáveis, temos:

$$\text{Fazendo } u = y + \frac{1}{4}, du = dy.$$

$$y \rightarrow 1, u \rightarrow 5/4$$

$$y \rightarrow 4, u \rightarrow 17/4$$

$$A = 2\pi \int_{5/4}^{17/4} \sqrt{u} du \Rightarrow A = 2\pi \int_{5/4}^{17/4} u^{1/2} du \Rightarrow A = 2\pi \left[\frac{2}{3} \sqrt{u^3} \right]_{5/4}^{17/4} \Rightarrow A = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}) \text{ u.a.}$$

c) $y = x^2$, $-2 \leq x \leq 2$; eixo dos x

Para resolver este caso, utiliza-se o método de integração por substituição trigonométrica

d) $y = \sqrt{4-x^2}$, $0 \leq x \leq 2$; eixo dos x .

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}, f'(x) = -2x \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$A = 2\pi \int_0^2 \sqrt{4-x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \right)^2} dx \Rightarrow A = 2\pi \int_0^2 \sqrt{4-x^2 + \frac{(4-x^2)x^2}{4-x^2}} dx \Rightarrow A =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \sqrt{4-x^2+x^2} dx \Rightarrow A = 2\pi \int_0^2 \sqrt{4} dx \Rightarrow A = 2\pi \cdot 2 \int_0^2 1 dx \Rightarrow A = 4\pi [x]_0^2 \Rightarrow A = 4\pi \text{ u.a.}$$

13- Calcular a área da superfície obtida pela rotação do arco da parábola $y^2 = 8x$, $1 \leq x \leq 12$, ao redor do eixo dos x .