1. Encontre a solução da seguinte E.D.O:

$$\frac{dy}{dt} = -ky \quad \text{onde } k \text{ é uma constante}$$

Solução:

$$\frac{dy}{dt} = -ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = -k.dt \Rightarrow$$

Integrando a equação de ambos os lados, obtemos:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -k.dt \Rightarrow \ln|y| = -kt + C$$

Elevando ambos os termos da equação ao número de Euler, obtemos:

$$e^{\ln|y|} = e^{-kt+C} \Rightarrow |y| = e^{-kt+C}$$ No entanto, só $\boxed{y = e^{-kt+C}}$ é solução

2. Encontre a solução da seguinte E.D.O.

$$y' = 1 + y^2 \quad \text{Como } \frac{dy}{dx} = y', \text{ então:}$$

$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$. Integrando ambos os lados da equação, obtemos

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx \Rightarrow \tan^{-1} y = x + C \therefore \boxed{y = \tan(x+C)}$$

3. Encontre a solução da seguinte E.D.O:

$$y' + p(x).y = 0$$

Solução

$$\frac{dy}{dx} + p(x).y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x).y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)dx \Rightarrow$$

Integrando ambos os lados da equação, obtemos:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -p(x).dx \Rightarrow \ln|y| = \int -p(x)dx + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\int -p(x)dx + C} \Rightarrow |y| = e^{\int -p(x)dx + C}$$

No entanto, só $\boxed{y = e^{\int p(x)dx + C}}$ é solução

---

4. Encontre a solução geral da seguinte E.D.O: $y' + ky = e^{+(1-k)t}$

Trata-se de uma E.D.O linear de 1ª ordem não-homogênea.

A solução geral da E.D.O não-homogênea é dada por:

$$y_{NH} = y_H + y_{PNH}$$

onde y_H é a solução geral da E.D.O. homogênea associada e y_{PNH} é uma solução particular da E.D.O não-homogênea.

A E.D.O homogênea associada é dada por:

$$y' + ky = 0$$

A solução dessa E.D.O é do tipo: $y = C.e^{pt}$, $y' = Cpe^{pt}$

$$Cpe^{pt} + kCe^{pt} = 0 \Rightarrow C.e^{pt}(p+k) = 0$$

$\boxed{C = 0}$ -> Solução trivial $\boxed{p+k=0}$ -> Solução não-trivial

A solução do polinômio característico é dada por: $p = -k$. Logo:

$\boxed{y = Ce^{-kt}}$ -> Solução geral da E.D.O. homogênea associada.

Para achar a solução particular da E.D.O não-homogênea, podemos utilizar o método dos coeficientes a determinar. Escolhemos uma função do tipo $e^{\alpha t}$. Dessa forma:

$$\alpha e^{\alpha t} + k.e^{\alpha t} = e^{(1-k)t} \Rightarrow e^{\alpha t}(\alpha + k) = e^{(1-k).t}$$

$\boxed{\alpha = (1-k)}$ $\therefore$ $y_{PNH} = e^{(1-k)t}$

A solução geral, dessa forma, é $\boxed{y_{NH} = C.e^{-kt} + e^{(1-k).t}}$

5. Resolva a equação $y''-4y+4y=e^{2t}.\cos t$. ~~[illegible]~~

Solução: A equação homogênea associada ao problema é dada por:

$$y''-4y'+4y=0$$

A solução dessa E.D.O é do tipo: $y=C.e^{pt}$ $\therefore$ $y'=C.p.e^{pt}$, $y''=Cp^2e^{pt}$

Substituindo y e suas derivadas na equação homogênea, temos:

$$Cp^2e^{pt}+(-4.C.p.e^{pt})+4(C.e^{pt})=0$$

$C.e^{pt}(p^2-4p+4)=0$. Como $e^{pt}\neq 0$, então:

$\boxed{C=0}$ → Solução trivial

$\boxed{p^2-4p+4=0}$ → Solução não-trivial
↳ polinômio característico

As soluções do polinômio característico são:

$$P_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4.4}}{2}=2$$

ou seja, temos um caso de raíz dupla. Sendo assim, a solução geral da E.D.O homogênea é dada por:

$$\boxed{y_H=y_1+y_2=y_1+\frac{d}{dp}(y_1)=C_1e^{2t}+C_2.t.e^{2t}}$$

Para achar a solução da equação não-homogênea, podemos utilizar o método de Lagrange. Para isso, primeiro, devemos calcular o Wronskiano da E.D.O não-homogênea. Como soluções particulares da E.D.O homogênea associada, podemos tomar:

$y_{1PH}=e^{2t}$ e $y_{2PH}=t.e^{2t}$. Portanto,

$$W(y_{1PH},y_{2PH})=\begin{vmatrix} e^{2t} & t.e^{2t} \\ 2e^{2t} & e^{2t}+t.2e^{2t}\end{vmatrix}=e^{2t}(e^{2t}+t.2.e^{2t})-t.e^{2t}.2.e^{2t}$$

$$W(y_{1PH},y_{2PH})=e^{4t}+t.2.e^{4t}-2t.e^{4t}=e^{4t}\ \text{[illegible]}$$

$$\boxed{W(y_{1PH},y_{2PH})=e^{4t}}$$

Assim, a solução da E.D.O não-homogênea será dada por:

$$y = y_1 \cdot \int \frac{-y_2 \cdot (e^{2t} \cdot \cos t \cdot (t+1))}{e^{4t}} dt + y_2 \int \frac{y_1 \cdot (e^{2t} \cdot \cos t \cdot (t+1))}{e^{4t}} dt =$$

$$y = e^{2t} \int \frac{-t \cdot e^{2t}(e^{2t} \cdot \cos t \cdot (t+1))}{e^{4t}} dt + t \cdot e^{2t} \int \frac{e^{2t}(e^{2t} \cdot \cos t \cdot (t+1))}{e^{4t}} dt =$$

$$y = e^{2t} \underbrace{\int \frac{-t \cdot \cancel{e^{4t}} \cdot \cos t \cdot (t+1)}{\cancel{e^{4t}}} dt}_{\mathrm{I}} + t \cdot e^{2t} \underbrace{\int \frac{\cancel{e^{4t}} \cdot \cos t \cdot (t+1)}{\cancel{e^{4t}}} dt}_{\mathrm{II}} =$$

I $\rightarrow$ $\int \cos t \cdot (-t^2 - t)\, dt = \underbrace{\int -t^2 \cdot \cos t\, dt}_{\mathrm{III}} + \underbrace{\int -t \cdot \cos t\, dt}_{\mathrm{IV}}$

III $\rightarrow$ $\int -t^2 \cdot \cos t\, dt = \left[-t^2 \cdot \sin t\right] - \int (-2t \cdot \sin t)\, dt = \left[-t^2 \cdot \sin t\right] - \Big\{\left[2t \cdot \cos t\right] -$

$\int 2 \cdot \cos t\, dt = \left[-t^2 \sin t\right] - \Big\{\left[2t \cdot \cos t\right] - \left[2 \sin t\right]\Big\} + C_1 =$

$= -t^2 \cdot \sin t - 2t \cdot \cos t + 2 \sin t + C_1$

IV $\rightarrow$ $\int -t \cdot \cos t\, dt = \left[-t \cdot \sin t\right] - \int (-\sin t)\, dt = \left[-t \cdot \sin t\right] - \left[\cos t\right] + C_2 =$

$-t \cdot \sin t - \cos t + C_2$

I = III + IV $= -t^2 \cdot \sin t - 2t \cdot \cos t + 2 \sin t + C_1 - t \cdot \sin t - \cos t + C_2$

II $\rightarrow$ $\int \cos t \cdot (t+1)\, dt = \underbrace{\int t \cdot \cos t\, dt}_{\mathrm{V}} + \underbrace{\int \cos t\, dt}_{\mathrm{VI}}$

V $\rightarrow$ $\int t \cdot \cos t = t \cdot \sin t - \int \sin t\, dt = t \cdot \sin t + \cos t + C_3$

VI $\rightarrow$ $\int \cos t\, dt = \sin t + C_4$

$(\mathrm{II}) = (\mathrm{V}) + (\mathrm{VI}) = \sin t + C_4 + t.\sin t + \cos t + C_3$

$$y = e^{2t}\left(-t^2.\sin t + t(-2\cos t - \sin t) + 2\sin t - \cos t + C_1 + C_2\right) + t.e^{2t}(\sin t + t.\sin t + \cos t + C_3 + C_4)$$

$$y = e^{2t}(-t^2.\sin t + t(-2\cos t - \sin t) + 2\sin t - \cos t + K_1) + t.e^{2t}(t.\sin t + \sin t + \cos t + K_2)$$

$$y = -t^2.e^{2t}.\sin t + 2t.e^{2t}\cos t - t.e^{2t}\sin t + 2e^{2t}.\sin t - e^{2t}.\cos t + K_1.e^{2t} + t^2 e^{2t}.\sin t + t.e^{2t}.\sin t + t.e^{2t}.\cos t + K_2 t.e^{2t}$$

$$\boxed{y = -t.e^{2t}.\cos t + 2e^{2t}.\sin t - e^{2t}.\cos t + K_1.e^{2t} + K_2.t.e^{2t}}$$

↳ solução geral da E.D.O não-homogênea

↳ solução particular da E.D.O não homogênea

↳ solução geral da E.D.O homogênea

---

6. Encontre a solução da seguinte E.D.O:

$$y'' + y = \sin t$$

A E.D.O acima é não-homogênea, logo sua solução é dada por:

$$y_{NH} = y_H + y_{PNH}$$

onde y_H é solução da E.D.O homogênea associada é dada por:

$$y_H = y_1 + y_2$$

A solução y_H é do tipo: $y_H = C.e^{pt}$

$$C.p^2.e^{pt} + C.e^{pt} = 0 \Rightarrow C.e^{pt}(p^2+1) = 0$$

$\boxed{C=0}$ -> Solução trivial

$\boxed{p^2+1=0}$ -> Solução não-trivial

$P_1 = i$ e $P_2 = -i$

Escrevendo P_1 e P_2 na forma complexa genérica, teremos:

$P_1 = \alpha + i\beta$
$P_2 = \alpha - i\beta$ onde $\alpha = 0$ e $\beta = 1$

$$y_H = C_1.e^{(\alpha+i\beta).t} + C_2.e^{(\alpha-i\beta)t} = C_1.e^{\alpha t}.e^{i\beta t} + C_2.e^{\alpha t}.e^{-i\beta t}$$

Para $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, temos uma solução particular da homogênea. Dessa forma:

$$y_{1PH} = \frac{1}{2}.e^{\alpha t}(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}) = \frac{2}{2}.e^{\alpha t}.\cos\beta.t = e^{\alpha t}.\cos\beta t = \cos t$$

Uma outra solução particular pode ser obtida para $C_1 = C_2 = \frac{i}{2}$. Assim.

$$y_{2PH} = \frac{i}{2}e^{\alpha t}(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}) = i.\frac{2}{2}.e^{\alpha t}.\frac{\sin\beta t}{i} = e^{\alpha t}.\sin\beta t = \sin t$$

Pelo princípio da superposição a solução geral da homogênea pode ser obtida pela soma de duas soluções particulares, de tal forma:

$$y_H = C_1.e^{\alpha t}.\cos\beta t + C_2.e^{\alpha t}.\sin\beta t = C_1.\cos t + C_2.\sin t$$

A solução particular da não-homogênea pode ser obtida através do método dos coeficientes a determinar:

$y_{PNH} = (A\sin t + B\cos t).t$, $y'_{PNH} = (A\sin t + B\cos t) + (A\cos t - B\sin t).t$,

7

$y''_{PNH} = A\cos t - B\sin t + A\cos t - B\sin t + (-A\sin t - B\cos t).t$

$y''_{PNH} = 2A\cos t - 2B\sin t + (-A\sin t - B.\cos t).t$

$$2A\cos t - 2B\sin t - \cancel{(A\sin t + B.\cos t).t} + \cancel{A\sin t + B\cos t} = \sin t$$

$$2A\cos t - 2B\sin t = \sin t$$

$$2A = 0 \quad \therefore \quad A = 0$$

e

$$-2B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Assim, $\boxed{y_{PNH} = -\frac{t}{2}.\cos t}$

Solução geral da E.D.O não homogênea, será

$$\boxed{y_{NH} = C_1.\cos t + C_2.\sin t - \frac{t}{2}.\cos t}$$