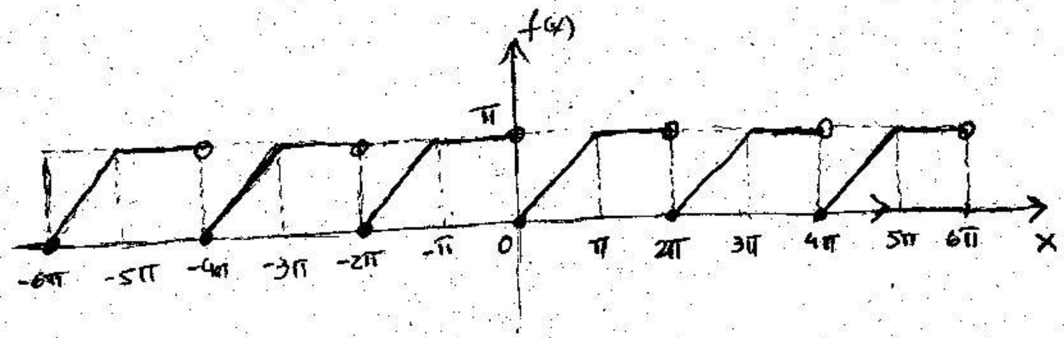
Lista 1 Solução

Questão 1 - Seja $f(x)$ uma função periódica, com período $T = 2\pi$, definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{para } 0 \leq x < \pi; \\ \pi, & \text{para } \pi \leq x < 2\pi; \end{cases}$$

Nessas condições, pede-se:

a) Faça o esboço do gráfico de $f(x)$ no intervalo $-6\pi \leq x < 6\pi$;



b) Calcule a série de Fourier na forma real de $f(x)$;

Solução

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos(n\omega x) + b_n \cdot \sin(n\omega x)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx \quad , \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cdot\cos(n\omega x)\,dx \quad , \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\sin(n\omega x)\,dx$$

$$T = 2\pi \quad \therefore \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \pi\,dx = \frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} + \left[\pi x\right]_{\pi}^{2\pi}\right\} = \frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{\pi^2}{2} - 0\right] + \left[2\pi^2 - \pi^2\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi^2}{2} + \pi^2\right\} = \frac{3}{4}\pi \qquad \boxed{a_0 = \frac{3\pi}{4}}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\left\{\int_0^{\pi} x\cdot\cos(n\omega x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \pi\cdot\cos(n\omega x)\,dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\underbrace{\int_0^{\pi} x\cdot\cos(n\omega x)\,dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \pi\cdot\cos(n\omega x)\,dx}_{\mathrm{II}}\right\}$$

$$\mathrm{I} \rightarrow \int_0^{\pi} x\cdot\cos(n\omega x)\,dx = \left[\frac{x\cdot\sin n\omega x}{n\omega}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(n\omega x)}{n\omega}\,dx = \left[\frac{x\cdot\sin(n\omega x)}{n\omega}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos(n\omega x)}{(n\omega)^2}\right]_0^{\pi}$$

2

$$\text{I} \rightarrow \left[\frac{\pi \cdot \sin(n \cdot 1 \cdot \pi)}{n} - \frac{0 \cdot \sin(n \cdot 1 \cdot 0)}{n}\right] + \left[\frac{\cos(n \cdot 1\pi)}{n^2} - \frac{\cos(n \cdot 1 \cdot 0)}{n^2}\right] =$$

$$\left[0 - 0\right] + \left[\frac{\cos(\pi n)}{n^2} - \frac{\cos(n0)}{n^2}\right] = \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

$$\text{II} \rightarrow \int_{\pi}^{2\pi} \pi \cdot \cos(n\omega x)\,dx = \left[\frac{\pi \cdot \sin(n\omega x)}{n\omega}\right]_{\pi}^{2\pi} = \left[\frac{\pi \cdot \sin(2\pi n)}{n} - \frac{\pi \cdot \sin(\pi n)}{n}\right] = 0$$

$$\therefore \; a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\text{I} + \text{II}\right\} = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{\frac{(-1)^n - 1}{n^2} + 0\right\} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

$\dfrac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \neq 0$ para n ímpar e $\dfrac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = 0$ para n par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; n \geq 1 \;\therefore\; \boxed{a_n = \frac{(-1)^{2n-1} - 1}{\pi (2n-1)^2}}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\underbrace{\int_0^{\pi} x \cdot \sin(n\omega x)\,dx}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \pi \cdot \sin(n\omega x)\,dx}_{\text{II}}\right\} =$$

$$\text{I} \rightarrow \int_0^{\pi} x \cdot \sin(n\omega x)\,dx = \left[\frac{-x \cdot \cos(n\omega x)}{n\omega}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{(-\cos(n\omega x))}{n\omega}\,dx = \left[\frac{-x \cdot \cos(n\omega x)}{n\omega}\right]_0^{\pi} +$$

$$\left[\frac{\sin(n\omega x)}{(n\omega)^2}\right]_0^{\pi} = \left[\frac{-\pi \cos(n\pi)}{n} + \frac{0 \cdot \cos(n\omega \cdot 0)}{n}\right] + \left[0 - 0\right] = \frac{-\pi(-1)^n}{n}$$

$$\text{II} \rightarrow \int_{\pi}^{2\pi} \pi \cdot \sin(n\omega x)\,dx = \left[\frac{-\pi \cos(n\omega x)}{n\omega}\right]_{\pi}^{2\pi} = \left[\frac{-\pi \cdot \cos(2\pi n)}{n} + \frac{\pi \cos(n\pi)}{n}\right] = \frac{-\pi}{n} + \frac{\pi(-1)^n}{n}$$

$$\therefore \; b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\text{I} + \text{II}\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{-\pi(-1)^n}{n} + \frac{\pi(-1)^n}{n} - \frac{\pi}{n}\right\} = -\frac{1}{n} \qquad \boxed{b_n = -\frac{1}{n}}$$

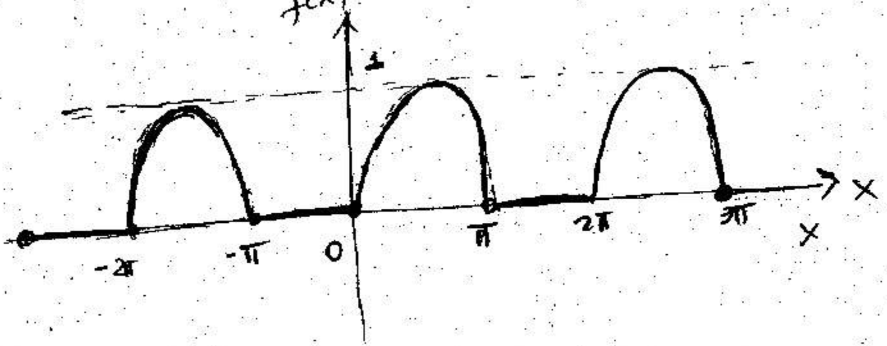
$$\therefore \; \boxed{f(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1} - 1}{\pi (2n-1)^2} \cdot \cos(2n-1)x + \left(-\frac{1}{n}\right) \cdot \sin(nx)}$$

Questão 2 - Seja f(x) uma função periódica, com período $T = 2\pi$, definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } -\pi \leq x < 0; \\ \sin(x), & \text{para } 0 \leq x < \pi; \end{cases}$$

Nessas condições, pede-se:

a) Faça o esboço do gráfico de f(x) no intervalo $-3\pi \leq x < 3\pi$;



b) Calcule a série de Fourier de f(x) na forma complexa.

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{+ik\omega x}, \quad \text{onde} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot e^{-ik\omega x} dx \qquad T = 2\pi \therefore \omega = 1$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{0} 0 \cdot e^{-ikx} dx + \int_{0}^{\pi} \sin(x) \cdot e^{-ikx} dx \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cdot e^{-ikx} dx \quad \text{(I)}$$

$$\text{(I)} \rightarrow \int_0^{\pi} \sin(x) \cdot e^{-ikx} dx = \left[\frac{\sin(x) \cdot e^{-ikx}}{(-ik)} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos(x) \cdot e^{-ikx}}{(-ik)} dx = \left[\frac{\sin(x) \cdot e^{-ikx}}{(-ik)} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos(x) \cdot e^{-ikx}}{-(ik)^2} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{(+\sin x) \cdot e^{-ikx}}{+(ik)^2} dx \Rightarrow$$

$$\int_0^{\pi} (\sin x \cdot e^{-ikx}) dx \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{(ik)^2} \right\} = \left[\frac{\sin(x) \cdot e^{-ikx}}{(-ik)} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos(x) \cdot e^{-ikx}}{-(ik)^2} \right]_0^{\pi} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\pi} \sin x \cdot e^{-ikx} dx = \frac{\cancel{(ik)^2}}{1 + (ik)^2} \cdot \frac{1}{\cancel{(ik)^2}} \left\{ \cancel{\left[\sin(x) \cdot (-ik) \right]_0^{\pi}}^{\,0} + \left[-\cos(x) \cdot e^{-ikx} \right]_0^{\pi} \right\} =$$

$$\frac{1}{1 + (ik)^2} \left\{ -\cos(\pi) \cdot e^{-ik\pi} + \cos(0) \cdot e^{-ik0} \right\} = \frac{1}{1 + (ik)^2} \left\{ 1 - e^{-ik\pi} \right\} = \frac{1}{1 - k^2} \left\{ 1 - [\underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k} - \underbrace{i \sin k\pi}_{0}] \right.$$

$$= \frac{1}{1-k^2} \cdot \left\{ 1 - (-1)^k \right\} \therefore$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{1-k^2} \left[1 - (-1)^k \right] \right\}.$$ Se k é par, $c_k = 0$

Se k é ímpar, $c_k \neq 0$

$$c_{(2k-1)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{1-(2k-1)^2} \left[1 - (-1)^{(2k-1)} \right] \right\} \therefore$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{1-(2k-1)^2} \left[1 - (-1)^{(2k-1)} \right] \right\} \cdot e^{ikx},$$

exceto para $k = 0$ e $k = 1$. onde $k \in \mathbb{Z}$

Questão 3 - Encontre a série de Fourier complexa da função $f(x) = e^x$, definida ~~como~~ no intervalo $-\pi \leq x < \pi$, onde $f(x) = f(x+2\pi)$.

Como $T = 2\pi$, pois $f(x) = f(x+2\pi)$, então $\omega = 1$.

A série de Fourier complexa de $f(x)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{ik\omega x}, \text{ onde}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T f(x) \cdot e^{-ik\omega x} \, dx$$

Solução:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot e^{-ik\omega x} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{+(1-ik\omega)x} \, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(1-ik\omega)x}}{(1-ik\omega)} \right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(1-ik\omega)\pi}}{(1-ik\omega)} - \frac{e^{(1-ik\omega)(-\pi)}}{(1-ik\omega)} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{\pi} \cdot \underbrace{e^{-ik\omega\pi}}_{=\text{I}}}{(1-ik\omega)} - \frac{e^{-\pi} \cdot \underbrace{e^{ik\omega\pi}}_{=\text{II}}}{(1-ik\omega)} \right]$$

$\text{I} \to e^{-ik\omega\pi} = \cos k\omega\pi - i\sin k\omega\pi$. Como $\omega = 1$, então $e^{-ik\omega\pi} = (-1)^k$

(II) $\to e^{ik\omega\pi} = \cos k\omega\pi + i\sin k\omega\pi$. Como $\omega = 1$, então $e^{ik\omega\pi} = (-1)^k$ ∴ (5)

$$c_K = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{\pi}(-1)^k}{(1-ik\omega)} - \frac{e^{-\pi}\cdot(-1)^k}{(1-ik\omega)}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(-1)^k(e^{\pi}-e^{-\pi})}{(1-ik)}\right]\cdot\frac{(1+ik)}{(1+ik)}$$

$$c_K = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(-1)^k\cdot(e^{\pi}-e^{-\pi})\ (1+ik)}{(1+k^2)}\right] = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\cdot\frac{(-1)^k\cdot(1+ik)}{(1+k^2)} = \frac{\sinh\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k(1+ik)}{1+k^2}$$

$\sinh(\pi) \to$ seno hiperbólico

$$\therefore \quad \boxed{f(x) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k\cdot(1+ik)}{1+k^2}\cdot e^{ikx}}$$

Questão 4 - Encontre a solução geral da equação diferencial ordinária $\ddot{y}+\omega^2 y = f(t)$, onde

a) $f(t) = \cos t$, para $\omega = 0.5,\ 1.5,\ 5.0$ e 10.0.

Para evitar confusão na solução abaixo, vou chamar na solução abaixo o termo ω na equação acima de q ∴ $\omega = q = 0.5,\ 1.5,\ 5.0$ e 10.0

Solução: A equação $\ddot{y}+\omega^2 y = f(t)$ é uma equação diferencial ordinária linear a coeficientes constantes de 2ª ordem não homogênea. Portanto, possui uma solução da forma:

$$y(t) = u(t) + v(t)$$

onde $u(t)$ é solução geral da equação homogênea associada e $v(t)$ é uma solução particular da equação não-homogênea. Se $f(t)$ satisfaz as condições de Dirichlet no intervalo de interesse, então a solução da equação não homogênea pode ser obtida na forma de seu desenvolvimento em série de Fourier. Seja, portanto, o desenvolvimento de $f(t)$ em série de Fourier na forma complexa $f(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_K\cdot e^{ik\omega t}$, onde

$c_K = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-i\omega k t}\,dt$. Seja, também, o desenvolvimento de $v(t)$ em série de Fourier dado por $v(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} r_K\cdot e^{ik\omega t}$. Assim, $\dot{v}(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} r_K\cdot e^{ik\omega t}\cdot(ik\omega)$

$\hookrightarrow r_K$ vai depender de K ∴ é uma constante quando se deriva em relação a t.

$\ddot{v}(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} r_K\cdot e^{ik\omega t}(ik\omega)^2$. Como $v(t)$ é solução particular da não-homogênea, então:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_k . e^{ikwt} (ikw)^2 + q^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_k . e^{ikwt} = \sum_{k=\infty}^{+\infty} c_k . e^{ikwt}$$

Agrupando os somatórios acima, temos:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_k . e^{ikwt} \left((ikw)^2 + q^2 \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k . e^{ikwt} \quad \therefore$$

$$r_k . (-k^2 w^2 + q^2) = c_k \quad \Rightarrow \quad r_k = \frac{c_k}{-k^2 w^2 + q^2}$$

Como para $\cos t$, $T = 2\pi$, então $kw = 1$. Logo: $r_k = \dfrac{c_k}{-1^2 + q^2}$

$$V(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r_k . e^{ikwt} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k . \frac{1}{-1^2 + q^2} . e^{ikwt} \quad , \text{ mas}$$

$$\cos(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k . e^{ikwt} \quad , \quad \frac{\cos(t)}{-1^2 + q^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_k . e^{ikwt}}{-1^2 + q^2} \quad \therefore$$

$$\boxed{V(t) = \frac{\cos t}{-1^2 + q^2} = \frac{\cos t}{q^2 - 1}}$$

Para $q = 0.5$, então $V(t) = \dfrac{\cos t}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} =$

$$\frac{\cos t}{\frac{1-4}{4}} = -\frac{4}{3} . \cos t$$

Para $q = 1.5$, então

$$V(t) = \frac{\cos t}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\cos t}{\frac{9}{4} - 1} = \frac{\cos t}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} . \cos t$$

Para $q = 5.0$

$$V(t) = \frac{\cos t}{(5)^2 - 1} = \frac{\cos t}{24}$$

Para $q = 10$

$$V(t) = \frac{\cos t}{10^2 - 1} = \frac{\cos t}{99}$$

A solução da equação homogênea associada é dada por: (7)

$y_H(t) = Ce^{pt}$, $\dot{y}_H(t) = C.p.e^{pt}$, $\ddot{y}(t) = C.p^2.e^{pt}$

$$C.p^2.e^{pt} + q^2.C.e^{pt} = 0$$

$C.e^{pt}(p^2+q^2) = 0$ $\boxed{C=0}$ -> solução trivial $e^{pt} \neq 0$

$\boxed{p^2+q^2=0}$ -> Solução não trivial é dada pela raiz do polinômio característico

$p_1 = qi$ $p_2 = -qi$

Pelo princípio da superposição:

$$y_H(t) = y_1(t) + y_2(t) = C_1.e^{qit} + C_2.e^{-qit}$$

$e^{qi} = \cos qt + i\sin qt$, $e^{-qi} = \cos qt + i\sin qt$. Se considerarmos $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, temos:

$y_{1P} = \frac{1}{2}(\cos qt + i\sin qt) + \frac{1}{2}(\cos qt - i\sin qt) = \cos qt$

Se considerarmos $C_1 = -C_2 = \frac{i}{2}$, temos:

$y_{2P} = \frac{i}{2}(\cos qt + i\sin qt) - \frac{1i}{2}(\cos qt - i\sin qt) = \frac{i\cos qt}{2} + i^2\frac{\sin qt}{2} - \frac{i\cos q}{2}$

$+ \frac{i^2\sin qt}{2} = -\sin qt$

~~A solução particular~~ A soma de duas soluções particulares da homogênea, de acordo com o princípio da superposição, fornece a solução geral da homogênea. Portanto,

$$y_H = y_{1P} + y_{2P} = C_1.\cos qt + C_2.\sin qt$$

Como a ~~solução particular~~ solução geral da não homogênea ~~...~~ é dada pela soma da solução geral da homogênea com a solução particular da não-homogênea, então:

$$\boxed{y_{NH} = y_H + y_{PNH} = C_1 \cdot \cos qt + C_2 \cdot \sin qt + \frac{\cos t}{q^2 - 1}}\ //$$

8

b) $f(t) = \begin{cases} t+\pi, & \text{para } -\pi \leq t < 0 \\ -t+\pi, & \text{para } 0 \leq t < \pi \end{cases}$

Do item anterior, sabemos que a solução geral da homogênea é dada por:

$$y_H = C_1 \cdot \cos qt + C_2 \cdot \sin qt$$

Assim, precisamos encontrar somente a solução particular da não-homogênea. Seja $V(t)$ a solução particular da não-homogênea. O desenvolvimento de $V(t)$ em série de Fourier é dado por: $V(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_k \cdot e^{ik\omega t}$. Do exercício anterior, vimos que se $f(t)$ satisfaz as condições de Dirichlet no intervalo $-\pi \leq t \leq \pi$, então seu desenvolvimento em série de Fourier é dado por: $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{ik\omega t}$. Vimos também que r_k poderá ser escrita em função de c_k: $r_k = \dfrac{c_k}{-k^2\omega^2 + q^2}$. Como $T = 2\pi$, então $\omega = 1$.

logo: $r_k = \dfrac{c_k}{q^2 - k^2}$ Nos resta agora, portanto, determinar os valores de c_k para $f(t)$.

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-ik\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\Bigg[\underbrace{\int_{-\pi}^{0} (t+\pi) \cdot e^{-ik\omega t}\,dt}_{I} + \underbrace{\int_{0}^{\pi} (-t+\pi) \cdot e^{-ik\omega t}\,dt}_{II}\Bigg].$$

$$I \rightarrow \int_{-\pi}^{0} t \cdot e^{-ik\omega t}\,dt + \int_{-\pi}^{0} \pi e^{-ik\omega t}\,dt = \left[\frac{t \cdot e^{-ik\omega t}}{(-ik\omega)}\right]_{-\pi}^{0} - \int \frac{e^{-ik\omega t}}{(-ik\omega)}\,dt + \left[\frac{\pi \cdot e^{-ik\omega t}}{(-ik\omega)}\right]_{-\pi}^{0}$$

$$= \left[\frac{t \cdot e^{-ik\omega t}}{(-ik\omega)}\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{e^{-ik\omega t}}{(-ik\omega)^2}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{\pi \cdot e^{-ik\omega t}}{(-ik\omega)}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{-(-\pi) \cdot e^{-ik\omega(-\pi)}}{(-i \cdot k \cdot \omega)} - \left[\frac{1}{(-ik\omega)^2} - \frac{e^{-ik\omega(-\pi)}}{(-ik\omega)^2}\right] + \left[\frac{\pi}{(-ik\omega)} - \frac{\pi e^{-ik\omega}}{(-ik\omega)}\right]$$

$$= \frac{\pi . e^{ik\pi}}{(-ik)} - \left[\frac{1}{(-ik)^2} - \frac{e^{ik\pi}}{(-ik)^2} \right] + \left[\frac{\pi}{(-ik)} - \frac{\pi . e^{ik\pi}}{(-ik)} \right]$$

$$= \frac{\pi . \cos k\pi}{(-ik)} - \left[\frac{1}{(-ik)^2} - \frac{\cos k\pi}{(-ik)^2} \right] + \left[\frac{\pi}{(-ik)} - \frac{\pi . \cos k\pi}{(-ik)} \right]$$

$$= \frac{-\pi . \cos k\pi}{ik} + \frac{1}{k^2} - \frac{\cos k\pi}{k^2} - \frac{\pi}{ik} + \frac{\pi . \cos k\pi}{ik} = \frac{1-(-1)^k}{k^2} - \frac{\pi}{ik}$$

$$(I) = \frac{1-(-1)^k}{k^2} - \frac{\pi}{ik}$$

$$(II) \to \int_0^{\pi} (-t+\pi) . e^{-ik\omega t} dt = \int_0^{\pi} -t . e^{-ik\omega t} dt + \int_0^{\pi} \pi . e^{-ik\omega t} dt = \left[\frac{-t . e^{-ik\omega t}}{(-ik\omega)} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{(-1) e^{-ik\omega t} dt}{(-ik\omega)}$$

$$+ \left[\frac{\pi . e^{-ik\omega t}}{(-ik\omega)} \right]_0^{\pi} = \left[\frac{-t . e^{-ik\omega t}}{(-ik\omega)} \right]_0^{\pi} - \left[\frac{(-1) . e^{-ik\omega t}}{(-ik\omega)^2} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{\pi . e^{-ik\omega t}}{(-ik\omega)} \right]_0^{\pi} = \left[\frac{-\pi . e^{-ik\pi}}{(-ik)} \right] -$$

$$\left[\frac{(-1) . e^{-ik\pi}}{(-ik)^2} - \frac{(-1)}{(-ik)^2} \right] + \left[\frac{\pi . e^{-ik\pi}}{(-ik)} - \frac{\pi}{(-ik)} \right] = \left[\frac{-\pi . \cos k\pi}{(-ik)} \right] - \left[\frac{(-1) \cos k\pi}{(-ik)^2} - \frac{(-1)}{(-ik)^2} \right] +$$

$$\left[\frac{\pi . \cos k\pi}{(-ik)} - \frac{\pi}{(-ik)} \right] = \frac{-\pi . (-1)^k}{(-ik)} - \left[\frac{(-1)(-1)^k}{(-ik)^2} - \frac{(-1)}{(-ik)^2} \right] + \left[\frac{\pi . (-1)^k}{(-ik)} - \frac{\pi}{(-ik)} \right] =$$

$$\frac{\pi (-1)^k}{ik} - \frac{(-1)^k}{k^2} + \frac{1}{k^2} - \frac{\pi (-1)^k}{ik} + \frac{\pi}{ik} = -\frac{(-1)^k}{k^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{\pi}{ik}$$

$$(II) = \frac{-(-1)^k + 1}{k^2} + \frac{\pi}{ik}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \left[(I) + (II) \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{\pi}{ik} + \frac{\pi}{ik} - \frac{(-1)^k}{k^2} + \frac{1}{k^2} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2 - 2(-1)^k}{k^2} \right]$$

$c_k = \dfrac{1-(-1)^k}{\pi k^2}$, exceto para $k=0$

Para k par, $c_k = 0$

Para k ímpar, $c_k = \dfrac{2}{\pi k^2}$

Para $K = 0$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\underbrace{\int_{-\pi}^{0}(t+\pi)e^{-i0\omega t}\,dt}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{0}^{\pi}(-t+\pi).e^{-i0\omega t}\,dt}_{\text{II}}\right]$$ (10)

$$\text{I} \rightarrow \int_{-\pi}^{0}(t+\pi).dt = \left[\frac{t^2}{2}+\pi t\right]_{-\pi}^{0} = \left(0+0\right) - \left(\frac{\pi^2}{2}-\pi^2\right) = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\text{II} \rightarrow \int_{0}^{\pi}(-t+\pi).dt = \left[-\frac{t^2}{2}+\pi t\right]_{0}^{\pi} = \left(-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2\right) - \left(0+0\right) = \frac{\pi^2}{2}$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\text{I} + \text{II}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2}\right] = \frac{\pi}{2}$$

Assim: $v(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cdot\frac{e^{i(2k-1).t}}{q^2-1}$

Portanto, a solução geral da E.D.O não-homogênea será:

$$\boxed{y_{NH} = C_1.\cos qt + C_2.\sin qt + \frac{\pi}{2} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cdot\frac{e^{i(2k-1).t}}{q^2-1}}$$

Questão 5 - Dada a equação diferencial ordinária $\ddot{x} + \lambda\dot{x} + 4x = 0$, onde λ é uma constante, pede-se:

a) Determine $x(t)$, solução geral da equação diferencial acima, para $\lambda = 0$

Solução: O polinômio característico de $\ddot{x}+\lambda\dot{x}+4x=0$ é $p^2+\lambda p+4=0$ ∴ $p_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-4.4}}{2}$. Assim, se $\lambda=0$, temos:

$p_1 = 2i$ e $p_2 = -2i$. Teremos, portanto, duas soluções:

$y_1 = C_1.e^{2it}$ e $y_2 = C_2.e^{-2it}$. Pelo princípio da superposição, a solução geral será $y(t) = y_1(t)+y_2(t) = C_1.e^{2it} + C_2.e^{-2it}$. Como C_1 e C_2 são duas constantes arbitrárias se formarmos uma solução particular da E.D.O homogênea para $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, teremos:

$$y_{1P}(t) = \frac{1}{2}(\cos 2t + i\sin 2t) + \frac{1}{2}(\cos 2t - i\sin 2t) = \cos 2t$$

Para $-C_1 = +C_2 = -\frac{i}{2}$

$$y_{2P}(t) = -\frac{i}{2}(\cos 2t + i\sin 2t) + \frac{i}{2}(\cos 2t - i\sin 2t) = \sin 2t$$

Pelo princípio da superposição, a solução geral da equação ~~não~~ homogênea pode ser obtida pela soma de duas soluções particulares da homogênea. Portanto,

$$\boxed{y_H = y_{1P} + y_{2P} = C_1 . \cos 2t + C_2 . \sin 2t}$$

b) Determine $x(t)$, solução geral da equação diferencial acima para $\lambda = 5$

Solução: O polinômio característico de $\ddot{x} + \lambda\dot{x} + 4x = 0$ é

$$p^2 + \lambda p + 4 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4.4}}{2}$$, Assim, se $\lambda = 5$, temos:

$p_1 = -1$ e $p_2 = -4$

Como a solução da E.D.O homogênea é do tipo $y = C.e^{pt}$, então:

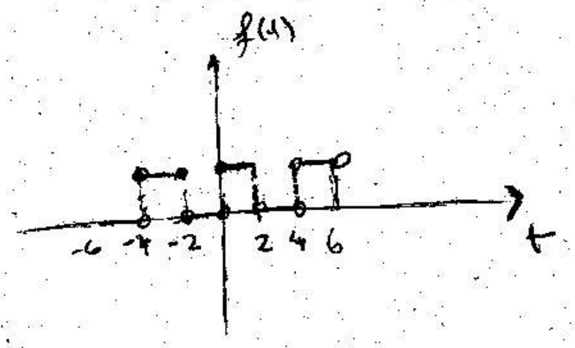
$$\boxed{y_H = C_1 . e^{-1t} + C_2 e^{-4t}}$$

Questão 6 Seja $f(t)$ dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } -2 \leq t < 0; \\ 1, & \text{para } 0 \leq t < 2; \end{cases}$$

com período $T = 4$. Nessas condições, pede-se

a) Faça o esboço do gráfico de $f(t)$ no intervalo $-4 \leq x < 4$;



b) Desenvolva $f(t)$ em série de Fourier na forma real;

Solução:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.\cos k\omega t + b_k.\sin k\omega t$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t).dt \quad , \quad a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t).\cos k\omega t.dt \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t).\sin k\omega t.dt$$

Para $T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$a_0 = \frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{0} 0.dt + \int_0^2 1.dt\right] = \frac{1}{4}\left[t\right]_0^2 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{4}\left[\int_{-2}^{0} 0.\cos k\omega t.dt + \int_0^2 \cos k\omega t\right] = \frac{2}{4}\left[\frac{\sin k\omega t}{k\omega}\right]_0^2 = \left[\frac{1}{2}\sin 2k\omega\right] = \left[\frac{1}{2}\sin k\pi\right] = 0$$

$$b_k = \frac{2}{4}\left[\int_{-2}^{0} 0.\sin k\omega t\,dt + \int_0^2 \sin k\omega t\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos k\frac{\pi}{2}.t}{k\omega}\right]_0^2 = \frac{1}{2k}\left(-\cos k\pi + \cos k\frac{\pi}{2}.0\right) =$$

$$= \frac{2 \cdot 1}{2\pi k}\left(-(-1)^k + 1\right) \Rightarrow b_k = \frac{1-(-1)^k}{\pi k}$$

se k é par, $b_k = 0$

se k é impar, $b_k \neq 0 = \frac{2}{\pi k}$

$$\therefore \boxed{f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)}.\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}.t}$$

c) Determine para que valor a série de Fourier de $f(t)$ converge em $t=-2$, $t=1$ e $t=2$;

Como $f(t)$ satisfaz os critérios de Dirichlet, em $t=-2$ e $t=2$ que são pontos de descontinuidade, $\boxed{f(-2) = f(2) = \frac{1}{2}}$. $\boxed{\text{Em } t=1,\ f(1) = 1}$.

d) Determine os coeficientes de Fourier na forma complexa

Sabendo que a relação entre os coeficientes de Fourier na forma complexa e na forma real é dada por:

$a_0 = c_0$

$a_k = (c_k + c_{-k})$ para $k = 1, 2, \dots$

$b_k = i(c_k - c_{-k})$ para $k = 1, 2, \dots$

Como $a_k = 0$ $c_{-k} = c_k$ e $b_k = i(c_k - c_{-k}) = 2ic_k$ ∴

$c_k = \dfrac{b_k}{2i}$ ou $\boxed{c_k = -\dfrac{b_k i}{2}}$ $\quad b_k = \left[\dfrac{(1)-(-1)^k}{\pi k}\right]$ que só

é diferente de zero quando k é ímpar ∴

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{ik\omega t} =$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{2}{(2k-1)} \cdot e^{i(2k-1)\frac{\pi}{2} \cdot t}}$$