Eletromagnetismo I

Prof. Ricardo Galvão - 2° Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 1

Neste curso vamos seguir a referência básica

D. Griffiths; Introduction to Electrondynamics, 3° Edição

Esta referência será complementada por notas de aula, para todas as aulas do curso, e por consultas ao livro

J. R. Reitz, F. J. Milford, e R. W. Christy; Fundamentos da Teoria Eletromagnética, 3ª Edição.

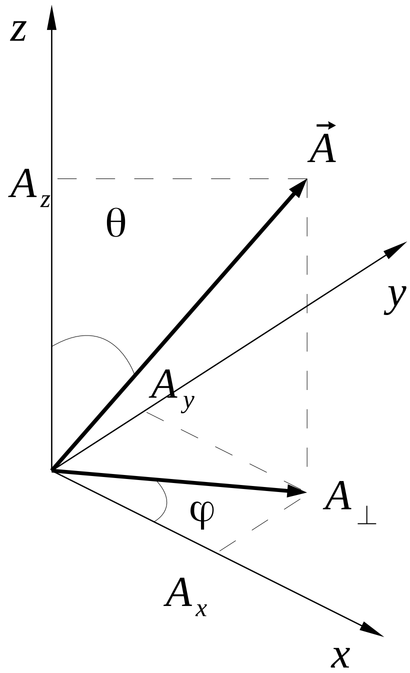
Realço que as notas de aula são escritas com o intuito de complementar o livro texto, explicando passagens mais difíceis ou apresentando alguns tópicos de forma alternativa, mas não podem ser consideradas como substitutas ao texto.

Revisão de Análise Vetorial

O livro texto começa com uma revisão de análise e cálculo vetorial. De fato, para acompanhar o curso de eletromagnetismo é essencial dominar esta ferramenta da matemática aplicada. Nós vamos rever apenas os conceitos mais avançados de cálculo vetorial, deixando para os alunos revisar por conta própria os conceitos mais simples, que correspondem ao material apresentado até a seção I.1.4 do livro texto, inclusive. Iniciemos então pela seção I.1.5, que é a primeira que discute um tema não trivial, e no qual o livro traz uma apresentação um tanto incompleta.

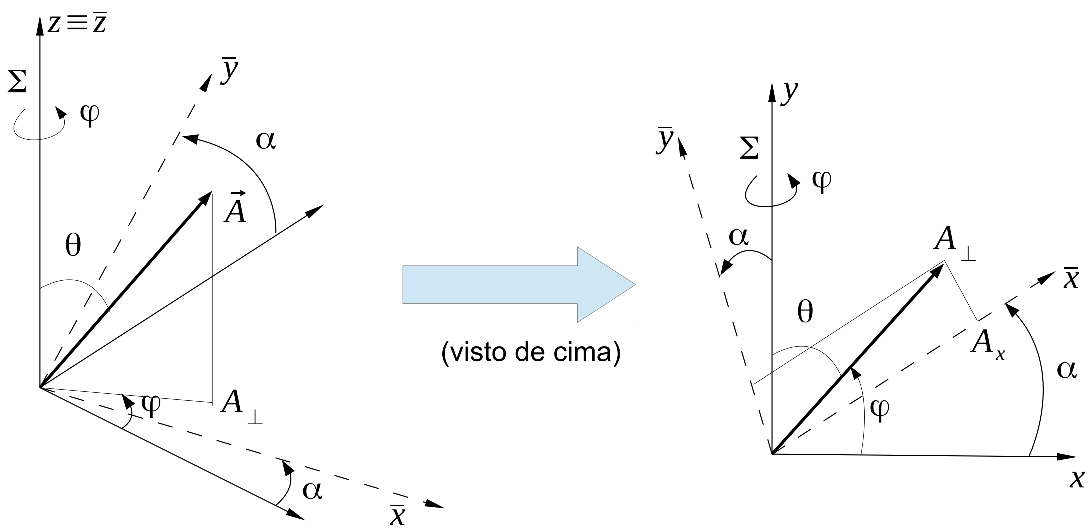
Transformação da representação das componentes de um vetor

Consideremos um vetor $\vec{A}$ num sistema de coordenadas cartesianas, como mostra a figura. Representando as projeções do vetor $\vec{A}$ sob o eixo z como A_z e no plano xy por $A_\perp$, temos:



$$A_z = A\cos\theta; \qquad A_x = A_\perp \cos\varphi;$$
$$A_\perp = A\,\mathrm{sen}\,\theta; \qquad A_y = A_\perp\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

Gostaríamos de saber como determinar as componentes A'_x, A'_y e A'_z desse mesmo vetor em um novo sistema de coordenadas (x', y', z'), que é obtidos a partir de (x, y, z) através de uma rotação no entorno de um eixo arbitrário. Este assunto vai ser tratado detalhadamente no curso de Mecânica Clássica, mas talvez seja instrutivo ver aqui como essa transformação pode ser obtida. Vamos inicialmente fazer uma rota-



ção de um ângulo α do sistema de coordenadas original, indicado por Σ na figura seguinte, em torno do eixo z. O sistema resultante será representado por $\bar{\Sigma}$ as novas coordenadas por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Representando as componentes de $\vec{A}$ no novo sistema por $(\bar{A}_x, \bar{A}_y, \bar{A}_z)$, é fácil de ver, na segunda figura, que

$$\bar{A}_x = A_\perp \cos\left(\varphi - \alpha\right) = A \operatorname{sen}\theta (\cos\varphi \cos\alpha + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\alpha) = \cos\alpha\, A_x + \operatorname{sen}\alpha\, A_y$$

e

$$\bar{A}_y = A_\perp \operatorname{sen}\left(\varphi - \alpha\right) = A \operatorname{sen}\theta (\operatorname{sen}\varphi \cos\alpha - \cos\varphi \operatorname{sen}\alpha) = \cos\alpha\, A_y - \operatorname{sen}\alpha\, A_x$$

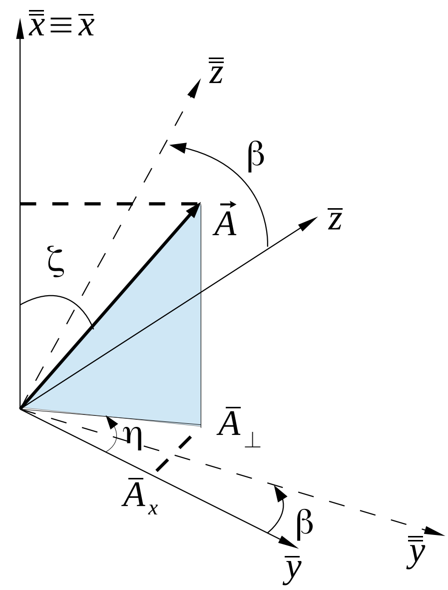
Naturalmente, para rotação em torno do eixo z, a componente z não se altera, de forma que temos

$$\bar{A}_z = A_z = A \cos\theta$$

Estas relações entre as novas e antigas coordenadas podem ser escritas de uma forma matricial (verifique fazendo o produto matricial indicado a seguir!)

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_x \\ \bar{A}_y \\ \bar{A}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

Agora vamos fixar o eixo $\bar{x}$ e girar os eixos $\bar{y}$ e $\bar{z}$ de um angulo β em torno dele. Para melhor visualizar a transformação, vamos representar o eixo $\bar{x}$ na vertical e agora projetar o vetor $\vec{A}$ sobre plano $\bar{y}\bar{z}$. A nova projeção será representada por $\bar{A}_\perp$ e fará um ângulo qualquer η com o eixo $\bar{y}$. Já o ângulo de $\vec{A}$ com o eixo $\bar{x}$ será representado por ξ. As novas coordenadas serão representadas por $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{z}})$ e, por construção, $\bar{\bar{x}} = \bar{x}$. A projeção do vetor $\vec{A}$ sobre o plano $(\bar{x}, \bar{y})$ é dada por



$$\bar{A}_\perp = A \operatorname{sen}\zeta \qquad \text{e} \qquad \bar{A}_x = A \cos\zeta$$

Naturalmente, como o eixo $\bar{x}$ permaneceu no mesmo lugar, temos $\bar{\bar{A}}_x = \bar{A}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{A}}_y &= \bar{A}_\perp \cos(\eta - \beta) = \bar{A}_\perp \cos\eta \cos\beta + \bar{A}_\perp \operatorname{sen}\eta \operatorname{sen}\beta \\
\therefore \bar{\bar{A}}_y &= \cos\beta\, \bar{A}_y + \operatorname{sen}\beta\, \bar{A}_y
\end{aligned}$$

Da mesma forma

$$\bar{\bar{A}}_z = \bar{A}_\perp \operatorname{sen}(\eta - \beta) = \bar{A}_\perp \operatorname{sen}\eta \cos\beta - \bar{A}_\perp \cos\eta \operatorname{sen}\beta$$

ou

$$\bar{\bar{A}} = -\operatorname{sen}\beta \bar{A}_y + \cos\beta \bar{A}_z$$

Mas $(\bar{A}_x, \bar{A}_y, \bar{A}_z)$ podem ser representados em termos de (A_x, A_y, A_z) usando as relações que obtivemos anteriormente. Então podemos escrever, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{A}}_x \\ \bar{\bar{A}}_y \\ \bar{\bar{A}}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_x \\ \bar{A}_y \\ \bar{A}_z \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{A}}_x \\ \bar{\bar{A}}_y \\ \bar{\bar{A}}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

É importante notar que essas matrizes de transformação são matrizes unitárias, ou seja, fazendo o produto de cada uma delas pela sua transposta obtemos a matriz unidade:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ 0 & \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se fizemos mais uma rotação de ângulo γ em torno da eixo $\bar{\bar{y}}$ obteríamos mais uma matriz unitária. Comparando com as anteriores, é fácil de ver que ela seria da forma:

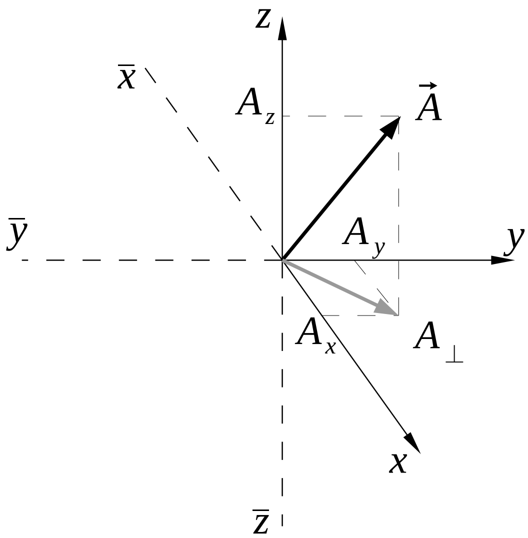
$$\begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & \operatorname{sen}\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

Pode ser mostrado que a rotação de um sistema de coordenadas em torno de um eixo qualquer pode sempre ser decomposta em três rotações sucessivas em torno dos eixos coordenados.

Portanto, na rotação de um sistema de coordenadas, as componentes de um vetor se transformam como o produto de matrizes unitárias.

Uma transformação peculiar é a reflexão, em que todas as coordenadas de um sistema são invertidas, isto é, $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to -z$. Nesta transformação, todas as componentes do vetor também trocam de sinal

$$\bar{A}_x = -A_x; \bar{A}_y = -A_y; \bar{A}_z = -A_z.$$



No entanto, é interessante notar que os vetores que são definidos pelo produto vetorial de outros dois vetores não trocam de sinal na reflexão. Por exemplo, consideremos o torque de uma força

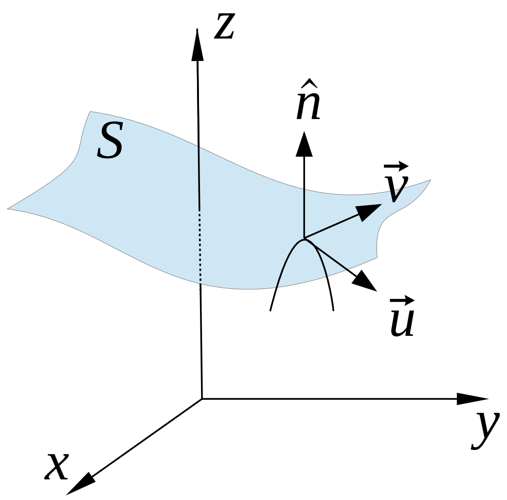
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \bar{\vec{\tau}} = \bar{\vec{r}} \times \bar{\vec{F}} = (-\vec{r}) \times (-\vec{F}) = \vec{\tau}$$

Vetores que seguem esta regra são denominados pseudo-vetores; mas isto não implica que tenham que ser tratados de forma especial no cálculo vetorial.

Nota: as seções de recordação sobre derivadas e gradientes serão deixadas para revisão direta pelos alunos.

Vetor unitário normal a uma superfície

Consideremos uma superfície qualquer, especificada pela função escalar



$$F(x, y, z) = C$$

onde C é uma constante. Por exemplo, no caso de um superfície esférica,

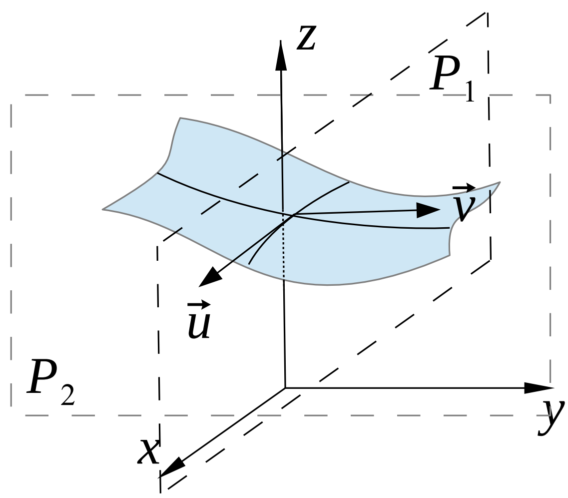
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Gostaríamos de determinar a expressão para o vetor unitário à superfície, em um ponto qualquer. Caso conheçamos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tangentes à a superfície naquele ponto, podemos determinar $\hat{n}$ através da relação

$$\hat{n} = \frac{\hat{u} \times \hat{v}}{|\hat{u} \times \hat{v}|}$$

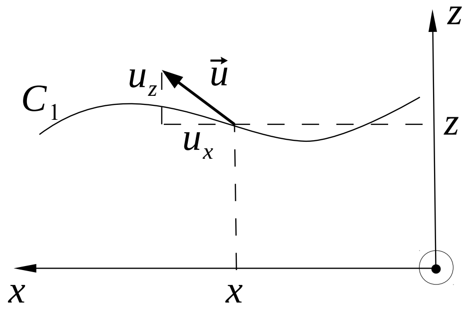
Mas, como obter os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$?

Uma forma é considerar as interseções da superfície com dois planos perpendiculares entre si e paralelos aos planos coordenados. Essas interseções serão duas curvas sobre a superfície e podemos tomar $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como vetores tangentes a elas. Consideremos primeiro a curva C_1 devido à intercessão com o plano P_1, paralelo ao plano coordenado (x, z). Vendo a curva de interseção a partir do eixo y, temos do vetor $\vec{v}$ tangente à curva C_1 pode ser escrito como



$$\vec{u} = u_x \hat{e}_x + u_z \hat{e}_z = u_x \hat{e}_x + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y;C_1} u_x \hat{e}_z$$

Esta última relação sai da condição de tangência à curva $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y;C_1}$ significa derivada parcial de z com relação a x, mantido $y = constante$, ao longo da curva C_1. Da mesma forma, se consideramos a curva C_2 obtida da interseção do plano P_2 com a superfície, teremos



$$\vec{v} = v_y\hat{e}_y + v_z\hat{e}_z = v_y\hat{e}_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x;C_2} v_y\hat{e}_z$$

Mas, ao longo da curva C_1, com y fixo, temos

$$F(x,y,z) = const \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad \therefore \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{C_1} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$$

$$\therefore \boxed{\vec{u} = \frac{u_x}{\partial F/\partial z}\left[\frac{\partial F}{\partial z}\hat{e}_x - \frac{\partial F}{\partial x}\hat{e}_z\right]}$$

Da mesma forma, ao longo da curva C_2 com x fixo, temos

$$F(x,y,z) = const \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad \therefore \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{C_2} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial x},$$

$$\therefore \boxed{\vec{v} = \frac{v_y}{\partial F/\partial z}\left[\frac{\partial F}{\partial z}\hat{e}_y - \frac{\partial F}{\partial y}\hat{e}_z\right]}$$

Portanto

$$\vec{u}\times\vec{v} = \frac{u_x v_y}{(\partial F/\partial z)^2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\hat{e}_z + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y}\hat{e}_y\right]$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \frac{u_x v_y}{\partial F/\partial z}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial F}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial F}{\partial z}\hat{e}_z\right] = \frac{u_x v_y}{\partial F/\partial z}\nabla F$$

Então

$$\hat{n} = \frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\hat{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}}$$

Um resultado bastante importante em Cálculo Vetorial.