Escola Superior de Agricultura
"Luiz de Queiroz"
Universidade de São Paulo

LCE0130 – Cálculo Diferencial e Integral

Profa. Dra. Andreia Adami
deiaadami@terra.com.br

Limite

Limites infinitos: $resultado\ é +\infty\ ou -\infty$

Quando no cálculo do limite de uma função *f(x)* o resultado do limite (L) cresce (ou decresce) ilimitadamente, damos a ele o nome de limite infinito.

Limite

São limites infinitos:

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a-} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to a+} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to a-} f(x)=-\infty$$

Limite

São limites infinitos, no infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

Limite

Propriedades:

Se $\lim_{x \to a} h(x) = +\infty, \lim_{x \to a} w(x) = -\infty,$

$\lim_{x \to a} g(x) = c,$ *então:*

i) $\lim_{x \to a} [h(x) + g(x)] = +\infty$ *e,*

$$\lim_{x \to a} [w(x) + g(x)] = -\infty$$

Limite

Propriedades:

Se $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a} w(x) = -\infty$,

$\lim_{x\to a} g(x) = c$, *então:*

ii) Se c> 0

$$\lim_{x\to a}[h(x) * g(x)] = +\infty \text{ e,}$$

$$\lim_{x\to a}[w(x) * g(x)] = -\infty$$

Limite

Propriedades:

Se $\lim\limits_{x \to a} h(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} w(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, *então:*

iii) Se c < 0

$$\lim_{x \to a} [h(x) * g(x)] = -\infty \text{ e,}$$

$$\lim_{x \to a} [w(x) * g(x)] = +\infty$$

Limite

Propriedades:

Se $\lim\limits_{x \to a} h(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} w(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, *então:*

iv) $\lim\limits_{x \to a} \left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \left[\frac{g(x)}{w(x)}\right] = 0$

Limite

Propriedade 2

Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *e,* $\lim_{x \to a} g(x) = c$*, então:*

i) Para c >0 e f(x) > 0:

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = +\infty$$

ii) Para c >0 e f(x) < 0:

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = -\infty$$

Limite

Propriedade 2

Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *e,* $\lim_{x \to a} g(x) = c$, *então:*

iii) Para c <0 e f(x) > 0:

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = -\infty$$

iv Para c <0 e f(x) < 0:

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = +\infty$$

Limite

Exemplo:

Calcular o limite: $$\lim_{x \to 2} \left[\frac{3}{(x-2)^2} \right]$$

Limite

Exemplo:

Calcular o limite: $\lim_{x \to 2} \left[\frac{3}{(x-2)^2} \right] = \frac{3}{0}$

Limite

Exemplo:

Notar que $\lim_{x \to 2} g(x) = 3$, ou seja, c>0.

O próximo passo, é avaliar o comportamento da função do denominador, no caso, *f(x)*. Quando ela se aproxima de dois, pela direita (por valores maiores que 2 - (*f(x)>0)* ou pela esquerda (valores menores que 2 - (*f(x)>*0),

Fazer o gráfico:

Limite

Exemplo:

Temos que:

$$\lim_{x\to 2}(x-2)^2 = \frac{3}{0} = +\infty$$

Limite

Exercício: Calcular o limite:

$$\lim_{x \to 3+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}^{2} =$$

Limite

Exercício: Como f(x) >0 quando x $\rightarrow$ *3*$^{+}$ temos que:

$$\lim_{x \to 3+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{14}{0} = +\infty$$

Limite

Exercício: Calcule o limite e verifique se ele existe.

$$\lim_{x \to 3-} \frac{4x^2}{9 - x^2}$$

$$\lim_{x \to 3+} \frac{4x^2}{9 - x^2}$$

Assíntotas

Definição:

A reta *y=b* é uma assíntota horizontal ao gráfico da função *y=f(x)* se pelo menos uma das seguintes afirmações é verdadeira:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{b} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \text{b}$$

Ou seja, quando o limite no infinito for uma constante

Assíntotas

Definição:

A reta *x=a* é uma assíntota vertical ao gráfico da função *y=f(x)* se pelo menos uma das seguintes afirmações é verdadeira:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad -\infty$$

$$\lim_{x \to a-} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad -\infty$$

Assíntotas

Exemplo:

Para a função a seguir achar as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função *f*, se houverem, e esboçar o gráfico:

$$f(x) = \frac{5x}{2x-1}$$

Assíntotas

Exemplo:

Primeiro passo: Determinar o domínio da função para descobrir se há um valor candidato para ser uma assíntota vertical

$$Df = \{x \in R / \ 2x - 1 \neq 0\}$$

Assíntotas

Exemplo:

Logo, a reta vertical x=1/2 é uma candidata a assíntota vertical. Para confirmar, precisamos verificar se pelo menos um dos limites laterais, $x \to \frac{1}{2}^{+}$ ou $x \to \frac{1}{2}^{-}$, tem que ser um limite infinito, ou seja, seu resultado deve ser $+\infty$ ou $-\infty$

Fazer o gráfico

Assíntotas

Exemplo:

Segundo passo: Verificar a existência de assíntotas horizontais calculando os limites no infinito, $x \to +\infty \; ou \; x \to -\infty$.

Se o resultado desses limites for uma constante b, temos que a reta *y=b* é uma assíntota vertical

Assíntotas

Exemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{2x-1} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Como temos uma indeterminação, temos que dividir todos os termos da equação pelo *x* de maior potência

Assíntotas

Exemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}=$$

Assíntotas

Exemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{2-\frac{1}{x}}=\frac{5}{2}$$

Logo, 5/2 é uma assíntota horizontal à direita, $x \to +\infty$

Assíntotas

Exemplo:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x}{2x-1} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

Como temos uma indeterminação, temos que dividir todos os termos da equação pelo *x* de maior potência

Assíntotas

Exemplo:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{5x}{x}}{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}} =$$

Assíntotas

Exemplo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5x}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{2-\frac{1}{x}}=\frac{5}{2}$$

Logo, 5/2 também é uma assíntota horizontal à esquerda, $x\to-\infty$

Assíntotas

Exemplo:

Terceiro passo: Fazer o gráfico da função $f(x) = \frac{5x}{2x-1}$.

Vamos juntar as informações dos passos 1 e 2 e acrescentar as informações de interceptos da função:

Assíntotas

Exemplo:

Intercepto *x*: qual o valor de *x* quando a *f(x)*=0?

$$f(x) = \frac{5x}{2x-1} \rightarrow 0 = \frac{5x}{2x-1} \rightarrow 0 = 5x \rightarrow x = 0.$$

Logo, quando *x=0*, *y=0*, a função passa na origem dos eixos.

Assíntotas

Exercícios: para as funções a seguir encontre as assíntotas e esboce seu gráfico*:*

a) $f(x) = \frac{5x}{2x-1}$

b) $f(x) = \frac{2-3x}{3+5x}$

c) $f(x) = \frac{-3}{(x+2)^4}$

d) $f(x) = \frac{2x^2}{9-x^2}$

e) $f(x) = \frac{2x^2+1}{2x^2-3x}$

Assíntotas

Exercício: O custo de remover x% de resíduos tóxicos de um aterro é dado por:

$$C(x) = \frac{0{,}8x}{100 - x}$$ para $0<x<100$

a) Calcule $\lim_{x \to 100-} C(x)$

b) Interprete o resultado obtido