

NOTAS DA AULA

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS. ESPERANÇA E VARIÂNCIA

Prof.: IDEMAURO ANTONIO RODRIGUES DE LARA

OBJETIVO GERAL DA AULA

- **Caracterizar variáveis aleatórias discretas e contínuas. Compreender e aplicar os fundamentos da Esperança Matemática.**

Conteúdo

1. Variáveis aleatórias;
2. Variável aleatória discreta. Função de probabilidade. Distribuição de probabilidade;
3. Variável aleatória contínua. Função de densidade de probabilidade.
4. Esperança Matemática. Variância. Propriedades.

Pré-requisitos: Fundamentos da Teoria da Probabilidade.

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Definição: Seja E um experimento aleatório e Ω o espaço amostral a ele associado. Uma função X que associa a cada resultado de Ω um único número real é denominada variável aleatória.

Notação:

$$X : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ w \mapsto X(w) \end{cases}$$

A variável aleatória X pode ser classificada como discreta, absolutamente contínua, singular ou mista. Neste curso estudaremos apenas as variáveis aleatórias discretas e contínuas.

ALGUNS EXEMPLOS

1. Em um experimento com híbridos de milho, 50 sementes foram plantadas. Seja X o número de sementes que germinam após t dias.
2. Rendimento de grãos híbridos de milho, em kg/ha ;
3. Um inseticida é aplicado a um grupo de n insetos. Sejam Y : Tempo de resposta, em segundos, após a aplicação do inseticida no inseto i ; Z : o número de insetos sobreviventes;
4. Número de insetos capturados em uma armadilha instalada no campo;
5. Número de casos de dengue, por km^2 em uma região;
6. Em eucaliptos: altura das plantas, DAP.

IMPORTÂNCIA PARA A ESTATÍSTICA

- i. Caracterização de um fenômeno ou da resposta de um experimento como uma variável aleatória. Fundamentação de modelos teóricos. Mensuração da probabilidade de ocorrência de determinados valores.
- ii. As “estatísticas” tais como média, variância, proporção, coeficiente de correlação, coeficientes de modelos de previsão, entre outras, sob amostragem, também são variáveis aleatórias;
- iii. O comportamento probabilístico dessas estatísticas é base para a inferência estatística (generalização dos resultados).

VARIÁVEL ALEATÓRIAS DISCRETAS

Definição: Uma variável aleatória X é classificada como discreta quando X assume um número finito ou infinito enumerável de valores.

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta, isto é, $X(w) \in \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, a função de probabilidade da variável aleatória X é um modelo tal que:

i. $f(x_i) = P(X = x_i) = p(x_i) \geq 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, 3, \dots;$

ii. $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1.$

Observação: O par de valores $[x_i, p(x_i)]$ caracteriza a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta e pode ser representada por uma tabela ou por um gráfico (“hastes” ou “escada”).

VARIÁVEL ALEATÓRIAS DISCRETAS: APLICAÇÕES

Exemplo 1. (Magalhães e Lima, 2002) Um agricultor cultiva laranjas e também produz mudas para vender. Após meses a muda pode ser atacada por fungos com probabilidade 0,05 e, nesse caso, ela tem probabilidade 0,5 de ser recuperável. Admita que o processo de recuperação é infalível. O Custo de cada muda produzida é $R\$1,00$, que será acrescido de mais $R\$0,50$ se precisar ser recuperada. As irrecuperáveis são descartadas. Vendendo cada muda a $R\$3,00$, estude como se comporta a variável lucro por muda produzida.

EXEMPLO 1

Tabela 1: Distribuição de probabilidade da variável aleatória X: lucro por muda

X (lucro)	P(X=x)
-1,00	0,025
1,50	0,025
2,00	0,950

OUTROS EXEMPLOS - ALUNOS

Exemplo 2. Dois dados equilibrados são jogados simultaneamente. Seja a variável aleatória Y : o mínimo entre os valores observados. Construa a distribuição de probabilidade da variável aleatória X .

VARIÁVEL ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Definição: Uma variável aleatória X é classificada como contínua quando X assume quaisquer valores em um intervalo real. Diferentemente do caso discreto, este tipo de variável não é enumerável. A especificação de um modelo probabilístico associado a esta variável ocorre por meio de uma função matemática “idealizada”.

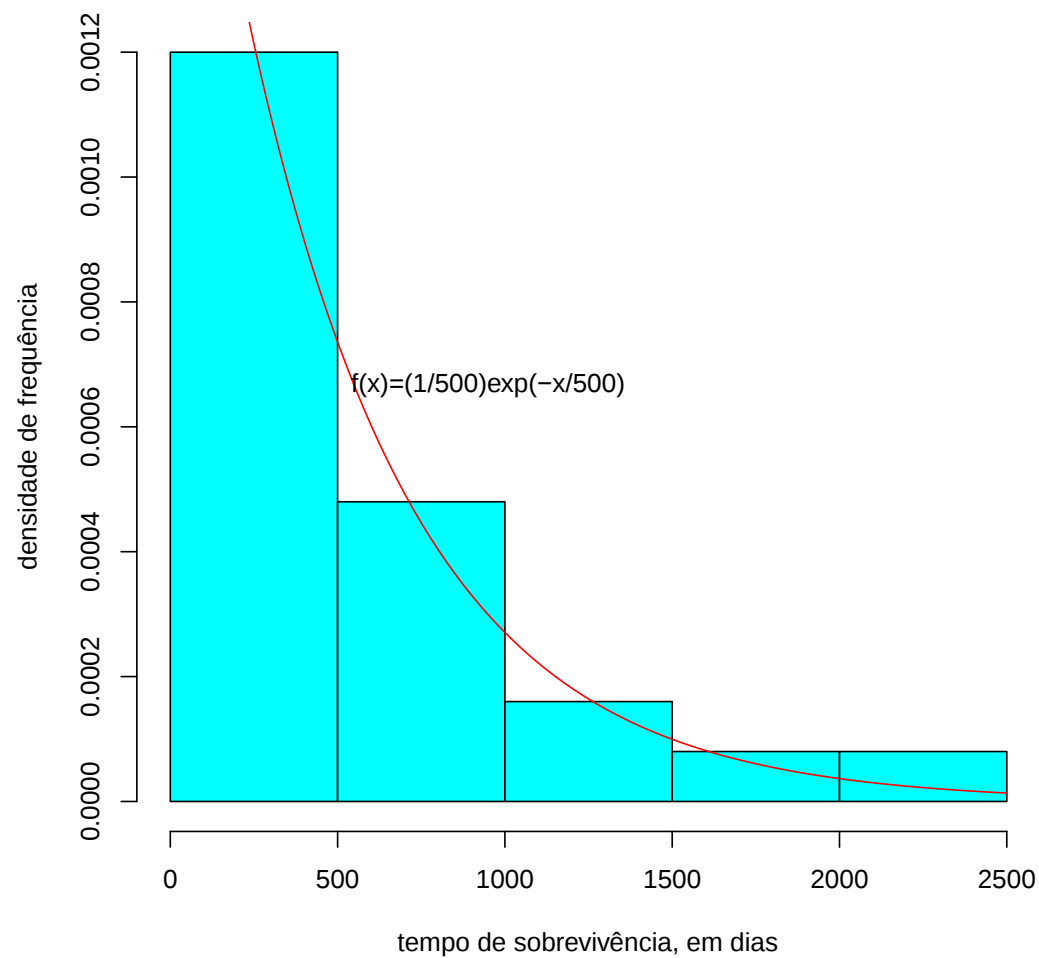


Figura 1: Histograma referente ao tempo de sobrevivência e função de densidade de probabilidade.

VARIÁVEL ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua, então deve existir uma função matemática, chamada de função de densidade de probabilidade da variável aleatória X , satisfazendo:

i. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$

ii. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Observações:

- A f.d.p. pode não ser única;
- $f(x)$ não representa probabilidade (é a imagem de x !)
- $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) =$
 $= \int_a^b f(x)dx$

VARIÁVEL ALEATÓRIAS CONTÍNUAS: APLICAÇÕES

Exemplo 1 (Magalhães e Lima, 2002) O acréscimo anual na área atingida por uma certa praga, numa região produtora de frutas, pode ser modelado por uma variável aleatória contínua, medida em hectares (10 mil m^2), com função de densidade de probabilidade.

$$f(x) : \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 0 < x < 1; \\ 1 - \frac{x}{3}, & 1 \leq x < 3; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- a. Construa o gráfico da função de densidade de probabilidade; b. Qual seria a probabilidade da praga atingir entre 2 e 3 hectares este ano?

OUTROS EXEMPLOS - ALUNOS

Exemplo 2. (Bussab e Moretin, 2002) Dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \exp(-2x), & \text{se } x \geq 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- a. Mostre que $f(x)$ é função de densidade de probabilidade
- b. Calcule $P(X > 10)$

Exemplo 3. (Magalhães e Lima, 2002) A função apresentada, a seguir, corresponde à densidade de uma variável aleatória contínua X :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^3, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule: a. $P(X > 1)$. b. $P(X < 1/2)$ c. $P(1/2 \leq X \leq 1 | X < 3/2)$

FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO

Definição: Seja X uma variável aleatória qualquer, a função de distribuição (acumulada) da variável aleatória X é definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}.$$

Características de $F(x)$:

- i. Contínua à direita;
- ii. Não decrescente;
- iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO: EXEMPLOS

Exemplos Construir a função de distribuição acumulada associadas aos exemplos de número 2, nos casos discreto e contínuo. Representar graficamente.

Observações:

- Relação entre a função de distribuição e a função de probabilidade:

$$P(x = x) = F(x) - F(x^-)$$

- Relação entre a função de distribuição e a função de densidade:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \text{ (em cada uma de suas partes)}$$

- Se a v.a. X é contínua então a sua função de distribuição é absolutamente contínua.

ESPERANÇA MATEMÁTICA

Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F(x)$. A esperança matemática ou esperança da v.a. X é definida por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$$

ou ainda:

$$E(X) = \underbrace{\int_{-\infty}^0 x dF(x)}_I + \underbrace{\int_0^{+\infty} x dF(x)}_{II}$$

- Se I é finito e II é finito então $E(X) < \infty$;
- Se I é finito e $II = +\infty$ então $E(X) = +\infty$;
- Se $I = -\infty$ e II é finito então $E(X) = -\infty$;
- Se $I = -\infty$ e $II = +\infty$ então $\nexists E(X)$.

ESPERANÇA MATEMÁTICA: CASOS DISCRETO E CONTÍNUO

Assim podemos também definir a esperança separadamente:

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x xp(x) & \text{caso discreto;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx & \text{caso contínuo.} \end{cases}$$

que existirá desde que

$$\sum_x |x|p(x) < \infty \quad \text{caso discreto}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < \infty \quad \text{caso contínuo.}$$

EXEMPLOS

Calcule $E(X)$ para as seguintes situações.

1. Uma variável aleatória X tem a seguinte função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 10; \\ 0,2 & \text{se } 10 \leq x < 12; \\ 0,5 & \text{se } 12 \leq x < 25; \\ 1 & \text{se } x \geq 25. \end{cases}$$

2. (Magalhães e Lima, 2002) O consumo de combustível de um certo automóvel é uma variável aleatória medida em km por litro. Admita que a densidade de probabilidade dessa variável é expressa pela seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} x - 10 & \text{se } 10 \leq x \leq 11; \\ 12 - x & \text{se } 11 < x \leq 12; \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Solução computacional

```
#EX.1
```

```
x<-c(10,12,25)
```

```
p<-c(0.2,0.3,0.5)
```

```
EX<-sum(x*p)
```

```
EX
```

```
[1] 18.1
```

```
#EX.2
```

```
f1<- function(x) x^2 -10*x
```

```
f2<- function(x) 12*x -x^2
```

```
integrate(f1,10,11)
```

```
5.333333 with absolute error < 5.9e-14
```

```
integrate(f2,11,12)
```

```
5.666667 with absolute error < 6.3e-14
```

```
5.333333+5.666667
```

```
[1] 11
```

ALGUMAS PROPRIEDADES DA ESPERANÇA MATEMÁTICA

1. Se $X = c$ (constante) então $E(X) = c$ com $c \in \mathbb{R}$;
2. $E(aX + b) = aE(X) + b$ com $E(X) < \infty$ e a, b constantes reais;
3. $E(I_A) = P(A)$ em I_A é a função indicadora da v.a. X ;
4. Se $X \leq Y$ então $E(X) \leq E(Y)$;
5. Seja $Y = g(X)$ então $E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x)$

VARIÂNCIA

Seja X uma variável aleatória (discreta ou contínua) com $E(X) < \infty$ (finita), a variância dessa variável aleatória é definida por:

$$E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

em que:

- $E(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p(x_i)$ no caso discreto;
- $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ no caso contínuo;

Duas Propriedades básicas:

- Se $X = c$ então $\text{Var}(X) = 0$ com $c \in \mathbb{R}$;
- $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$; a, b constantes reais;

EXEMPLO

(Barbeta, Reis e Bornia, 2004) Considere que um produto pode estar perfeito (B), com defeito leve (DL) ou com defeito grave (DG). Seja a seguinte distribuição do lucro (em reais), por unidade vendida desse produto:

Produto	X	$P(X)$
B	6	0,7
DL	0	0,2
DG	-2	0,1

a. Calcule o valor esperado e a variância do lucro; b. Se, com a redução de desperdícios, foi possível aumentar uma unidade no lucro de cada unidade do produto, qual é novo valor esperado e a variância? c. E se o lucro duplicou, qual é o novo valor esperado e a variância?

SOLUÇÃO

```
#SOLUÇÃO
x<-c(6,0,-2)
p<-c(0.7,0.2,0.1)
EX<-sum(x*p)
EX2<-sum((x^2)*p)
Var<-EX2 -(EX)^2
EX
[1] 4
Var
[1] 9.6
```

OUTRO EXEMPLO

Retomando o Exemplo 1 (Magalhães e Lima, 2002) O acréscimo anual na área atingida por uma certa praga, numa região produtora de frutas, pode ser modelado por uma variável aleatória contínua, medida em hectares (10 mil m^2), com função de densidade de probabilidade.

$$f(x) : \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 0 < x < 1; \\ 1 - \frac{x}{3}, & 1 \leq x < 3; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine o acréscimo médio anual na área atingida pela praga

CONSIDERAÇÕES SOBRE ASSIMETRIA E CURTOSE

$$\alpha_3 = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} = 0 \quad (\text{simétrica})$$

$$\alpha_4 = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4}$$

$$\alpha_4 < 3 \quad (\text{platicúrtica}) \quad \alpha_4 = 3 \quad (\text{mesocúrtica}) \quad \alpha_4 > 3 \quad (\text{leptocúrtica})$$

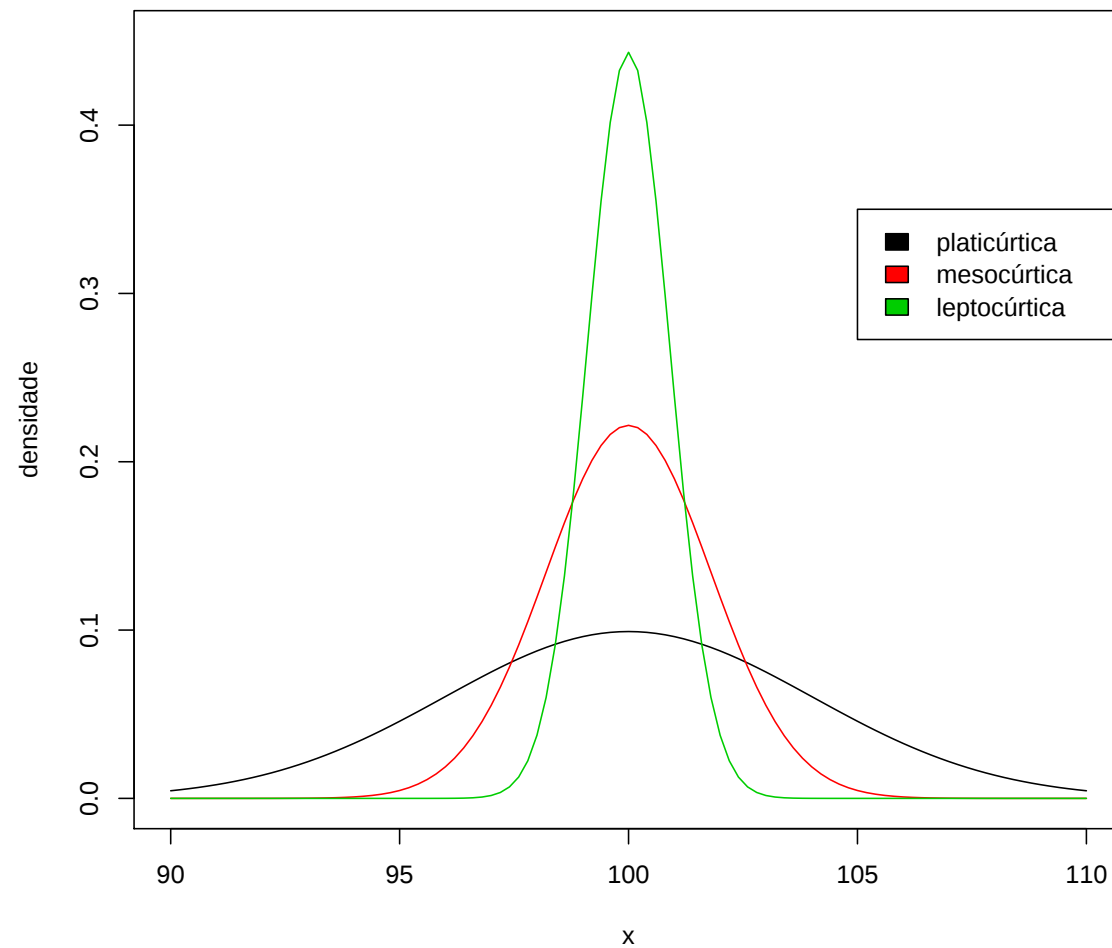


Figura 2: Três curvas normais com graus de curtose diferentes

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ANDRADE, D.F.; OGLIARI, P.J. **Estatística para as Ciências Agrárias e Biológicas com noções de experimentação**. Editora da UFSC, Florianópolis, 2007.
2. BARBETA, P.A.; REIS, M.M.; BORNIA, A.C. **Estatística para Cursos de Engenharia e Informática**. São Paulo, Atlas, 2010.
3. BUSSAB, W.O. ; P.A. MORETIN, **Estatística Básica**, 5ª edição. Editora Saraiva, 2002.
4. MAGALHÃES, M.N.; LIMA, A.C. P de. **Noções de Probabilidade e Estatística**. 6ª ed. São Paulo: EDUSP, 2007.