NOTAS DA AULA

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL E DE POISSON

Prof.: Idemauro Antonio Rodrigues de Lara

Objetivo geral da aula

- **Caracterizar os modelos de distribuição de variável aleatória discreta: binomial e de Poisson. Aplicação em estudo de casos.**

Conteúdo

1. Ensaios de Bernoulli;
2. Distribuição binomial. Função de probabilidade;
3. Distribuição de Poisson. Função de probabilidade;
4. Aplicações.

Pré-requisitos: Variáveis aleatórias discretas. Esperança e Variância.

Ensaios de Bernoulli

Considere os seguintes experimentos aleatórios:

1. Uma semente híbrida de milho é plantada: ela pode germinar ou não;
2. Um inseticida é aplicado a uma praga: ela morre ou não;
3. Um enxerto é aplicado em uma laranjeira: ele é bem sucessido ou não;
4. Uma mensagem eletrônica é enviada por um servidor: ela chega ao seu destino ou não;

Ensaios de Bernoulli

Definição Um experimento em que se admite apenas uma dicotomia de resultados do tipo sucesso (evento A) ou fracasso (evento A^c) é denominado ensaio de Bernoulli. Admita: "$X = 0$" se ocorre o fracasso ou "$X = 1$" se ocorre o sucesso e seja p a probabilidade do sucesso, então a função de probabilidade da variável aleatória X é dada por:

$$f(x) = P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, \qquad x = 0, 1.$$

Esperança e Variância

$$\mathrm{E}(X) = p \qquad \mathrm{Var}(X) = p(1-p)$$

Distribuição Binomial

Definição: Considere a realização de n ensaios de Bernoulli, independentes e todos do mesmo tipo. Admita que em cada ensaio a probabilidade do sucesso permanece constante p. Nestas condições: seja X a variável aleatória que descreve o número de sucessos nestas n realizações. Dizemos que a variável aleatória X tem distribuição binomial. Notação:

$$X \sim b(n, p)$$

Função de probabilidade

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, n$$

Esperança e Variância

$$\mathrm{E}(X) = np \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

Exemplo 1

Uma espécie de híbrido de milho foi desenvolvida por melhoramento genético e sendo assim tem taxa germinação estimada em 83%. Dez sementes desta espécie foram plantadas. Determine:

a. A probabilidade de mais de sete germinarem. (0,7658)

b. A probabilidade de que não mais do que 4 germinem. (0,0027)

c. Em um experimento em que se plantam 1000 destas sementes, qual o valor esperado e desvio-padrão do número de sementes que germinam? (830 e 11,87)

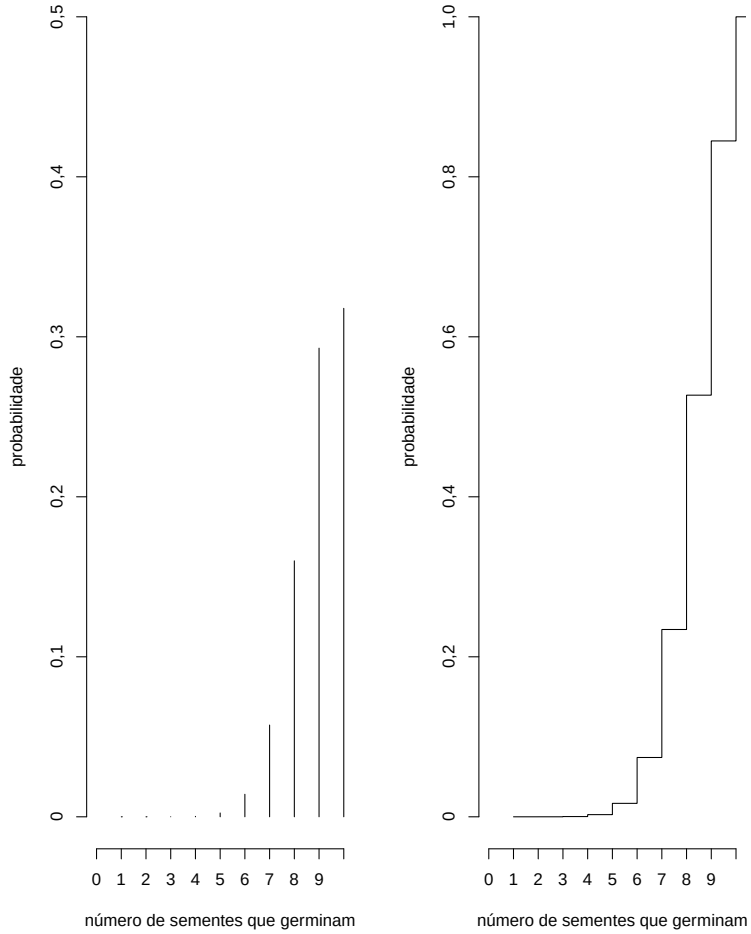

Figura 1: Função de probabilidade e de distribuição da v.a. $X \sim b(10, 0,83)$.

Outros exemplos

Exemplo 2. Em uma população, sabe-se que 10% dos indivíduos são daltônicos. Qual é a probabilidade de, ao se examinarem 6 pessoas dessa população:

a. uma ser daltônica? (0,3543)

b. no máximo uma ser daltônica? (0,8857)

c. pelo menos duas serem daltônicas? (0,1143)

Exemplo 3. (Andrade e Ogliari, 2010) Numa criação de coelhos, a taxa de nascimentos de coelhos machos é de $0,40$. Qual é a probabilidade de que nasçam pelo menos dois coelhos machos, num dia em que nasceram 19 coelhos?

Observação

Na maior parte das situações práticas realiza-se uma amostragem de "itens" de uma população, sem reposição. No entanto, quando a população é admitida infinita podemos caracterizar a variável aleatória que descreve o número de itens portadores de uma característica "A" pela distribuição binomial.

Limite da função binomial

Suponha a realização de n ensaios de Bernoulli independentes e todos do mesmo tipo. Façamos $n \to \infty$. Se quando $n \to \infty$, $p \to 0$ e $np \to \lambda$, então a função da binomial pode ser aproximada pela expressão abaixo, chamada de função de Poisson:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \simeq \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Exemplo 4

Suponha que a probabilidade de um indivíduo acusar reação negativa a uma injeção de um determinado soro é $0,001$. Determine a probabilidade de que, em 2000 indivíduos exatamente três acusem reação negativa. Utilize a distribuição binomial e a aproximação pela função de Poisson. ($0,18053$ e $0,18044$)

Distribuição de Poisson

O modelo de Poisson não é um simples aproximação para a distribuição binomial. Este modelo "tem vida própria" e larga aplicabilidade em diversos fenômenos físicos, biológicos, agronômicos, entre outros, em que se pressupõe uma taxa média de ocorrência num determinado intervalo. Portanto, pode ser usado para descrever o processo de contagem do número de "sucessos" de um evento particular em um intervalo real (tempo, volume, área,...).

Exemplos de situações experimentais que podem ser estudadas por este modelo:

a. Contagem do número de partículas de vírus em uma solução;

b. Número de mensagens que chegam a um servidor em 30 minutos;

c. Distribuição do número de casos de dengue numa região;

d. Contagem do número de partículas radioativas emitidas por uma fonte;

e. Dispersão de populações de uma espécie em determinada área;

Distribuição de Poisson

Definição: Seja X uma variável discreta, dizemos que X tem distribuição Poisson se sua função de probabilidade for dada por:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Notação: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

Esperança e Variância

$$\text{E}(X) = \lambda \qquad \text{Var}(X) = \lambda$$

Pressuposições do processo de Poisson

i. Os números de ocorrências em quaisquer intervalos são independentes;

ii. O número médio de ocorrências é constante em todo o intervalo considerado;

iii. $\mathrm{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Exemplo 1

(Magalhães e Lima, 2002) Em um laboratório estuda-se a emissão de partículas de certo material radioativo. Seja N o número de partículas emitidas em 1 minuto. O laboratório admite que N tem distribuição de Poisson com parâmetro 5.

a. Calcule a probabilidade de que em um minuto não hajam emissões de partículas; (0,0067)

b. Determine a probabilidade de que pelo menos uma partícula seja emitida em um minuto; (0,9933)

c. Qual é a probabilidade de que, em um minuto, o número de partículas emitidas esteja entre 2 e 5 (inclusive)? (0,5755)

Exemplo 2

Numa placa de microscópio, com área dividida em quadrantes de 1 mm^2, encontram-se em média 4 colônias de bactérias por mm^2. Fazendo as suposições necessárias, calcule a probabilidade de que:

a. em um quadrante de 1 mm^2 se tenha exatamente 1 colônia. (0,07326)

b. em um quadrante de 1 mm^2 se tenha ao menos 2 colônias. (0,90842)

c. em um quadrante de 2 mm^2 se tenha não mais do que 5 colônias. (0,19123)

Exercícios propostos

Capítulo 4, págs. 235-246, do livro Estatística para as Ciências Agrárias e Biológicas - com noções de experimentação. (Ver referência 1).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ANDRADE, D.F.; OGLIARI, P.J. **Estatística para as Ciências Agrárias e Biológicas com noções de experimentação**. Editora da UFSC, Florianópolis, 2007.
2. BARBETA, P.A.; REIS, M.M.; BORNIA, A.C. **Estatística para Cursos de Engenharia e Informática**. São Paulo, Atlas, 2010.
3. BUSSAB, W.O. ; P.A. MORETIN, **Estatística Básica**, 5ª edição. Editora Saraiva, 2002.
4. MAGALHÃES, M.N.; LIMA, A.C. P de. **Noções de Probabilidade e Estatística**. 6ª ed. São Paulo: EDUSP, 2007.