2.7 Exercícios

1. Uma curva tem por equação $y = f(x)$.
(a) Escreva uma expressão para a inclinação da reta secante pelos pontos $P(3, f(3))$ e $Q(x, f(x))$.
(b) Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente em P.

2. Faça o gráfico da curva $y = e^x$ nas janelas $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0{,}5; 0{,}5]$ por $[0{,}5; 1{,}5]$, e $[-0{,}1; 0{,}1]$ por $[0{,}9; 1{,}1]$. Dando um *zoom* no ponto $(0, 1)$, o que você percebe na curva?

3. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à parábola $y = 4x - x^2$ no ponto $(1, 3)$
(i) usando a Definição 1. (ii) usando a Equação 2.
(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).
(c) Faça os gráficos da parábola e da reta tangente. Como verificação, dê um *zoom* em direção ao ponto $(1, 3)$ até que a parábola e a reta tangente fiquem indistinguíveis.

4. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x - x^3$ no ponto $(1, 0)$
(i) usando a Definição 1. (ii) usando a Equação 2.
(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).
(c) Faça um gráfico da curva e da reta tangente em janelas retangulares cada vez menores centrados no ponto $(1, 0)$ até que a curva e a tangente pareçam indistinguíveis.

5–8 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

5. $y = 4x - 3x^2$, $(2, -4)$

6. $y = x^3 - 3x + 1$, $(2, 3)$

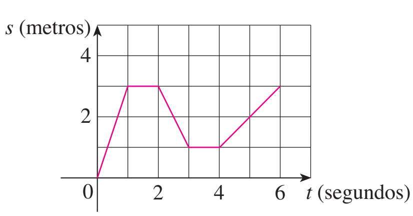
7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$

8. $y = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$, $(1, 1)$

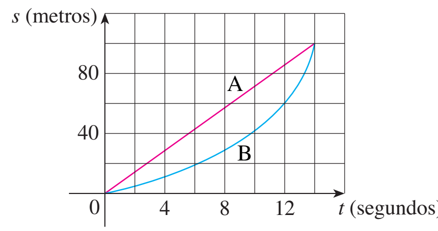
9. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ no ponto onde $x = a$.
(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, 5)$ e $(2, 3)$.
(c) Faça o gráfico da curva e de ambas as tangentes em uma mesma tela.

10. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 1/\sqrt{x}$ no ponto onde $x = a$.
(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, 1)$ e $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
(c) Faça o gráfico da curva e de ambas as tangentes em uma mesma tela.

11. (a) Uma partícula começa se movendo para a direita ao longo de uma reta horizontal; o gráfico de sua função posição está mostrado. Quando a partícula está se movendo para a direita? E para a esquerda? Quando está parada?
(b) Trace um gráfico da função velocidade.



12. São dados os gráficos das funções das posições de dois corredores, A e B, que correm 100 metros rasos e terminam empatados.



(a) Descreva e compare como os corredores correram a prova.
(b) Em que instante a distância entre os corredores é maior?
(c) Em que instante eles têm a mesma velocidade?

13. Se uma bola for atirada ao ar com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $y = 10t - 4{,}9t^2$. Encontre a velocidade quando $t = 2$.

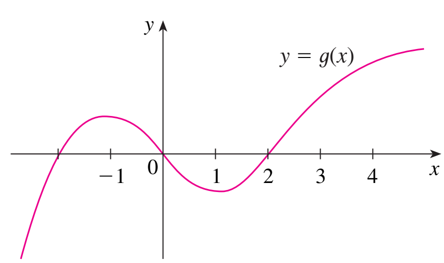
14. Se uma pedra for lançada para cima no planeta Marte com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) após t segundos é dada por $H = 10t - 1{,}86t^2$.
(a) Encontre a velocidade da pedra após um segundo.
(b) Encontre a velocidade da pedra quando $t = a$.
(c) Quando a pedra atinge a superfície?
(d) Com que velocidade a pedra atinge a superfície?

15. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação do movimento $s = 1/t^2$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula nos instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$.

16. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação $s = t^2 - 8t + 18$, onde t é medido em segundos.
(a) Encontre as velocidades médias sobre os seguintes intervalos de tempo:
(i) $[3, 4]$ (ii) $[3{,}5; 4]$
(iii) $[4, 5]$ (iv) $[4; 4{,}5]$
(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 4$.
(c) Faça o gráfico de s como uma função de t e desenhe as retas secantes cujas inclinações são as velocidades médias da parte (a), e a reta tangente cuja inclinação é a velocidade instantânea da parte (b).

17. Para a função g cujo gráfico é dado, arrume os seguintes números em ordem crescente e explique seu raciocínio:

$$0, \quad g'(-2), \quad g'(0), \quad g'(2), \quad g'(4).$$



18. Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = g(x)$ em $x = 5$ se $g(5) = -3$ e $g'(5) = 4$.

19. Se uma equação de uma reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto onde $a = 2$ é $y = 4x - 5$, encontre $f(2)$ e $f'(2)$.

20. Se a reta tangente a $y = f(x)$ em $(4, 3)$ passar pelo ponto $(0, 2)$, encontre $f(4)$ e $f'(4)$.

21. Esboce o gráfico de uma função f para a qual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ e $f'(2) = -1$.

22. Esboce o gráfico de uma função g para a qual $g(0) = g(2) = g(4) = 0$, $g'(1) = g'(3) = 0$, $g'(0) = g'(4) = 1$, $g'(2) = -1$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

23. Se $f(x) = 3x^2 - x^3$, encontre $f'(1)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 3x^2 - x^3$ no ponto $(1, 2)$.

24. Se $g(x) = x^4 - 2$, encontre $g'(1)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = x^4 - 2$ no ponto $(1, -1)$.

25. (a) Se $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encontre $F'(2)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 5x/(1 + x^2)$ no ponto $(2, 2)$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e a reta tangente na mesma tela.

26. (a) Se $G(x) = 4x^2 - x^3$, encontre $G'(a)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 4x^2 - x^3$ nos pontos $(2, 8)$ e $(3, 9)$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e as retas tangentes na mesma tela.

27–32 Encontre $f'(a)$.

27. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

28. $f(t) = 2t^3 + t$

29. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

30. $f(x) = x^{-2}$

31. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

32. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1 - x}}$

33–38 Cada limite representa a derivada de certa função f em certo número a. Diga o que são f e a em cada caso.

33. $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{(1 + h)^{10} - 1}{h}$

34. $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

35. $\displaystyle\lim_{x\to5} \frac{2^x - 32}{x - 5}$

36. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \pi/4}$

37. $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

38. $\displaystyle\lim_{t\to1} \frac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

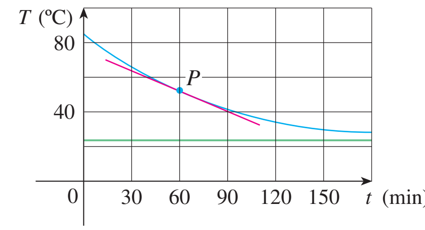
39–40 Uma partícula se move ao longo de uma reta com equação de movimento $s = f(t)$, onde s é medido em metros e t em segundos. Encontre a velocidade e a velocidade escalar quando $t = 5$.

39. $f(t) = 100 + 50t - 4{,}9t^2$

40. $f(t) = t^{-1} - t$

41. Uma lata de refrigerante morna é colocada na geladeira. Esboce o gráfico da temperatura do refrigerante como uma função do tempo. A taxa de variação inicial da temperatura é maior ou menor que a taxa de variação após 1 hora?

42. Um peru assado é tirado de um forno quando a sua temperatura atinge 85 ºC e colocado sobre uma mesa, em uma sala na qual a temperatura é 24 °C. O gráfico mostra como a temperatura do peru diminui e finalmente chega à temperatura ambiente. Por meio da medida da inclinação da reta tangente, estime a taxa de variação da temperatura após 1 hora.



43. A tabela mostra o número de passageiros P que chegaram à Irlanda por avião, em milhões.

Ano	2001	2003	2005	2007	2009
P	8,49	9,65	11,78	14,54	12,84

(a) Determine a taxa média de crescimento de P
(i) de 2001 a 2005 (ii) de 2003 a 2005
(iii) de 2005 a 2007
Em cada caso, inclua as unidades.

(b) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2005, tomando a média de duas taxas médias de variação. Quais são suas unidades?

44. O número N de franquias de uma certa cadeia popular de cafeteiras é mostrada na tabela. (São dados os números de franquias no dia 01 de outubro.)

Ano	2004	2005	2006	2007	2008
N	8.569	10.241	12.440	15.011	16.680

(a) Determine a taxa média de crescimento
(i) de 2006 a 2008 (ii) de 2006 a 2007
(iii) de 2005 a 2006
Em cada caso, inclua as unidades.

(b) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2006 tomando a média de duas taxas médias de variação. Quais são suas unidades?

(c) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2006 medindo a inclinação de uma tangente.

(d) Estime a taxa instantânea de crescimento em 2007 e compare-a com a taxa de crescimento em 2006. O que você pode concluir?

45. O custo (em dólares) de produzir x unidades de uma certa mercadoria é $C(x) = 5.000 + 10x + 0{,}05x^2$.

(a) Encontre a taxa média da variação de C em relação a x quando os níveis de produção estiverem variando
(i) de $x = 100$ a $x = 105$
(ii) de $x = 100$ a $x = 101$

(b) Encontre a taxa instantânea da variação de C em relação a x quando $x = 100$. (Isso é chamado *custo marginal*. Seu significado será explicado na Seção 3.7.)

46. Se um tanque cilíndrico comporta 100.000 litros de água, que podem escoar pela base do tanque em uma hora, então a Lei de Torricelli fornece o volume V de água que restou no tanque após t minutos como

$$V(t) = 100\,000\left(1 - \tfrac{1}{60}t\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 60$$

Encontre a taxa pela qual a água está escoando para fora do tanque (a taxa instantânea da variação de V em relação a t) como uma função de t. Quais são suas unidades? Para os instantes $t = 0$, 10, 20, 30, 40, 50 e 60 minutos, encontre a taxa do escoamento e a quantidade de água restante no tanque. Resuma o que você achou em uma ou duas sentenças. Em que instante a taxa do escoamento é a máxima? E a mínima?

47. O custo da produção de x quilogramas de ouro provenientes de uma nova mina é $C = f(x)$ dólares.
(a) Qual o significado da derivada $f'(x)$? Quais são suas unidades?
(b) O que significa a afirmativa $f'(50) = 36$?
(c) Você acha que os valores de $f'(x)$ irão crescer ou decrescer a curto prazo? E a longo prazo? Explique.

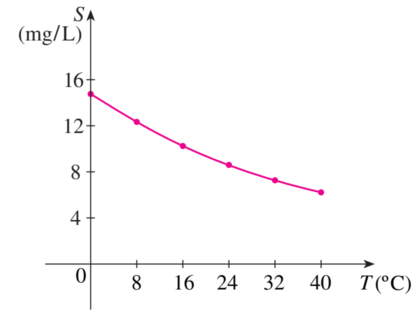
48. O número de bactérias depois de t horas em um laboratório experimental controlado é $n = f(t)$.
(a) Qual o significado da derivada $f'(5)$? Quais são suas unidades?
(b) Suponha que haja uma quantidade ilimitada de espaço e nutrientes para a bactéria. Qual será maior: $f'(5)$ ou $f'(10)$? Se a oferta de nutrientes for limitada, isso afetaria sua conclusão? Explique.

49. Seja $T(t)$ a temperatura (em °C) em Manila, horas após o meio-dia, em 19 de julho de 2011. A tabela mostra os valores dessa função registrados de duas em duas horas. Qual o significado de $T'(5)$? Estime o seu valor.

t	1	3	5	7	9	11
T	32	32	31	27	26	25

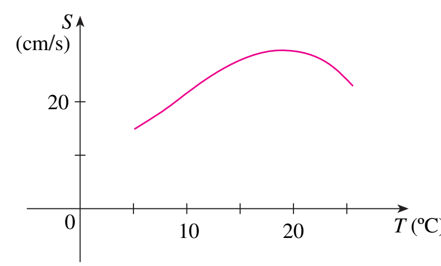
50. A quantidade (em quilogramas) de café vendida por uma companhia para uma lanchonete ao preço de p dólares por quilogramas é dada por $Q = f(p)$.
(a) Qual o significado da derivada $f'(8)$? Quais são suas unidades?
(b) $f'(8)$ é positivo ou negativo? Explique.

51. A quantidade de oxigênio que pode ser dissolvido em água depende da temperatura da água. (Logo, a poluição térmica influencia o nível de oxigênio da água.) O gráfico mostra como a solubilidades do oxigênio varia em função da temperatura T da água.
(a) Qual o significado da derivada $S'(T)$? Quais são suas unidades?
(b) Dê uma estimativa do valor $S'(16)$ e interprete-o.



Adaptado de Kupchella & Hyland, *Environmental Science: Living Within the System of Nature*, 2ª ed.; © 1989. Impresso e reproduzido eletronicamente com permissão da Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ.

52. O gráfico mostra a influência da temperatura T sobre a velocidade máxima s de nado de salmões Coho.
(a) Qual o significado da derivada $S'(T)$? Quais são suas unidades?
(b) Dê uma estimativa dos valores de $S'(15)$ e $S'(25)$ e interprete-os.



53–54 Determine se existe ou não $f'(0)$.

53. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

54. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

PROJETO ESCRITO MÉTODOS INICIAIS PARA ENCONTRAR TANGENTES

A primeira pessoa a formular explicitamente as ideias de limite e derivada foi Sir Isaac Newton, em 1660. Mas Newton reconhecia que "Se vejo mais longe do que outros homens, é porque estou sobre os ombros de gigantes". Dois desses gigantes eram Pierre Fermat (1601-1665) e o mentor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton estava familiarizado com os métodos deles para encontrar as retas tangentes, e esses métodos desempenharam papel importante na formulação final do cálculo de Newton.

As seguintes referências contêm explicações desses métodos. Leia uma ou mais referências e escreva um relatório comparando os métodos ou de Fermat ou de Barrow com os métodos modernos. Em particular, use o método da Seção 2.7 para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 + 2x$ no ponto $(1, 3)$ e mostre como Fermat ou Barrow teriam resolvido o mesmo problema. Embora você tenha usado as derivadas e eles não, mostre a analogia entre os métodos.

1. Boyer C.; Merzbach U. *A History of Mathematics*. Nova York: Wiley, 1989, p. 389, 432.
2. Edwards C. H. *The Historical Development of the Calculus*. Nova York: Springer-Verlag, 1979, p. 124, 132.
3. Eves H. *An Introduction to the History of Mathematics*, 6. ed. Nova York: Saunders, 1990, p. 391, 395.
4. Kline M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nova York: Oxford University Press, 1972, p. 344, 346.

para todos os valores de x. Assim, f''' é uma função constante e seu gráfico é uma reta horizontal. Portanto, para todos os valores de x,

$$f^{(4)}(x) = 0$$

Podemos interpretar fisicamente a terceira derivada no caso em que a função é a função posição $s = s(t)$ de um objeto que se move ao longo de uma reta. Como $s''' = (s'')' = a'$, a terceira derivada da função posição é a derivada da função aceleração e é chamada ***jerk***:

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

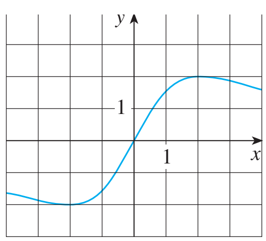
Assim, o *jerk* j é a taxa de variação da aceleração. O nome é adequado (*jerk*, em português, significa solavanco, sacudida), pois um *jerk* grande significa uma variação súbita na aceleração, o que causa um movimento abrupto em um veículo.

Vimos que uma aplicação da segunda e terceira derivadas ocorre na análise do movimento de objetos usando aceleração e *jerk*. Investigaremos mais uma aplicação da segunda derivada na Seção 4.3, quando mostraremos como o conhecimento de f'' nos dá informação sobre a forma do gráfico de f. No Capítulo 11, no Volume II, veremos como a segunda derivada e as derivadas de ordem mais alta nos permitem representar funções como somas de séries infinitas.

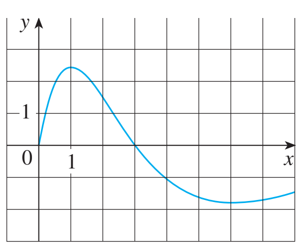
2.8 Exercícios

1–2 Use os gráficos dados para estimar o valor de cada derivada. Esboce então o gráfico de f'.

1. (a) $f'(-3)$
(b) $f'(-2)$
(c) $f'(-1)$
(d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$
(f) $f'(2)$
(g) $f'(3)$

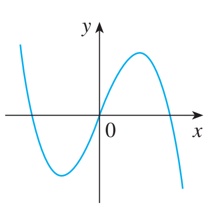


2. (a) $f'(0)$
(b) $f'(1)$
(c) $f'(2)$
(d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$
(f) $f'(5)$
(g) $f'(6)$
(h) $f'(7)$

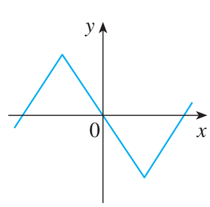


3. Associe o gráfico de cada função em (a)-(d) com o gráfico de sua derivada em I–IV. Dê razões para suas escolhas.

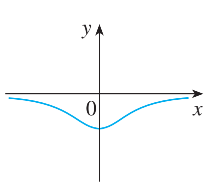
(a)



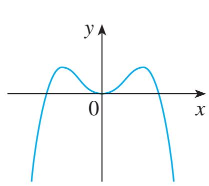
(b)



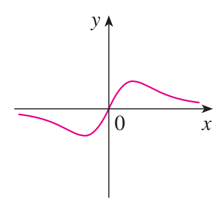
(c)



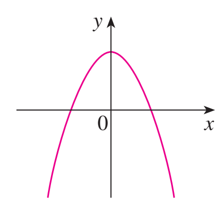
(d)



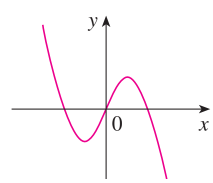
I



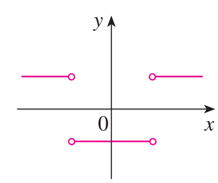
II



III

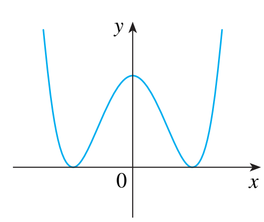


IV

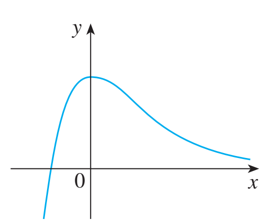


4–11 Trace ou copie o gráfico da função f dada. (Assuma que os eixos possuem escalas iguais.) Use, então, o método do Exemplo 1 para esboçar o gráfico de f' abaixo.

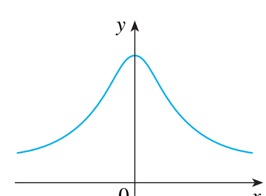
4.



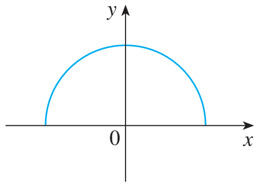
5.



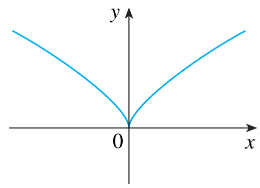
6.



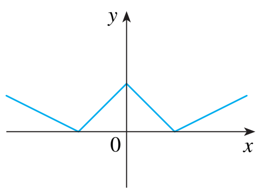
7.



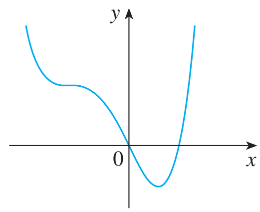
8.



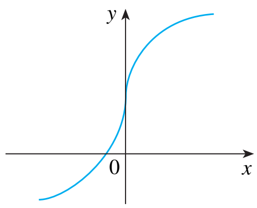
9.



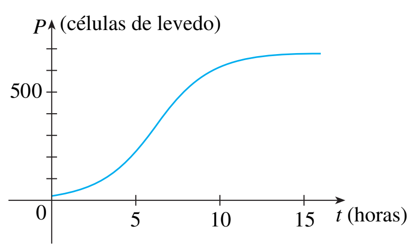
10.



11.



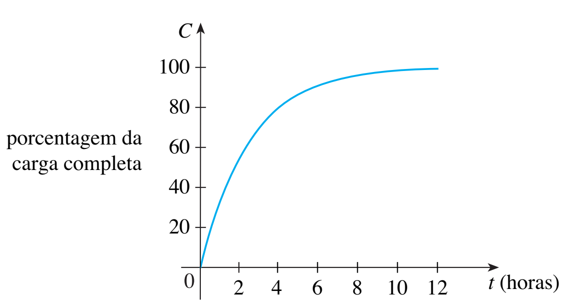
12. O gráfico mostrado corresponde ao da função população $P(t)$ de cultura em laboratório de células de levedo. Use o método do Exemplo 1 para obter o gráfico da derivada $P'(t)$. O que o gráfico de P' nos diz sobre a população de levedo?



13. Uma pilha recarregável é colocada no carregador. O gráfico mostra $C(t)$, a porcentagem de capacidade total que a pilha alcança conforme a função de tempo t passa (em horas).

(a) Qual o significado da derivada $C'(t)$?

(b) Esboce o gráfico de $C'(t)$. O que o gráfico diz?

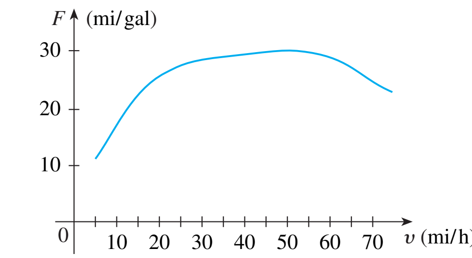


14. O gráfico (do Departamento de Energia dos EUA) mostra como a velocidade do carro afeta o rendimento do combustível. O rendimento do combustível F é medido em milhas por galão e a velocidade v é medida em milhas por hora.

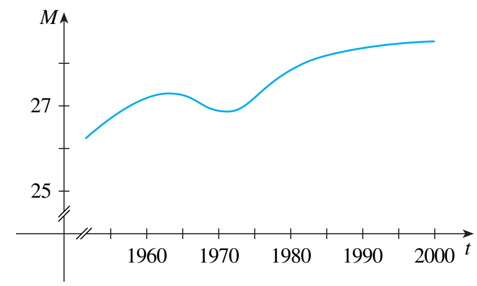
(a) Qual o significado da derivada $F'(v)$?

(b) Esboce o gráfico de $F'(v)$.

(c) Em qual velocidade você deve dirigir se quer economizar combustível?



15. O gráfico mostra como a idade média dos homens japoneses quando se casam pela primeira vez variou na última metade do século XX. Esboce o gráfico da função derivada $M'(t)$. Em quais os anos a derivada foi negativa?



16–18 Faça um esboço cuidadoso de f e abaixo dele esboce o gráfico de f', como foi feito nos Exercícios 4–11. Você pode sugeir uma fórmula para $f'(x)$ a partir de seu gráfico?

16. $f(x) = \operatorname{sen} x$

17. $f(x) = e^x$

18. $f(x) = \ln x$

19. Seja $f(x) = x^2$.

(a) Estime os valores de $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1)$ e $f'(2)$ fazendo uso de uma ferramenta gráfica para dar *zoom* no gráfico de f.

(b) Use a simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2}), f'(-1)$ e $f'(-2)$.

(c) Utilize os resultados de (a) e (b) para conjecturar uma fórmula para $f'(x)$.

(d) Use a definição de derivada para demonstrar que sua conjectura em (c) está correta.

20. Seja $f(x) = x^3$.

(a) Estime os valores de $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1), f'(2)$ e $f'(3)$ fazendo uso de uma ferramenta gráfica para dar *zoom* no gráfico de f.

(b) Use simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2}), f'(-1), f'(-2)$ e $f'(-3)$.

(c) Empregue os valores de (a) e (b) para fazer o gráfico de f'.

(d) Conjecture uma fórmula para $f'(x)$.

(e) Use a definição de derivada para demonstrar que sua conjectura em (d) está correta.

21–31 Encontre a derivada da função dada usando a definição. Diga quais são os domínios da função e da derivada.

21. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

22. $f(x) = mx + b$

23. $f(t) = 5t - 9t^2$

24. $f(x) = 1{,}5x^2 - x + 3{,}7$

25. $f(x) = x^3 - 3x + 5$

26. $f(x) = x + \sqrt{x}$

27. $g(x) = \sqrt{9 - x}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

29. $G(t) = \dfrac{1 - 2t}{3 + t}$

30. $f(x) = x^{3/2}$

31. $f(x) = x^4$

---

32. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ começando pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$ e usando as transformações da Seção 1.3.
(b) Use o gráfico da parte (a) para esboçar o gráfico de f'.
(c) Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$. Quais os domínios de f e f'?
(d) Use uma ferramenta gráfica para fazer o gráfico de f' e compare-o com o esboço da parte (b).

33. (a) Se $f(x) = x^4 + 2x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável, comparando os gráficos de f e f'.

34. (a) Se $f(x) = x + 1/x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável, comparando os gráficos de f e f'.

35. A taxa de desemprego $U(t)$ varia com o tempo. A tabela fornece a porcentagem de desempregados na força de trabalho australiana em meados de 1995 a 2004.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1995	8,1	2000	6,2
1996	8,0	2001	6,9
1997	8,2	2002	6,5
1998	7,9	2003	6,2
1999	6,7	2004	5,6

(a) Qual o significado de $U'(t)$? Quais são suas unidades?
(b) Construa uma tabela de valores para $U'(t)$.

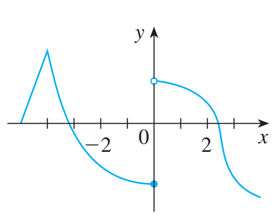
36. Seja $P(t)$ a porcentagem da população das Filipinas com idade maior que 60 anos no instante t. A tabela fornece projeções dos valores desta função de 1995 a 2020.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1995	5,2	2010	6,7
2000	5,5	2015	7,7
2005	6,1	2020	8,9

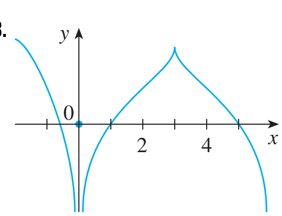
(a) Qual o significado de $P'(t)$? Quais são suas unidades?
(b) Construa uma tabela de valores para $P'(t)$.
(c) Faça os gráficos de P e P'.

37–40 O gráfico de f é dado. Indique os números nos quais f não é diferenciável.

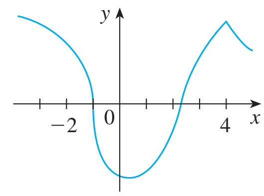
37.



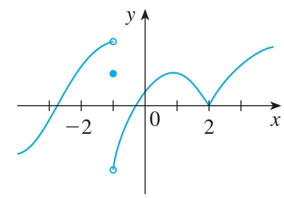
38.



39.



40.

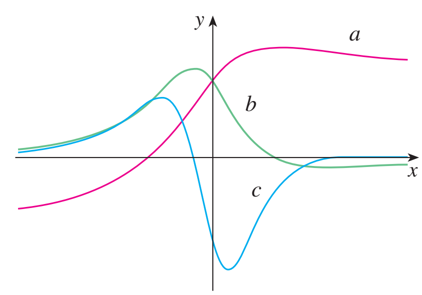


---

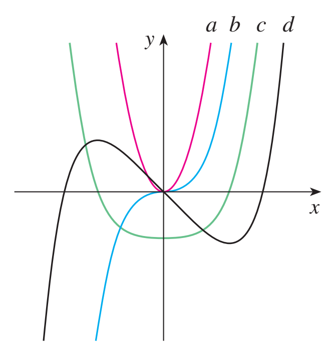
41. Faça o gráfico da função $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Dê *zoom* primeiro em direção ao ponto $(-1, 0)$ e, então, em direção à origem. Qual a diferença entre os comportamentos de f próximo a esses dois pontos? O que você conclui sobre a diferenciabilidade de f?

42. Dê *zoom* em direção aos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(-1, 0)$ sobre o gráfico da função $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. O que você observa? Explique o que você viu em termos da diferenciabilidade de g.

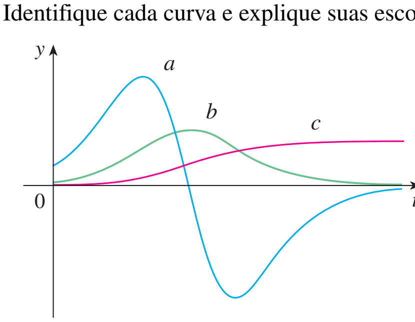
43. A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



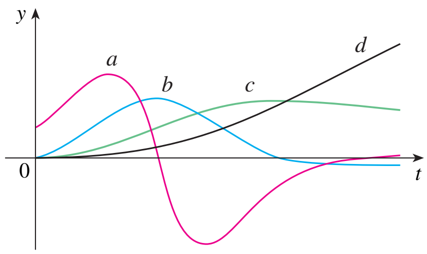
44. A figura mostra os gráficos de f, f', f'' e f'''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



45. A figura mostra os gráficos de três funções. Uma é a função da posição de um carro, outra é a velocidade do carro e outra é sua aceleração. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



46. A figura mostra os gráficos de quatro funções. Uma é a função da posição de um carro, outra é a velocidade do carro, outra é sua aceleração e outra é seu *jerk*. Identifique cada curva e explique suas escolhas.

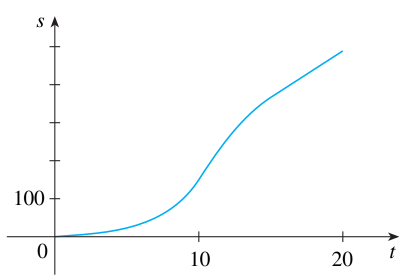


47–48 Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$ e $f''(x)$. A seguir, trace f, f' e f'' em uma mesma tela e verifique se suas respostas são razoáveis.

47. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ **48.** $f(x) = x^3 - 3x$

49. Se $f(x) = 2x^2 - x^3$, encontre $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ e $f^{(4)}(x)$. Trace f, f', f'' e f''' em uma única tela. Os gráficos são consistentes com as interpretações geométricas destas derivadas?

50. (a) É mostrado o gráfico da função posição de um veículo, onde s é medido em metros e t, em segundos. Use-o para traçar a velocidade e a aceleração do veículo. Qual é a aceleração em $t = 10$ segundos?



(b) Use a curva da aceleração da parte (a) para estimar o *jerk* em $t = 10$ segundos. Qual a unidade do *jerk*?

51. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
(a) Se $a \neq 0$, use a Equação 2.7.5 para encontrar $f'(a)$.
(b) Mostre que $f'(0)$ não existe.
(c) Mostre que $y = \sqrt[3]{x}$ tem uma reta tangente vertical em (0, 0). (Relembre o formato do gráfico de f. Veja a Figura 13 na Seção 1.2.)

52. (a) Se $g(x) = x^{2/3}$, mostre que $g'(0)$ não existe.
(b) Se $a \neq 0$, encontre $g'(a)$.
(c) Mostre que $y = x^{2/3}$ tem uma reta tangente vertical em (0, 0).
(d) Ilustre a parte (c) fazendo o gráfico de $y = x^{2/3}$.

53. Mostre que a função $f(x) = |x - 6|$ não é diferenciável em 6. Encontre uma fórmula para f' e esboce seu gráfico.

54. Onde a função maior inteiro $f(x) = [\![x]\!]$ não é diferenciável? Encontre uma fórmula para f' e esboce seu gráfico.

55. (a) Esboce o gráfico da função $f(x) = x|x|$.
(b) Para quais valores de x é f diferenciável?
(c) Encontre uma fórmula para f'.

56. As derivadas **à esquerda** e **à direita** de F em a são definidas por

$$f'_{-}(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

e

$$f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

se esses limites existirem. Então $f'(a)$ existe se, e somente se, essas derivadas unilaterais existirem e forem iguais.
(a) Encontre $f'_{-}(4)$ e $f'_{+}(4)$ para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 5 - x & \text{se } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(b) Esboce o gráfico de f.
(c) Onde f é descontínua?
(d) Onde f não é diferenciável?

57. Lembre-se de que uma função f é chamada *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, e *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$ para cada um destes x. Demonstre cada uma das afirmativas a seguir.
(a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.
(b) A derivada de uma função ímpar é uma função par.

58. Quando você abre uma torneira de água quente, a temperatura T da água depende de quanto tempo a água está fluindo.
(a) Esboce um gráfico possível de T como uma função do tempo t que decorreu desde que a torneira foi aberta.
(b) Descreva como é a taxa de variação de T em relação a t quando t está crescendo.
(c) Esboce um gráfico da derivada de T.

59. Seja ℓ a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto (1, 1). O *ângulo de inclinação* de ℓ é o ângulo ϕ que ℓ faz com a direção positiva do eixo x. Calcule ϕ com a precisão de um grau.

2 Revisão

Verificação de Conceitos

1. Explique o significado de cada um dos limites a seguir e ilustre com um esboço.
(a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$
(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
(e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2. Descreva as várias situações nas quais um limite pode não existir. Ilustre-as com figuras.

3. Enuncie cada uma das seguintes Propriedades dos Limites.
(a) Propriedade da Soma (b) Propriedade da Diferença
(c) Propriedade do Múltiplo (d) Propriedade do Produto Constante
(e) Propriedade do Quociente (f) Propriedade da Potência
(g) Propriedade da Raiz

4. O que afirma o Teorema do Confronto?

5. (a) O que significa dizer que uma reta $x = a$ é uma assíntota vertical da curva $y = f(x)$? Trace curvas que ilustrem cada uma das várias possibilidades.

(b) O que significa dizer que uma reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$? Trace curvas que ilustrem cada uma das várias possibilidades.

6. Quais das curvas a seguir têm assíntotas verticais? E horizontais?

(a) $y = x^4$ (b) $y = \operatorname{sen} x$
(c) $y = \operatorname{tg} x$ (d) $y = \operatorname{tg}^{-1} x$
(e) $y = e^x$ (f) $y = \ln x$
(g) $y = 1/x$ (h) $y = \sqrt{x}$

7. (a) Qual o significado de f ser contínua em a?
(b) Qual o significado de f ser contínua no intervalo $(-\infty, \infty)$? Nesse caso, o que se pode dizer sobre o gráfico de f?

8. O que afirma o Teorema do Valor Intermediário?

9. Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

10. Considere um objeto movendo-se ao longo de uma reta com a posição dada por $f(t)$ no momento t. Escreva uma expressão para a velocidade instantânea do objeto em $t = a$. Como pode ser interpretada essa velocidade em termos do gráfico de f?

11. Se $y = f(x)$ e x variar de x_1 a x_2, escreva uma expressão para o seguinte:
(a) Taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$.
(b) Taxa instantânea de variação de y em relação a x em $x = x_1$.

12. Defina a derivada $f'(a)$. Discuta as duas maneiras de interpretar esse número.

13. Defina a segunda derivada de f. Se $f(t)$ for a função de posição de uma partícula, como você pode interpretar a segunda derivada?

14. (a) O que significa f ser diferenciável em a?
(b) Qual a relação entre diferenciabilidade e continuidade de uma função?
(c) Esboce o gráfico de uma função que é contínua, mas não diferenciável em $a = 2$.

15. Descreva as várias situações nas quais uma função não é diferenciável. Ilustre-as com figuras.

Teste – Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. $\displaystyle \lim_{x\to 4}\left(\frac{2x}{x-4} - \frac{8}{x-4}\right) = \lim_{x\to 4}\frac{2x}{x-4} - \lim_{x\to 4}\frac{8}{x-4}$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6} = \frac{\lim_{x\to 1}(x^2+6x-7)}{\lim_{x\to 1}(x^2+5x-6)}$

3. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x^2+2x-4} = \frac{\lim_{x\to 1}(x-3)}{\lim_{x\to 1}(x^2+2x-4)}$

4. Se $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ não existe.

5. Se $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ não existe.

6. Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ não existem, então $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ não existe.

7. Se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe mas $\lim_{x\to a} g(x)$ não existe, então $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ não existe.

8. Se $\lim_{x\to 6}[f(x)g(x)]$ existe, então o limite deve ser $f(6)g(6)$.

9. Se p for um polinômio, então $\lim_{x\to b} p(x) = p(b)$.

10. Se $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = 0$.

11. Uma função pode ter duas assíntotas horizontais distintas.

12. Se f tem domínio $[0, \infty)$ e não possui assíntota horizontal, então $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

13. Se a reta $x = 1$ for uma assíntota vertical de $y = f(x)$, então f não está definida em 1.

14. Se $f(1) > 0$ e $f(3) < 0$, então existe um número c entre 1 e 3 tal que $f(c) = 0$.

15. Se f for contínua em 5 e $f(5) = 2$ e $f(4) = 3$, então $\lim_{x\to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.

16. Se f for contínua em $[-1, 1]$ e $f(-1) = 4$ e $f(1) = 3$, então existe um número r tal que $|r| < 1$ e $f(r) = \pi$.

17. Seja f uma função tal que $\lim_{x\to 0} f(x) = 6$. Então existe um número positivo δ tal que, se $0 < |x| < \delta$, então $|f(x) - 6| < 1$.

18. Se $f(x) > 1$ para todo x e $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, então $\lim_{x\to 0} f(x) > 1$.

19. Se f for contínua em a, então f é diferenciável em a.

20. Se $f'(r)$ existe, então $\lim_{x\to r} f(x) = f(r)$.

21. $\displaystyle \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

22. A equação $x^{10} - 10x^2 + 5 = 0$ tem uma raiz no intervalo $(0, 2)$.

23. Se f é contínua em a, então $|f|$ também o é.

24. Se $|f|$ é contínua em a, então f também o é.

Exercícios

1. É dado o gráfico de f.
(a) Encontre cada limite, ou explique por que ele não existe.

(i) $\displaystyle \lim_{x\to 2^+} f(x)$ (ii) $\displaystyle \lim_{x\to -3^+} f(x)$
(iii) $\displaystyle \lim_{x\to -3} f(x)$ (iv) $\displaystyle \lim_{x\to 4} f(x)$
(v) $\displaystyle \lim_{x\to 0} f(x)$ (vi) $\displaystyle \lim_{x\to 2^-} f(x)$
(vii) $\displaystyle \lim_{x\to \infty} f(x)$ (viii) $\displaystyle \lim_{x\to -\infty} f(x)$

(b) Dê as equações das assíntotas horizontais.
(c) Dê as equações das assíntotas verticais.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador