Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"
Departamento de Ciências Exatas
LCE 0120 - Cálculo I
Exercícios Limites: Infinitos, no infinito, fundamentais, assíntotas e continuidade

1. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$

(b) $\lim_{x\to\infty} (2x^4 - 3x^3 + x + 6)$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{25x-2}{16x-3}$

(d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}$

(e) $\lim_{x\to\infty} (2x^5 - 3x^2 + 6)$

(f) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+1}{2x^2-5x}$

(g) $\lim_{x\to\infty} x^4$

(h) $\lim_{x\to-\infty} (2x^5 - 3x^2 + 6)$

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^2+3}$

(j) $\lim_{x\to-\infty} x^4$

(k) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4-3x^2+1}{5x^2+2x-1}$

(l) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x+1}{x^3-x^2+x-1}$

(m) $\lim_{x\to\infty} 3x^5$

(n) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^4-3x^2+1}{5x^2+2x-1}$

(o) $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x+1}{2x^2+5x-1}$

(p) $\lim_{x\to-\infty} 3x^5$

(q) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^3+2x^2+5}{x+1}$

(r) $\lim_{x\to\infty} \frac{1-2x^2}{3-4x}$

(s) $\lim_{x\to\infty} e^x$

(t) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x-3}$

(u) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-2x^2}{3-4x}$

(v) $\lim_{x\to-\infty} e^x$

(w) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x-3}$

2. Calcule os limites:

(a) $\lim_{x\to3} \frac{8x}{(x-3)^2}$

(b) $\lim_{x\to2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

(c) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$

(d) $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}+x)$

(e) $\lim_{x\to3} \frac{4x^2}{9-x^2}$

(f) $\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{4+3x^2}}{5x}$

(g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-x^2}{3x+5}$

(h) $\lim_{x\to4} \frac{x}{x-4}$

(i) $\lim_{x\to+\infty} (5x^2-3x)$

(j) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1}$

(k) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}}{x}$

(l) $\lim_{x\to-1^+} \left(\frac{3}{x+1} - \frac{5}{x^2-1}\right)$

(m) $\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^3-15x^2}{13x}$

3. Nos exercícios abaixo, ache as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de cada função e trace o gráfico:

(a) $f(x) = \frac{5x}{3x-1}$

(b) $f(x) = \frac{2-3x}{3+5x}$

(c) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{2x^2+1}}$

(d) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$

(e) $f(x) = \frac{-3}{(x+2)^2}$

(f) $f(x) = \frac{2x^2}{9-x^2}$

(g) $f(x) = \frac{2x^2+1}{2x^2-3x}$

4. Usando o primeiro limite fundamental, calcule os limites abaixo:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(8x)}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin(x)-\sin(2x)}$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin(x)}{3x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{\sin(2x)}$

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x/3)}{x^2}$

(f) $\lim_{x\to a} \dfrac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}$

(g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(3x)}{x\sin(2x)}$

(h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}}$

(i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sin(1-x)}{1-x^2}$

(j) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x^2)}{x^2+x^3}$

(k) $\lim_{x\to 0} x\cot(x)$

(l) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan(2x)}{\sin(3x)}$

5. Usando o segundo limite fundamental, calcule os limites abaixo:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

(c) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{x}$

(d) $\lim_{x\to -1} (2+x)^{\frac{2}{x^2-1}}$

(e) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

(f) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\frac{1}{x}}{1+x}\right)^{x}$

(g) $\lim_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{x+3}{x}}$

Dica (g): $\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$

6. A equação de Michaelis-Menten é usada para modelar a velocidade de uma reação química em função da concentração de substrato. Na agricultura, muitas vezes é utilizada para descrever a velocidade de absorção de um nutriente pela planta em função da concentração do nutriente no solo. A equação de Michaelis-Menten é dada por

$$V(x) = \frac{vx}{k+x}, \quad x \geq 0$$

em que $V(x)$ é a velocidade de absorção, x é a concentração do nutriente na solução presente no solo e v e k são parâmetros positivos. Considere $v = 5$ M/s e $k = 10$ M.

(a) Com o auxílio de limites, determine qual é a velocidade de reação quando a concentração de nutriente tende a zero;

(b) Qual o comportamento limite da função quando $x \to +\infty$?

(c) Desenhe o gráfico da função e indique, com base no comportamento limite da função no item (b), qual o nome que poderíamos atribuir ao parâmetro v?

7. A equação de Mitscherlich (1909) é amplamente utilizada para modelar a produtividade das safras em função da adubação, sendo expressa por

$$y(x) = A(1-e^{-cx}), \quad x \geq 0$$

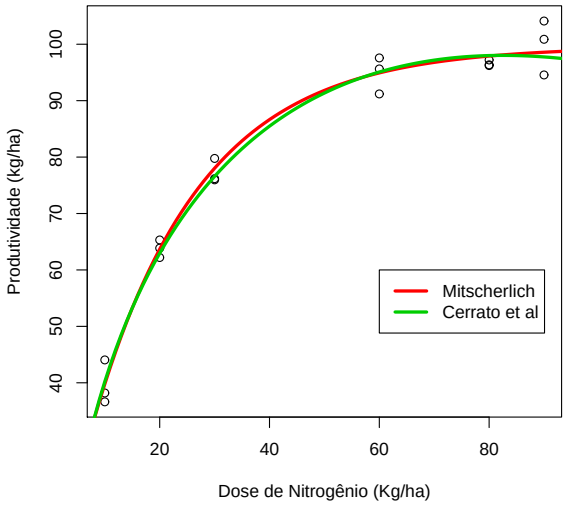
em que $y(x)$ é a produtividade obtida com a dose de adubo x, A é o valor máximo que a produção pode atingir e c é um parâmetro positivo.

Mas, de acordo com Cerrato & Blackmer (1990), muitos agrônomos preferem utilizar o modelo abaixo como alternativa para a equação de Mitscherlich:

$$g(x) = a + bx + c\sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

em que $g(x)$ é a produtividade obtida com a dose de adubo x e a, b e c são parâmetros reais.

Suponha que, após a realização de um experimento de adubação, obteve-se o seguinte resultado:



$$y(x) = 99,59(1 - e^{-0,051x}) \quad \text{e} \quad g(x) = -38,07 - 1,65x + 29,97\sqrt{x}.$$

(a) Encontre os valores limites para as funções $y(x)$ e $g(x)$ quando as doses são insignificantes, ou seja, tendem a zero.

(b) Com base no resultado encontrado no item (a), compare os modelos sob o ponto de vista agronômico.

(c) O que acontece com os valores das funções $y(x)$ e $g(x)$ se tomarmos dose arbitrariamente grandes?

(d) Com base no resultado encontrado no item (c), compare os modelos sob o ponto de vista agronômico.

8. Um ensaio de dose-resposta é conduzido para avaliar a eficácia de um novo pesticida sobre uma população de insetos que causa prejuízo no campo. O estudo conclui que a probabilidade de um inseto morrer logo após a aplicação do inseticida é de

$$p(x) = \frac{1}{1 + e^{8-0,05x}}, \tag{1}$$

em que $x \geq 0$ é a dose ministrada, em μg.

(a) Desenhe o gráfico da função com o auxílio de uma tabela de valores (considere x indo de 0 a 300 μg).

(b) Com o auxílio dos limites, estude a probabilidade de sucesso $p(x)$ quando a dose é excessiva. Qual é o significado biológico do resultado?

(c) Qual é o valor limite para a probabilidade de sucesso $p(x)$ quando a dose aplicada é insignificante, ou seja, quase nula? Qual é o significado biológico para o valor encontrado?

9. Determine k tal que a seguinte função seja contínua em qualquer intervalo:

$$f(x) = \begin{cases} kx, 0 \leq x < 2 \\ 3x^2, 2 \leq x \end{cases}$$

10. Verifique se a função dada é contínua para o valor especificado de x:

(a) $f(x) = 5x^2 - 6x + 1$ em $x = 2$

(b) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ em $x = 1$

(c) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-6}$ em $x = 2$

(d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ em $x = 4$

(e) $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ para } x \leq 2 \\ 2, \text{ para } x > 2 \end{cases}$ em $x = 2$

(f) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, \text{ para } x \leq 3 \\ 2x+4, \text{ para } x > 3 \end{cases}$ em $x = 3$

(g) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, \text{ para } x \leq -1 \\ x^2-3, \text{ para } x > -1 \end{cases}$ em $x = -1$

11. Suponha que a temperatura do ar é 30^oF. Nesse caso, a sensação térmica (em ^{o}F) para uma velocidade do vento v (em minhas por hora) é dada por

$$W(v) = \begin{cases} 30, \text{ para } 0 \leq x \leq 4 \\ 1,25v - 18,67\sqrt{v} + 62,3, \text{ para } 4 < v < 45 \\ -7, \text{ para } v \geq 45 \end{cases}$$

(a) Qual é a sensação térmica para $v = 20$ milhas por horas? E para $v = 50$ milhas por horas?

(b) Que velocidade do vento produz uma sensação térmica de 0^oF?

(c) A função sensação térmica $W(v)$ é contínua em $v = 4$? E em $v = 45$?

12. Se uma esfera oca de raio R é carregada com uma unidade de eletricidade estática, a intensidade do campo elétrico $E(x)$ em um ponto P situado a uma distância de x

unidade do centro da esfera é dada por:

$$E(v) = \begin{cases} 0, \text{ para } 0 < x < R \\ \frac{1}{2x^2}, \text{ para } x = R \\ \frac{1}{x^2}, \text{ para } x > R \end{cases}$$

Faça um gráfico de $E(x)$. A função é contínua para $x > 0$?

Respostas

1. (a) 0 (e) $+\infty$ (i) 0 (m) $+\infty$ (q) $-\infty$ (u) $-\infty$

(b) $+\infty$ (f) $\frac{1}{2}$ (j) $+\infty$ (n) $+\infty$ (r) $+\infty$ (v) 0

(c) $\frac{25}{16}$ (g) $+\infty$ (k) $+\infty$ (o) 0 (s) $+\infty$

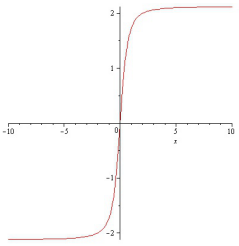
(d) 0 (h) $-\infty$ (l) 0 (p) $-\infty$ (t) 2 (w) 2

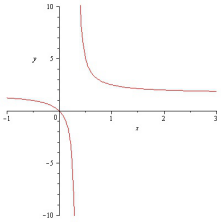
2. (a) $+\infty$ (d) $+\infty$ (g) $-\infty$ (j) $+\infty$ (m) $+\infty$

(b) $+\infty$ (e) $\nexists$ (h) $\nexists$ (k) $\nexists$

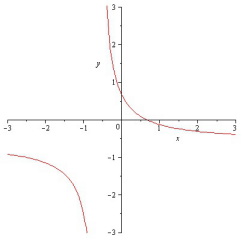
(c) 1 (f) $+\infty$ (i) $+\infty$ (l) $+\infty$

3. (a) A.V.: $x = 1/3$A.H.: $y = 5/3$



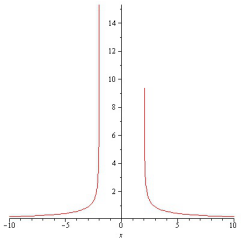


(b) A.V.: $x = -3/5$, A.H.: $y = -3/5$

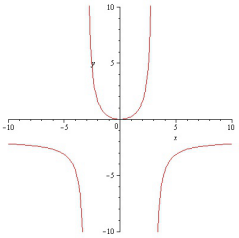


(c) A.V.: $\nexists$, A.H.: $y = -2$ e $y = 2$

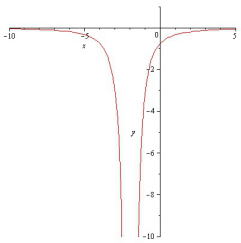
(d) A.V.: $x = -2$ e $x = 2$, A.H.: $y = 0$



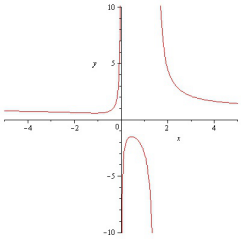
(e) A.V.: $x = -2$, A.H.: $y = 0$



(g) A.V.: $x = 0$ e $x = 3/2$, A.H.: $y = 1$



(f) A.V.: $x = -3$ e $x = 3$, A.H.: $y = -2$



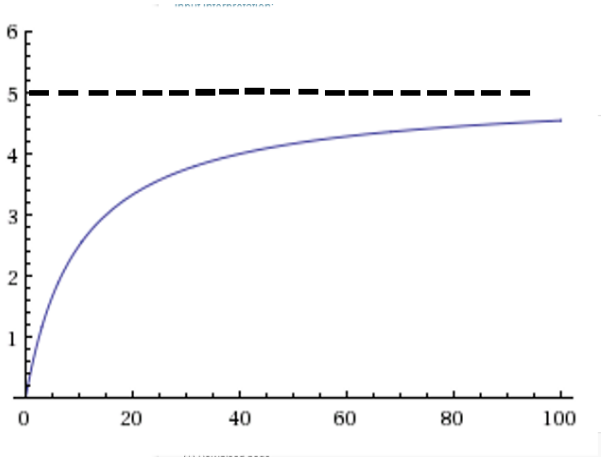
4. (a) 8 (d) $\frac{7}{2}$ (g) 0 (j) 3

(b) -1 (e) $\frac{1}{9}$ (h) $\nexists$ (k) 1

(c) $\frac{2}{3}$ (f) $\cos(a)$ (i) $\frac{1}{2}$ (l) $\frac{2}{3}$

5. (a) e^3 (c) 1 (e) e^{-1} (g) e^6

(b) e^{-1} (d) e^{-1} (f) 0



6. (a) Devemos calcular o limite lateral à direita de $V(x)$ quando x tende ao zero:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{vx}{x+k} = \lim_{x\to 0^+} \frac{5x}{x+10} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} 5x}{\lim\limits_{x\to 0^+} (x+10)} = \frac{0}{10} = 0.$$

(b) Devemos calcular o limite de $V(x)$ quando x tende ao infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{vx}{x+k} = ?$$

Para realizar tal tarefa, dividiremos o numerador e o denominador da função racional pela potência de maior grau.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{v}{\left(1+\frac{k}{x}\right)} = \frac{v}{1} = v.$$

No caso de $v = 5$ e $k = 10$, temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{\left(1+\frac{10}{x}\right)} = \frac{5}{1} = 5\,\mathrm{M/s}.$$

(c) O parâmetro v caracteriza uma assíntota horizontal que representa o valor máximo que a velocidade de reação (ou absorção) $V(x)$ pode atingir.

7. (a) Devemos calcular os limites laterais à direita de $y(x)$ e $g(x)$ quando x tende ao zero:

$$\lim_{x\to0^+} y(x) = \lim_{x\to0^+} A(1-e^{-cx}) = A\left[1 - \lim_{x\to0^+} e^{-cx}\right] = A(1-e^0) = 0.$$

Assim, $y(x) \to 0$ quando $x \to 0^+$. Por outro lado,

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} (a+bx+c\sqrt{x}) = a+b\lim_{x\to0^+} x + c\sqrt{\lim_{x\to0^+} x} = a.$$

Dessa maneira, $g(x) \to a = -38,07$ quando $x \to 0^+$.

(b) O modelo de Mitscherlich indica que não há produção se a dose é insignificante. Enquanto isso, o modelo descrito por Cerrato & Backmer resulta em uma produtividade negativa para doses desprezíveis, o que não possui sentido prático.

(c) Devemos calcular os limites de $y(x)$ e $g(x)$ quando x tende ao infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} A(1-e^{-cx}) = A\left[1 - \lim_{x\to+\infty} e^{-cx}\right] = A(1-e^{-\infty}) = A.$$

Assim, $y(x) \to A = 99,59$ quando $x \to +\infty$. Por outro lado,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (a+bx+c\sqrt{x}) = a+b\lim_{x\to+\infty} x + c\sqrt{\lim_{x\to+\infty} x}.$$

Ou seja,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -38,07 - 1,65\lim_{x\to+\infty} x + 29,97\sqrt{\lim_{x\to+\infty} x} = -\infty+\infty \text{ (indeterminado)}.$$

Por meio de racionalização, temos que

$$\lim_{x\to+\infty}(29,97\sqrt{x}-1,65x) = \lim_{x\to+\infty}(29,97\sqrt{x}-1,65x)\times\frac{(29,97\sqrt{x}+1,65x)}{(29,97\sqrt{x}+1,65x)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(898,20x-2,72x^2)}{(29,97\sqrt{x}+1,65x)}. \qquad (2)$$

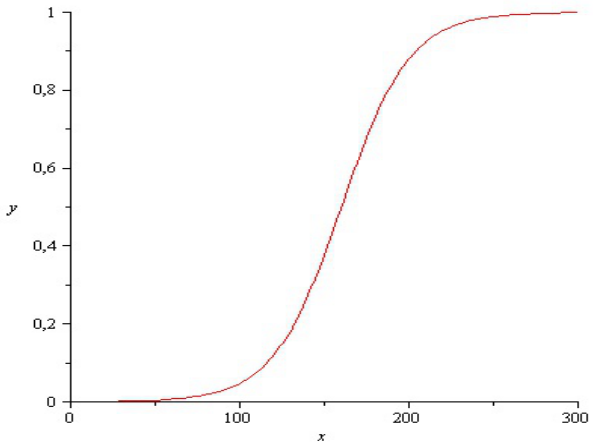
Agora, devemos dividir o numerador e o denominador pela potência de maior grau:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{898,20}{x}-2,72\right)}{\left(\frac{29,97}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1,65}{x}\right)} = \frac{-2,72}{0} = -\infty. \qquad (3)$$

Dessa maneira, $g(x)\to-\infty$ se $x\to+\infty$.

(d) No modelo de Mitscherlich a produtividade caminha para um valor máximo à medida que a dose aumenta. Por outro lado, no modelo descrito por Cerrato & Blackmer a produtividade atinge valores arbitrariamente grandes e negativos, o que é absurdo sob o ponto de vista agronômico. No entanto, para escala de doses utilizada no experimento, as duas funções descrevem bem a relação.

8. (a)



(b) Devemos calcular o limite de $p(x)$ quando x tende ao infinito:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\exp(8-0,05x)} = \frac{1}{1+\exp\left(\lim\limits_{x\to+\infty}8-0,05x\right)} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = 1.$$

O significado biológico desse resultado é o seguinte: a probabilidade do inseto morrer é de 1 (a morte é certa) se tomarmos uma dose suficientemente grande.

(c) Uma dose insignificante é uma dose muito pequena (tão pequena quanto quisermos), mas ainda maior que zero. Então devemos calcular o limite lateral à direita da função quando x tende a zero.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+\exp(8-0,05x)} = \frac{1}{1+\exp\left(\lim\limits_{x\to0^+}8-0,05x\right)} = \frac{1}{1+e^{8}} = 0,0003353501.$$

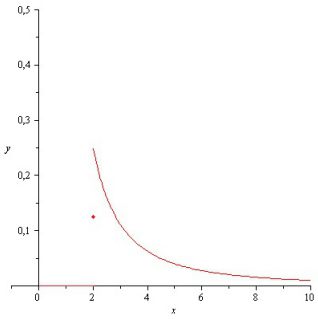
O significado biológico por trás desse resultado é o seguinte: a probabilidade do inseto que recebeu dose nula morrer durante o período de avaliação é praticamente zero $(0,03\%)$.

9. $k = 6$

10. (a) contínua (c) não contínua (e) não contínua (g) contínua
(b) contínua (d) não contínua (f) contínua

11. (a) 3,8; -7 (b) 25 milhas por hora (c) contínua

12.



A função é contínua somente para $x > R$, portanto, no intervalo aberto $(0, \infty)$ a função não é contínua.