EXEMPLO 3 $\displaystyle\int \frac{x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 - 10x}\,dx.$

Nenhuma simplificação algébrica ou substituição é óbvia, por isso as Etapas 1 e 2 não se aplicam aqui. O integrando é uma função racional, então aplicamos o procedimento da Seção 7.4, lembrando que a primeira etapa é dividir.

EXEMPLO 4 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

Aqui a Etapa 2 é tudo o que é necessário. Substituímos $u = \ln x$ porque sua diferencial é $du = dx/x$, que ocorre na integral.

EXEMPLO 5 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx.$

Embora a substituição racionalizante

$$u = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

funcione aqui [(ii) Etapa 3(d)], isso leva a uma função racional muito complicada. Um método mais fácil é fazer alguma manipulação algébrica [como na Etapa 1 ou na Etapa 4(c)]. Multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{1 - x}$, temos

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx &= \int \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \\ &= \operatorname{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2} + C\end{aligned}$$

Podemos Integrar Todas as Funções Contínuas?

Surge uma questão: nossa estratégia de integração nos permite encontrar a integral de toda função contínua? Por exemplo, podemos usá-la para calcular $\int e^{x^2}\,dx$? A resposta é não, ao menos não em termos das funções que nos são familiares.

As funções com as quais temos lidado neste livro são chamadas **funções elementares**. Essas são as funções polinomiais, racionais, potências (x^a), exponenciais (a^x), logarítmicas, trigonométricas e suas inversas, hiperbólicas e suas inversas, e todas as funções que podem ser obtidas a partir destas pelas operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e composição. Por exemplo, a função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x - 1}} + \ln(\cosh x) - xe^{\operatorname{sen} 2x}$$

é uma função elementar.

Se f for uma função elementar, então f' é uma função elementar, mas $\int f(x)\,dx$ não precisa ser uma função elementar. Considere $f(x) = e^{x^2}$. Como f é contínua, sua integral existe, e se definimos a função F por

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

então sabemos pela Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$F'(x) = e^{x^2}$$

Logo, $f(x) = e^{x^2}$ tem uma primitiva F, mas pode-se demonstrar que F não é uma função elementar. Isso significa que não importa o quanto tentemos, nunca teremos sucesso em calcular

$\int e^{x^2} dx$ nos termos das funções que conhecemos. (No Capítulo 11, no entanto, veremos como expressar $\int e^{x^2}\, dx$ como uma série infinita.) O mesmo pode ser dito das seguintes integrais:

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx \qquad \int \operatorname{sen}(x^2)\, dx \qquad \int \cos(e^x)\, dx$$

$$\int \sqrt{x^3 + 1}\, dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\, dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

De fato, a maioria das funções elementares não tem primitivas elementares. Você pode ter a certeza, entretanto, de que todas as integrais nos exercícios a seguir são funções elementares.

7.5 Exercícios

1–82 Calcule a integral.

1. $\int \cos x\, (1 + \operatorname{sen}^2 x)\, dx$

2. $\int_0^1 (3x + 1)^{\sqrt{2}}\, dx$

3. $\int \frac{\operatorname{sen} x + \sec x}{\operatorname{tg} x} dx$

4. $\int \operatorname{tg}^3\theta\, d\theta$

5. $\int_0^2 \frac{2t}{(t - 3)^2} dt$

6. $\int \frac{x}{\sqrt{3 - x^4}} dx$

7. $\int_{-1}^1 \frac{e^{\operatorname{arctg} y}}{1 + y^2} dy$

8. $\int t \operatorname{sen} t \cos t\, dt$

9. $\int_1^3 r^4 \ln r\, dr$

10. $\int_0^4 \frac{x - 1}{x^2 - 4x - 5} dx$

11. $\int \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 5} dx$

12. $\int \frac{x}{x^4 + x^2 + 1} dx$

13. $\int \operatorname{sen}^5 t \cos^4 t\, dt$

14. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

15. $\int \frac{dx}{(1 - x^2)^{3/2}}$

16. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

17. $\int_0^\pi t \cos^2 t\, dt$

18. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$

19. $\int e^{x + e^x}\, dx$

20. $\int e^2\, dx$

21. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx$

22. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + (\ln x)^2}} dx$

23. $\int_0^1 (1 + \sqrt{x})^8\, dx$

24. $\int_0^4 \frac{6z + 5}{2z + 1} dz$

25. $\int \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 2x - 8} dx$

26. $\int \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x - 8} dx$

27. $\int \frac{dx}{1 + e^x}$

28. $\int \operatorname{sen} \sqrt{at}\, dt$

29. $\int \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) dx$

30. $\int_{-1}^2 |e^x - 1|\, dx$

31. $\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\, dx$

32. $\int \frac{\sqrt{2x - 1}}{2x + 3} dx$

33. $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx$

34. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 + 4 \operatorname{cotg} x}{4 - \operatorname{cotg} x} dx$

35. $\int \cos 2x \cos 6x\, dx$

36. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos^4 x}\, dx$

37. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3\theta\, \mathrm{sc}^2\theta\, d\theta$

38. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}\theta \operatorname{cotg}\theta}{\sec\theta} d\theta$

39. $\int \frac{\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{\sec^2\theta - \sec\theta} d\theta$

40. $\int \frac{1}{\sqrt{4y^2 - 4y - 3}} dy$

41. $\int \theta \operatorname{tg}^z\theta\, d\theta$

42. $\int \frac{\operatorname{tg}^{-1} x}{x^2} dx$

43. $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + x^3} dx$

44. $\int \sqrt{1 + e^x}\, dx$

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

45. $\int x^5 e^{-x^3}\,dx$

46. $\int \frac{(x-1)\,e^x}{x^2}\,dx$

47. $\int x^3(x-1)^{-4}\,dx$

48. $\int_0^1 x\sqrt{2-\sqrt{1-x^2}}\,dx$

49. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x+1}}\,dx$

50. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x+1}}\,dx$

51. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+1}}\,dx$

52. $\int \frac{dx}{x(x^4+1)}$

53. $\int x^2 \operatorname{senh} mx\,dx$

54. $\int (x+\operatorname{sen} x)^2\,dx$

55. $\int \frac{dx}{x+x\sqrt{x}}$

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$

57. $\int x\sqrt[3]{x+c}\,dx$

58. $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

59. $\int \cos x\cos^3 x(\operatorname{sen} x)\,dx$

60. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-1}}$

61. $\int \frac{d\theta}{1+\cos\theta}$

62. $\int \frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}$

63. $\int \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx$

64. $\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\,dx$

65. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^4 x}\,dx$

66. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{sen} x\cos x}\,dx$

67. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx$

68. $\int \frac{x^2}{x^6+3x^3+2}\,dx$

69. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$

70. $\int \frac{1}{1+2e^x-e^{-x}}\,dx$

71. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

72. $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx$

73. $\int \frac{x+\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

74. $\int \frac{4^x+10^x}{2^x}\,dx$

75. $\int \frac{1}{(x-2)(x^2+4)}\,dx$

76. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^4}$

77. $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

78. $\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$

79. $\int x\operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$

80. $\int \frac{\sec x\cos 2x}{\operatorname{sen} x+\sec x}\,dx$

81. $\int \sqrt{1-\operatorname{sen} x}\,dx$

82. $\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x}\,dx$

83. As funções $y = e^{x^2}$ e $y = x^2e^{x^2}$ não têm primitivas expressas por meio de funções elementares, mas $y = (2x^2+1)\,e^{x^2}$ tem. Calcule $\int(2x^2+1)\,e^{x^2}\,dx$.

84. Sabemos que $F(x) = \int_0^x e^{e^t}\,dt$ é uma função contínua pelo TFC1, embora não seja uma função elementar. As funções

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx$$

também não são elementares, mas podem ser expressas em termos de F. Calcule as seguintes integrais em termos de F.

(a) $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$ (b) $\int_2^3 \frac{1}{\ln x}\,dx$

7.6 Integração Usando Tabelas e Sistemas de Computação Álgébrica

Nesta seção descreveremos como usar as tabelas e os sistemas de computação algébrica para integrar as funções que têm primitivas elementares. Você deve ter em mente, contudo, que até mesmo os mais poderosos sistemas de computação algébrica não podem encontrar fórmulas explícitas para as primitivas de funções como e^{x^2} ou outras funções descritas no final da Seção 7.5.

Tabelas de Integrais

As tabelas de integrais indefinidas são muito úteis quando nos deparamos com uma integral que é difícil de calcular manualmente e não temos acesso a um sistema de computação algébrica. Uma tabela relativamente curta de 120 integrais é dada no fim do livro. Tabelas mais abrangentes estão disponíveis nas *Tabelas e Fórmulas Matemáticas Padrão*, 31ª ed. de Daniel Zwillinger (Boca Raton, FL, 2002) (709 entradas) ou na *Tabela de Integrais, Séries e Produtos* de Gradshteyn e Ryzhik, 7e (San Diego, 2007), que contém centenas de páginas de integrais. Devemos nos lembrar, contudo, que as integrais frequentemente não ocorrem da maneira exata como foram listadas nas tabelas. Geralmente temos que usar a regra de substituição ou manipulação algébrica para transformar uma dada integral em uma das formas da tabela.

EXEMPLO 1 A região delimitada pelas curvas $y = \text{arctg}\, x$, $y = 0$ e $x = 1$ é girada em torno do eixo y. Encontre o volume do sólido obtido.

SOLUÇÃO Usando o método das cascas cilíndricas, vemos que o volume é

$$V = \int_0^1 2\pi x \,\text{arctg}\, x \, dx$$

A Tabela de Integrais aparece nas Páginas de Referência 6-11 no final do livro.

Na seção da Tabela de Integrais intitulada *Formas Trigonométricas Inversas* localizamos a Fórmula 92:

$$\int u \,\text{tg}^{-1} u \, du = \frac{u^2 + 1}{2} \text{tg}^{-1} u - \frac{u}{2} + C$$

Então, o volume é

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x \,\text{tg}^{-1} x \, dx = 2\pi \left[\frac{x^2 + 1}{2} \text{tg}^{-1} x - \frac{x}{2} \right]_0^1 \\ &= \pi \left[(x^2 + 1) \,\text{tg}^{-1} x - x \right]_0^1 = \pi\,(2 \,\text{tg}^{-1} 1 - 1) \\ &= \pi[2(\pi/4) - 1] = \tfrac{1}{2}\pi^2 - \pi \end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Use a Tabela de Integrais para encontrar $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{5 - 4x^2}}\, dx$.

SOLUÇÃO Se olharmos na seção da tabela intitulada *Formas envolvendo* $\sqrt{a^2 - u^2}$, veremos que a entrada mais próxima é a de número 34:

$$\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}}\, du = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

Isso não é exatamente o que temos, mas poderemos usá-la se fizermos primeiro a substituição $u = 2x$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5 - 4x^2}}\, dx = \int \frac{(u/2)^2}{\sqrt{5 - u^2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{8} \int \frac{u^2}{\sqrt{5 - u^2}}\, du$$

Nesse caso, usaremos a Fórmula 34 com $a^2 = 5$ (assim $a = \sqrt{5}$):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{5 - 4x^2}}\, dx &= \frac{1}{8} \int \frac{u^2}{\sqrt{5 - u^2}}\, du = \frac{1}{8}\left(-\frac{u}{2}\sqrt{5 - u^2} + \frac{5}{2} \text{sen}^{-1} \frac{u}{\sqrt{5}} \right) + C \\ &= -\frac{x}{8}\sqrt{5 - 4x^2} + \frac{5}{16} \text{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right) + C \end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Use a Tabela de Integrais para calcular $\int x^3 \,\text{sen}\, x \, dx$.

SOLUÇÃO Se olharmos na seção intitulada *Formas Trigonométricas*, veremos que nenhuma das entradas inclui explicitamente um fator u^3. Contudo, podemos usar a fórmula de redução na entrada 84 com $n = 3$:

$$\int x^3 \,\text{sen}\, x \, dx = -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x \, dx$$

Precisamos agora calcular $\int x^2 \cos x \, dx$. Podemos usar a fórmula de redução na entrada 85 com $n = 2$, seguida pela entrada 82:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \,\text{sen}\, x - 2 \int x \,\text{sen}\, x \, dx \\ &= x^2 \,\text{sen}\, x - 2(\text{sen}\, x - x \cos x) + K \end{aligned}$$

85. $\displaystyle\int u^n \cos u \, du = u^n \,\text{sen}\, u - n \int u^{n-1} \,\text{sen}\, u \, du$