Capítulo 1

Notação e funções

1.1 Números reais

- **Números naturais** ($\mathbb{N}$): São todos os números inteiros positivos, incluindo o zero. Isto é: $\mathbb{N}$ = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,...}.

- **Números inteiros** ($\mathbb{Z}$): São todos os números que pertencem ao conjunto dos Naturais mais os seus respectivos opostos (negativos). Isto é: $\mathbb{Z}$ = {...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...}.

- **Números racionais** ($\mathbb{Q}$): São todos os números da forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b inteiros e $b \neq 0$. Isto é:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

  Os números naturais ($\mathbb{N}$) são um subconjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) que, por sua vez, são um subconjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$). Assim, todo número natural também é um número inteiro; e todo número inteiro também é um número racional.

- **Números irracionais**: São os números que não podem ser escritos por meio de uma fração de dois inteiros. Por exemplo, $\sqrt{2} = 1,4142...$ é um número decimal infinito não periódico. Outro exemplo é a constante $\pi = 3.1415...$.

- **Números reais** ($\mathbb{R}$): É formado pelo conjunto dos números racionais e irracionais. Em outras palavras, $\mathbb{R}$ é o conjunto de todos os números reais entre $-\infty$ e ∞ (reta real).

  $\mathbb{R}^n$ é um espaço com n dimensões. Exemplos: $\mathbb{R}^2$ é um plano de duas dimensões; $\mathbb{R}^3$ é um espaço tridimensional.

1.2 Intervalos

Sejam a e b dois números reais, com $a < b$. Um intervalo em $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem uma das seguintes formas:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}|a \leq x \leq b\}$, x é um número real maior ou igual a a e menor ou igual a b.
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}|a < x < b\}$, x é um número real maior do que a e menor do que b.
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}|a < x \leq b\}$, x é um número real maior do que a e menor ou igual a b.
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}|a \leq x < b\}$, x é um número real maior ou igual a a e menor do que b.
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}|x < a\}$, x é um número real menor do que a.
- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}|x \leq a\}$, x é um número real menor ou igual a a.
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}|x \geq a\}$, x é um número real maior ou igual a a.
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}|x > a\}$, x é um número real maior do que a.
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, x é um número real.

Exemplo 1. Resolva a inequação $5x + 3 < 2x + 7$.

$$\begin{aligned} 5x + 3 < 2x + 7 &\iff 5x < 2x + 4 \\ &\iff 3x < 4 \\ &\iff x < \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Assim, $\{x \in \mathbb{R}|x < \frac{4}{3}\}$ é o conjunto das soluções da inequação.

Exemplo 2. Expresse o conjunto $\{x \in \mathbb{R}|2x - 3 < x + 1\}$ em notação de intervalo.

$$2x - 3 < x + 1 \iff x < 4$$

Assim, $\{x \in \mathbb{R}|2x - 3 < x + 1\} =]-\infty, 4[$

1.3 Funções

Definição: Dados A e $B \subseteq \mathbb{R}$, uma função f de A em B é designada por $f : A \to B$ e é uma regra que associa a cada elemento de $x \in A$ um único elemento $y \in B$. Costumamos escrever $y = f(x)$ e dizemos que y é o valor de f em x.

O conjunto A chama-se *domínio* da função f; o conjuto B chama-se *contra-domínio* de f. A *imagem* da função f é o conjunto definido por $Im_f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in A \quad e \quad y = f(x)\}$.

Exemplo 1: Dada a função $f(x) = x^2$ e os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 26, 27\}$, temos:

x	$f(x)$
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

- **Domínio** de f é representado por todos os elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- **Contra-domínio** de f é representado por todos os elementos do conjunto $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 26, 27\}$.
- **Imagem** de f é representada pelos elementos do contra-domínio (B) que possuem correspondência com o domínio (A). Isto é: $Im_f = \{1, 4, 9, 16, 25\}$.

Quando o domínio da função não é explicitado convenciona-se o maior conjunto em que a regra é aplicável. Por exemplo, o domínio da função $g(x) = \sqrt{x}$ é $D_g = [0, +\infty[$.

Definição: Seja $f : A \to B$ uma função. O conjunto $G_f = \{(x, f(x))|x \in A\}$ ou $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A \quad e \quad y = f(x)\}$ denomina-se *gráfico* de f. Assim, o gráfico de f é um subconjunto de todos os pares ordenador(x,y) de números reais.

Exemplo 2: Seja $f(x) = x^3$. Tem-se:

a. $D_f = \mathbb{R}$.

b. O valor que f assume em x é $f(x) = x^3$. Esta função associa a cada real x o número real $f(x) = x^3$.

c. $f(-1) = (-1)^3 = -1$.

d. $G_f = \{(x, y)|y = x^3, x \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo 3: Considere a função g dada por $y = \frac{1}{x}$. Tem-se:

a. $D_g = \{x \in \mathbb{R}|x \neq 0\}$.

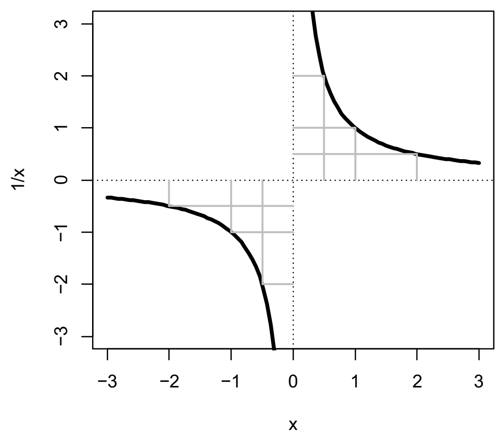
b. Esta função associa a cada $x \neq 0$ o real $g(x) = \frac{1}{x}$.

x	$g(x)$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

c. $g(x+h) = \frac{1}{x+h}$ $\forall x \neq -h$.

d. Gráfico de g

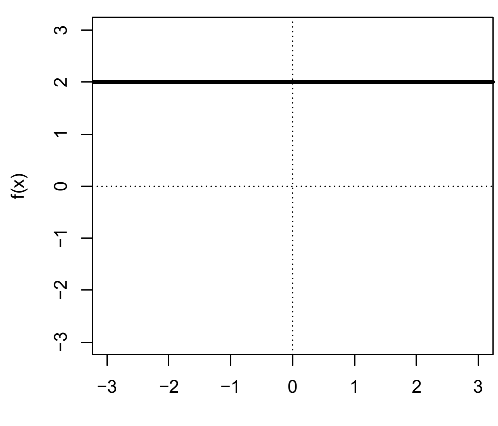
Olhando para $x > 0$: quando x aumenta, $y = \frac{1}{x}$ se aproxima de 0; quando x se aproxima de 0, $y = \frac{1}{x}$ se torna cada vez maior. Raciocínio semelhante segue para $x < 0$.



1.4 Alguns tipos de funções

- **Função constante**: Uma função $y = f(x)$, $x \in A$, dada por $f(x) = k$, k constante, denomina-se função constante.

  Exemplo 1: $f(x) = 2$.



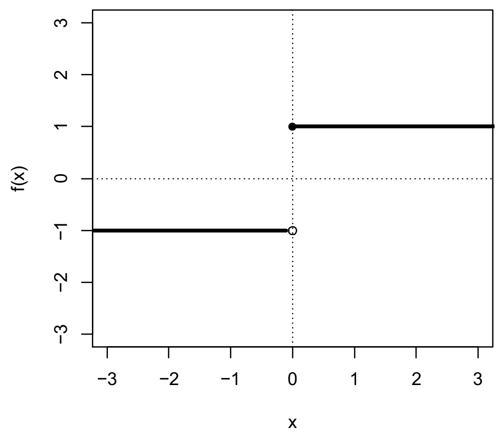
a. $D_f = \mathbb{R}$.

b. $G_f = \{(x, f(x))|x \in \mathbb{R}\} = \{(x, 2)|x \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo 2: $f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \geq 0 \\ -1, & se \quad x < 0 \end{cases}$

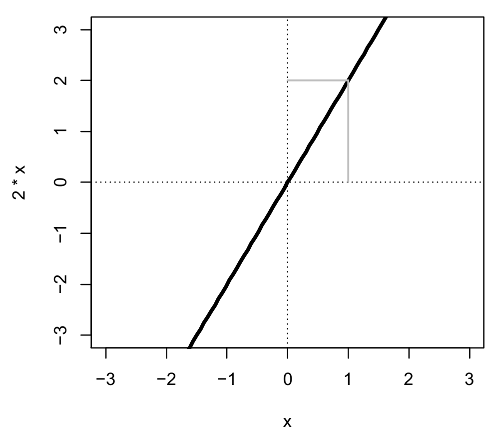
a. $D_f = \mathbb{R}$.

b. Gráfico de f



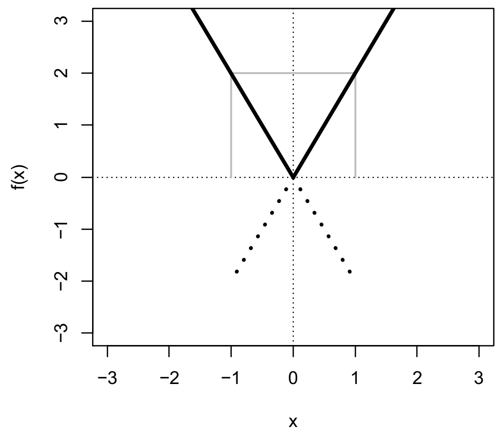
- **Função linear**: Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax$, a constante, denomina-se função linear. Seu gráfico é a reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, a)$.

  Exemplo 3: $f(x) = 2x$.



Exemplo 4: $f(x) = |2x|$.

Eliminando o módulo temos: $f(x) = \begin{cases} 2x, & se \quad x \geq 0 \\ -2x, & se \quad x < 0 \end{cases}$

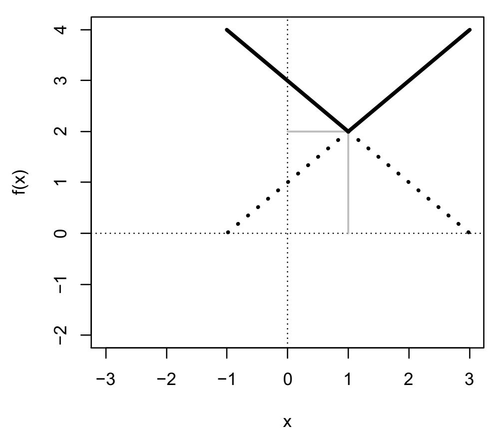


- **Função afim**: Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $y = ax + b$, a e b constantes, denomina-se função afim. Seu gráfico é a reta que passa pelo ponto $(0, b)$ e é paralela à reta $y = ax$.

  Exemplo 5: $f(x) = |x - 1| + 2$.

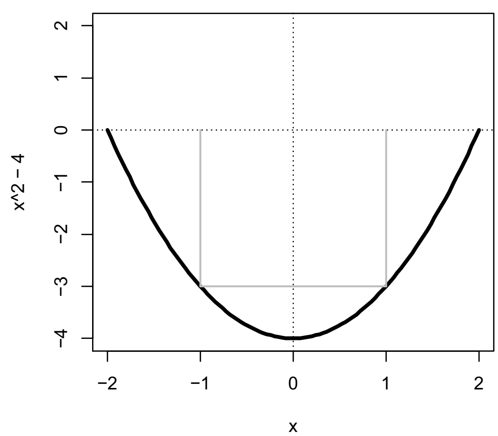
  Eliminando o módulo temos:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + 2, & se \quad x \geq 1 \\ -(x-1) + 2, & se \quad x < 1 \end{cases} \iff f(x) = \begin{cases} x + 1, & se \quad x \geq 1 \\ -x + 3, & se \quad x < 1 \end{cases}$$



- **Função polinomial**: Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, onde $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais fixos, denomina-se função polinomial de grau n ($n \in \mathbb{N}$).

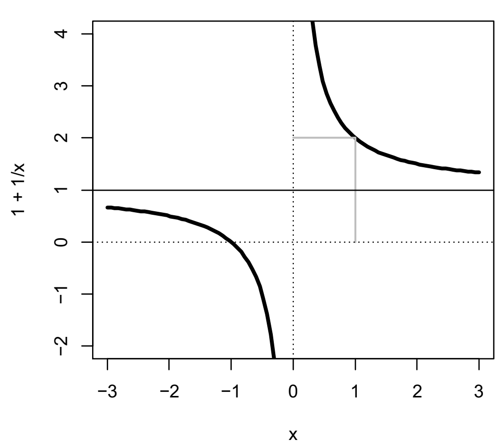
  Exemplo 6: $f(x) = x^2 - 4$ é uma função polinomial de grau 2 e seu gráfico é a parábola.



- **Função racional**:Uma função racional f é uma função dada por $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde p e q são duas funções polinomiais. O domínio de f é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$.

  Exemplo 7: $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

  Manipulando temos: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$. A função f está definida para todo $x \neq 0$. O gráfico de f é o gráfico de $y = \frac{1}{x}$ transladando-o uma unidade para cima.



1.5 Operações com funções

Sejam f e g duas funções tais que $D_f \cap D_g \neq \emptyset$. Definimos:

a. A função $f+g$ dada por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ denomina-se soma de f e g. O domínio de $f+g$ é $D_f \cap D_g$. Observe que $f+g$ é uma notação para indicar a função dada por $y = f(x)+g(x)$.

b. A função $f \cdot g$ dada por $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ denomina-se produto de f e g. O domínio de $f \cdot g$ é $D_f \cap D_g$.

c. A função $\frac{f}{g}$ dada por $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ denomina-se quociente de f e g. O domínio de $\frac{f}{g}$ é $\{x \in D_f \cap D_g | g(x) \neq 0\}$.

d. A função kf, k constante, dada por $(kf)(x) = kf(x)$ é o produto de f pela constante k. O domínio de kf é D_f.

Exemplo 1:Sejam $f(x) = \sqrt{7-x}$ e $g(x) = \sqrt{x-2}$.

a. $(f+g)(x) = \sqrt{7-x} + \sqrt{x-2}$. O domínio de $f+g$ é $[2,7] = D_f \cap D_g$.

b. $(f \cdot g)(x) = \sqrt{7-x} \cdot \sqrt{x-2}$. O domínio de $f \cdot g$ é $[2,7] = D_f \cap D_g$.

c. $\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{x-2}}$. O domínio de $\frac{f}{g}$ é $x \in]2,7]$.

d. $kf(x) = k\sqrt{7-x}$. O domínio de $kf(x)$ é $D_f =]-\infty, 7]$.

Sendo f uma função, definimos a imagem de f por $Im_f = \{f(x) | x \in D_f\}$.

Definição (de função composta): Sejam f e g duas funções tais que $Im_f \subset D_g$. A função dada por $y = g(f(x))$, $x \in D_f$ denomina-se função composta de g e f. É usual a notação $g \circ f$ para indicar a composta de g e f.

Assim, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in D_f$.

Observe que $g \circ f$ tem o mesmo domínio que f.

Exemplo 2: Sejam f e g dadas por $f(x) = 2x+1$ e $g(x) = x^2+3x$. Determine $g \circ f$ e $f \circ g$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= [f(x)]^2 + 3[f(x)] \\ &= (2x+1)^2 + 3(2x+1), x \in \mathbb{R} = D_f.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= f(x^2 + 3x) \\
&= 2(x^2 + 3x) + 1, x \in \mathbb{R} = D_g.
\end{aligned}
$$

1.6 Logaritmo e exponencial

- **Exponencial**: A função exponencial pode ser pensada como uma generalização do processo de potenciação para expoentes não inteiros. Quando n é um número natural maior do que 1, a potência a^n indica a multiplicação da base a por ela mesma n vezes. Isto é:

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \quad \text{vezes}}$$

Propriedades:

a. $x^m \times x^n = x^{x+n}$ (por exemplo, $x^3 \times x^4 = x^7$).

Demonstração: $x^m \times x^n = \underbrace{(x \times \cdots \times x)}_{m \quad \text{vezes}} \underbrace{(x \times \cdots \times x)}_{n \quad \text{vezes}} = \underbrace{(x \times \cdots \times x)}_{m+n \quad \text{vezes}} = x^{m+n}$

b. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ (por exemplo, $\frac{x^4}{x^3} = x$).

Demonstração: $\frac{x^m}{x^n} = \dfrac{\overbrace{x \times \cdots \times x}^{m \quad \text{vezes}}}{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \quad \text{vezes}}} = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{m-n \quad \text{vezes}} = x^{m-n}$

c. $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ (por exemplo, $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$).

d. $x^0 = 1, \forall x \neq 0$.

e. $x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$ (por exemplo, $x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{x^5}$).

f. $(x^m)^n = x^{mn}$ (por exemplo, $(x^2)^3 = x^{2\times3} = x^6$).

g. $x^m \times y^m = (xy)^m$ (por exemplo, $2^2 \times 3^2 = (2 \times 3)^2 = 6^2 = 36$).

- **Logaritmo**: O logaritmo de um número positivo real x na base b, em que b é um número positivo real diferente de 1, é o expoente pelo qual b deve ser elevado para se chegar a x. Isto é, $y = b^x \iff x = \log_b(y)$. Por exemplo, $\log_{10}(1000) = 3$ porque $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$.

  O logaritmo natural (ou neperiano) tem a constante irracional e ($\approx$ 2,718) como base e é muito utilizado no cálculo diferencial.

Propriedades:

a. $\log_b(xy) = \log_b(x) + log_b(y)$ porque $b^c \cdot b^d = b^{c+d}$.

b. $\log_b(x^d) = d\log_b(x)$ porque $(b^c)^d = b^{cd}$.

c. $\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - log_b(y)$ porque $b^{c-d} = \frac{b^c}{b^d}$.

d. $\log_b(\sqrt[y]{x}) = \frac{\log_b(x)}{y}$ porque $\sqrt[y]{x} = x^{\frac{1}{y}}$.

e. $c\log_b(x) + d\log_b(y) = \log_b(x^c y^d)$ porque $\log_b(x^c y^d) = \log_b(x^c) + \log_b(y^d)$, onde b, x e y são números reais positivos e $b \neq 1$. Tanto c quanto d são números reais.

f. $\log_b(1) = \log_b(e^0) = 0$

1.7 Somatório e produtório

- **Somatório**: Um somatório é um operador que nos permite representar somas. Por exemplo, para representarmos a soma dos 3 primeiros números naturais, excluindo o zero, podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^{3} i = 1 + 2 + 3 = 6$$

Propriedades: Sejam $i, n \in \mathbb{N}$, tais que $i < n$ e $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \cdots, n$ e c uma constante real.

a. $\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} cx_i &= cx_1 + cx_2 + \cdots + cx_n \\ &= c(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ &= c\sum_{i=1}^{n} x_i\end{aligned}$$

b. $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_n + y_n) \\ &= x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \cdots + x_n + y_n \\ &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\end{aligned}$$

c. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$.

Demonstração:

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n \quad \text{vezes}} = nc$$

- **Produtório**: De forma análoga ao somatório, representaremos o produto de n termos por:

$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

Propriedades:

a. $\prod_{i=1}^{n} cx_i = c^n \prod_{i=1}^{n} x_i$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} cx_i &= (cx_1) \times (cx_2) \times \cdots \times (cx_n) \\ &= \underbrace{c \times c \times \cdots \times c}_{n \quad \text{vezes}} \times (x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n) \\ &= c^n \prod_{i=1}^{n} x_i\end{aligned}$$

b. $\prod_{i=1}^{n} x_i y_i = \prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{i=1}^{n} y_i$.

Demonstração:

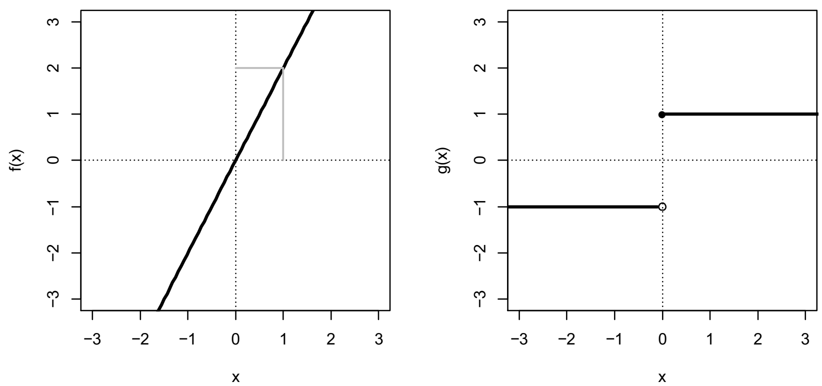
$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} x_i y_i &= (x_1 y_1) \times (x_2 y_2) \times \cdots \times (x_n y_n) \\ &= (x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n) \times (y_1 \times y_2 \times \cdots \times y_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{i=1}^{n} y_i\end{aligned}$$

c. $\prod_{i=1}^{n} c = c^n$.

Demonstração: $\prod_{i=1}^{n} c = \underbrace{c \times c \times \cdots \times c}_{n \quad \text{vezes}} = c^n$

1.8 Limite e continuidade

Intuitivamente, uma função contínua em um ponto p de seu domínio é uma função cujo gráfico não apresenta um "salto"em p.



O gráfico da esquerda ($f(x) = 2x$) não apresenta um "salto"em nenhum ponto. Em particular, à medida que x se aproxima de 1, seja pela esquerda, seja pela direita, o valore de $f(x)$ se aproxima de $f(1) = 2$. Mas o mesmo não acontece com a função $g(x)$ no ponto 0 (gráfico da direita). Neste ponto o gráfico de g apresenta um "salto"e, portanto, g não é contínua em 0. Mas é contínua para $x \neq 0$.

Intuitivamente, dizer que o limite de $f(x)$, quando x tende a p, é igual a L que, simbolicamente, se escreve $\lim_{x\to p} f(x) = L$ significa que quando x tende a p, $f(x)$ tende a L. No exemplo da função $f(x) = 2x$ temos que quando x se aproxima de 1, $f(x)$ tende a 2.

Exemplo 1: Calcule $\lim_{x\to 1}(x + 1)$.

x	$f(x) = x + 1$	x	$f(x) = x + 1$
2	3	0	1
1,5	2,5	0,5	1,5
1,1	2,1	0,9	1,9
1,01	2,01	0,99	1,99
1,001	2,001	0,999	1,999
...	...	...	...
1	2	1	2

Se f estiver definida em p e for contínua em p, então $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ e reciprocamente. Isto é:

$$\text{f contínua em p} \iff \lim_{x\to p} f(x) = f(p)$$

Propriedades:

a. $\lim_{x\to p}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to p} f(x) + \lim_{x\to p} g(x) = f(p) + g(p)$.

b. $\lim_{x\to p} kf(x) = k \lim_{x\to p} f(x) = kf(p)$.

c. $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = \lim_{x\to p} f(x) \lim_{x\to p} g(x) = f(p)g(p)$.

d. $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(p)}{g(p)}$, para $\lim_{x\to p} g(x) \neq 0$.

Exemplo 2 (limites laterais): Calcule $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & se \quad x < 1 \\ \\ 2x, & se \quad x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x = 2$ e

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 = 1$

Vejamos, na medida em que x se aproxima de 1 pela direita, $f(x)$ tende a 2. Mas quando nos aproximamos de 1 pela esquerda, $f(x)$ tende a 1.

Teorema:

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \iff \begin{cases} \exists \lim_{x\to p^+} f(x), \lim_{x\to p^-} f(x) \quad e \\ \\ \lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x) = L \end{cases}$$

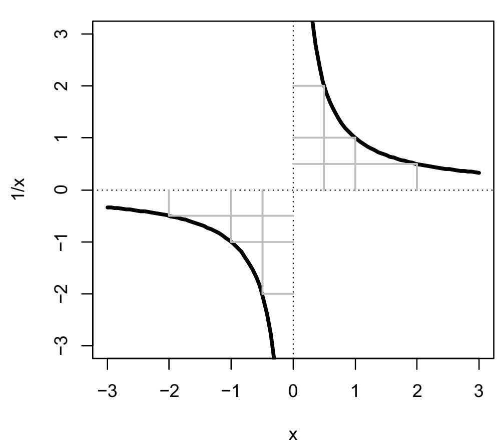
Exemplo 3: Seja $f(x) = \begin{cases} 2x, & se \quad x \leq 1 \\ \\ 3, & se \quad x > 1 \end{cases}$. Calcule $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)$. f é contínua?

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x = 2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} 3 = 3$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x) \Longrightarrow$ f não é contínua

Exemplo 4 (limites infinitos e limites no infinito): Seja $f(x) = \frac{1}{x}$. Calcule $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

Exemplo 5 (o limite mais importante): Seja $f(x) = x^2$. Calcule $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Temos $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{(x^2+2xh+h^2)-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$, para $h \neq 0$.

Segue que $\lim_{x\to 0}(2x+h) = 2x$.