

A Física do Spin - 4300227

2ª lista

1) Mostre que os autovalores de S_y são também $\pm\hbar/2$, e determine seus autovetores, $|y\pm\rangle$, onde $|y\pm\rangle$ representa o autovetor com auto-valor $\pm\hbar/2$.

2) Um elétron se encontra num estado de spin dado por:

$$|\chi\rangle = A \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Determine a constante de normalização A .

b) Ache os valores esperados de S_x , S_y e S_z .

c) Qual a probabilidade de numa medida de S_y encontrarmos $\hbar/2$?

d) Qual a probabilidade de numa medida de S_y encontrarmos $-\hbar/2$? Verifique que a soma dessas probabilidades é 1.

e) Qual a probabilidade de numa medida de S_z encontrarmos $\hbar/2$, e qual a probabilidade de numa medida de S_z encontrarmos $-\hbar/2$?

f) Mostre que em termos dos autovetores de S_z , $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$, $|\chi\rangle$ pode ser escrito como:

$$|\chi\rangle = a_+|\uparrow\rangle + a_-|\downarrow\rangle,$$

onde $a_+ = \frac{3i}{5}$ e $a_- = \frac{4}{5}$.

g) Mostre que $|\chi\rangle$ é autovetor de S^2 . Determine o autovalor e explique.

h) Se numa medida de S_z se obtem $\hbar/2$, em que estado o sistema se encontra logo após a medida?

i) Se imediatamente após essa medida de S_z se mede S_y , quais valores podem ser obtidos e quais probabilidades?

j) Se nessa medida de S_y se obteve $\hbar/2$ e se imediatamente após essa medida se mede novamente S_z , quais valores podem ser obtidos e quais probabilidades?

3) Considere um espaço de dimensão dois, e sejam A , B dois operadores hermitianos nesse espaço. Se os autovalores e autovetores desses operadores são:

$$A|\psi_i\rangle = a_i|\psi_i\rangle, \quad B|\phi_i\rangle = b_i|\phi_i\rangle, \quad i = 1, 2.$$

Na base de B temos: $|\psi_1\rangle = (3|\phi_1\rangle + 4|\phi_2\rangle)/5$, $|\psi_2\rangle = (4|\phi_1\rangle - 3|\phi_2\rangle)/5$.

a) Se numa medida de A se obtem a_1 , em que estado o sistema se encontra logo após a medida?

b) Se imediatamente após a medida de A se mede B , quais valores podem ser obtidos e quais probabilidades?

c) Se imediatamente após a medida de B se mede novamente A , qual a probabilidade de se medir a_1 ?

d) Os operadores A , B são compatíveis?

e) Determine o valor médio de B no estado $|\psi_1\rangle$.

4) Considere um próton em repouso imerso num campo magnético constante $\vec{B} = B_0 \hat{k}$. Ele possui uma energia potencial de orientação, que depende da orientação do vetor de spin \vec{S} :

$$U = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = -\frac{g_s \mu_b}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{B} = \gamma \vec{S} \cdot \vec{B}$$

onde introduzimos a constante γ , chamada de razão giromagnética. a) Escreva o operador Hamiltoniano do sistema ($\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}$, onde T e U são respectivamente os operadores da energia cinética e potencial). b) Resolva a equação de Schrödinger independente do tempo ($\hat{H}|\chi\rangle = E|\chi\rangle$) e encontre os autovalores da energia. c) Supondo que $|\Psi\rangle = |\chi\rangle e^{-iEt/\hbar}$, escreva as funções de onda, $|\Psi_+\rangle$ e $|\Psi_-\rangle$, associadas aos níveis de energia do ítem anterior e escreva o estado genérico $|\Psi\rangle$, que é uma combinação de $|\Psi_+\rangle$ e $|\Psi_-\rangle$. d) Neste estado calcule os valores esperados dos operadores \hat{S}_x , \hat{S}_y e \hat{S}_z , mostre que eles precessionam (esta é a *precessão de Larmor*) e encontre a frequência de precessão.

5) a) Deduza a expressão da energia de interação spin-órbita no átomo de hidrogênio:

$$\Delta U = \frac{1}{2m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \vec{S} \cdot \vec{L}$$

onde m é a massa do elétron e V é a energia potencial eletrostática. b) Determine o valor desta energia para o estado $n = 2$ e $l = 1$. c) Para que combinações de spin e momento angular esta energia (que depende da separação r entre o próton e o elétron) dá origem a uma força atrativa? (Lembre-se que $\vec{F} = -\hat{r} dV/dr$)