

ELEMENTOS DE MÁQUINAS (SEM 0241)

Notas de Aulas v.2018

Aula 07 – Eixos – Tensões de confronto

Professores: Ernesto Massaroppi Junior
Jonas de Carvalho
Carlos Alberto Fortulan

7- Dimensionamento de eixos

7.1- Cálculo de eixos quanto a Tensão de Confronto

Tensão de confronto
Tensão ideal
Tensão equivalente



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^* \\ \sigma_i \\ \sigma_{eq} \end{array} \right. \sigma^* \leq \frac{\sigma_{adm}}{N}$$

Dimensionamento Indireto

- Caso estático
- Caso fadiga



Pré-dimensionar
como estático



Verificação quanto
a fadiga

$$\sigma^* = \sigma_{\max} = \frac{M_{fr}}{W_f} \leq \sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{N}$$

$$N = \frac{\sigma_y}{\sigma^*}$$

Para eixos $N=2,5^*$

* Sugestões: Norton, p487, 491; Juvinal, p394-396

7.1.1. Cálculo da tensão de confronto sob solicitação estática

a1) Flexão Pura

No caso de seção circular:

$$W_f = \frac{\pi d^3}{32} \Rightarrow \sigma^* = \frac{32M_{fr}}{\pi d^3} \leq \frac{\sigma_y}{N} \quad \text{com} \quad M_{fr} = \sqrt{M_{fH}^2 + M_{fV}^2}$$

Pré-dimensionamento :

$$\bar{d}^3 = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{M_{fr}}{\sigma_{adm}}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{d} = 2.17 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{fr} \cdot N}{\sigma_y}}$$

$$d = 1.1 \sim 1.3 \bar{d}$$

a2) Torção Pura

$$\tau^* = \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{adm}$$

Para seção circular:

$$W_t = \frac{\pi d^3}{16}$$

Pré-dimensionamento : $\frac{16M_t}{\pi d^3} \leq \tau_{adm} \Rightarrow \bar{d}^3 = \frac{16M_t}{\pi \tau_{adm}}$

$$\bar{d} = 1.72 \cdot \sqrt[3]{\frac{N \cdot M_t}{\tau_y}}$$

$$d = 1.1 \sim 1.3 \bar{d}$$

Á partir da potência de entrada (P, em HP; n, em rpm)

$$N = F \cdot v \Rightarrow N[\text{HP}] = \frac{F[\text{Kgf}] \cdot v[\text{m/s}]}{75}$$

$$N[\text{CV}] = \frac{F[\text{Kgf}] \cdot v[\text{m/s}]}{76}$$

$$\omega[\text{rad/s}] = \frac{2\pi \cdot n[\text{rpm}]}{60}$$

$$v[\text{m/s}] = \omega[\text{rad/s}] \cdot r[\text{m}]$$

$$\Rightarrow N = \frac{F}{75} \cdot \frac{2\pi \cdot n}{60} \cdot \frac{r}{1000} = \frac{1}{716200} \cdot \underbrace{F \cdot r \cdot n}_{M_t}$$

$$P = \frac{1}{716200} \cdot M_t \cdot n$$

P : [HP]

M_t : [Kgf/mm]

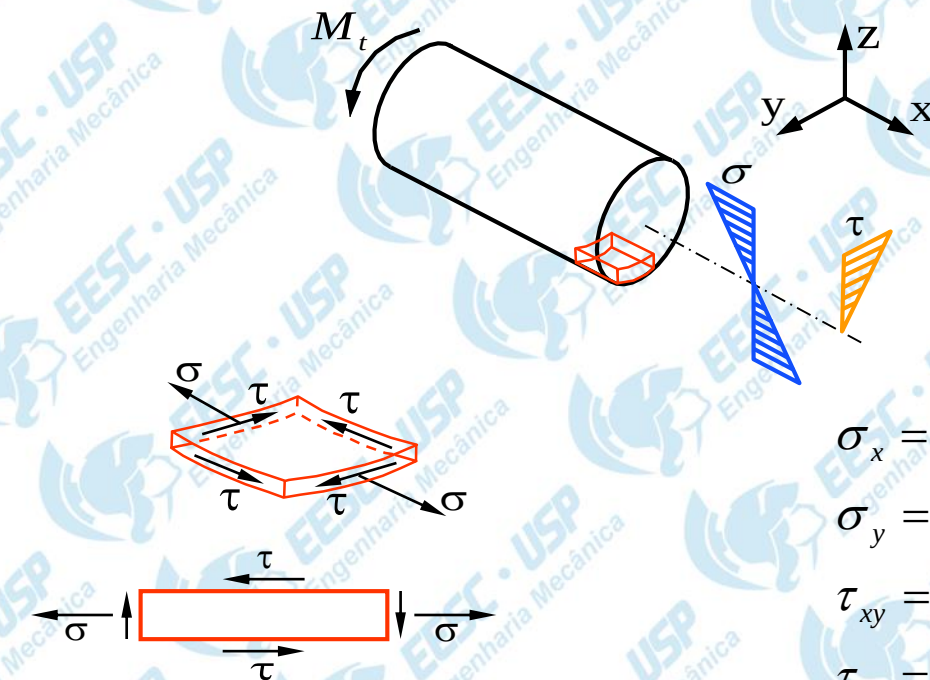
n : [rpm]

$$M_t = 716200 \frac{N}{n} \Rightarrow \bar{d} = 1.72 \cdot \sqrt[3]{716200 \frac{N}{n \cdot \tau_{adm}}}$$

$$\bar{d} = 15389 \cdot \sqrt[3]{\frac{N \cdot P}{n \cdot \tau_y}}$$

$$d = 1.1 \sim 1.3 \bar{d}$$

a3) Flexão e torção combinadas



$$\sigma_x = \sigma_{\text{flexão}}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{\text{torção}}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$(\tau_q \cong 0)$$

σ_x
 σ_y
 σ_z
 τ_{xy}
 τ_{xz}
 τ_{yz}

Tensões principais

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

Critério Energia Distorção (von MISES)

Para flexão e torção em eixos temos situação biaxial de solicitação (2D)

Tensões principais
para 2D

$$\rightarrow \left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2} \quad (\text{eq.1})$$

Se $\sigma_y = 0$

$$\rightarrow \left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \quad (\text{eq.2})$$

σ_i para 2D ($\sigma_3 = 0$) é :

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2)}$$

$$\Rightarrow \sigma_{id}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \quad (\text{eq.3})$$

Da equação 2:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{4} + \left(\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2 \right) + 2 \times \frac{\sigma}{2} \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

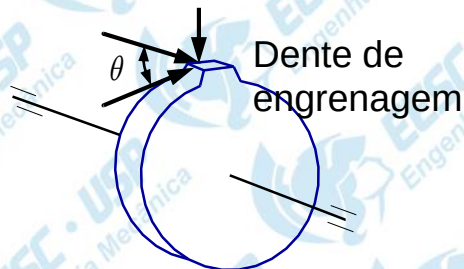
$$\sigma_2^2 = \frac{\sigma^2}{4} + \left(\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2 \right) - 2 \times \frac{\sigma}{2} \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

$$-\sigma_1 \times \sigma_2 = - \left[\frac{\sigma^2}{4} - \left(\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2 \right) \right] = - \frac{\sigma^2}{4} + \frac{\sigma^2}{4} + \tau^2$$

$$\sigma_{id}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = 4 \frac{\sigma^2}{4} + 3\tau^2$$

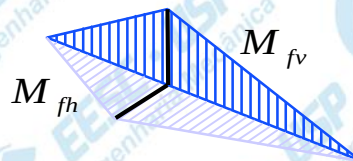
$\sigma^* = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$

No caso de eixos



$$\sigma = \frac{M_{fr}}{W_f}$$

$$M_{fr} = \sqrt{M_{fh}^2 + M_{fv}^2}$$



$$\tau = \frac{M_t}{W_t}$$

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{M_{fr}^2}{W_f^2} + 3 \frac{M_t^2}{W_t^2}}$$

Tendo-se seção circular :

$$W_f = \frac{1}{2} W_t$$

$$\sigma^* = \frac{1}{W_f} \sqrt{M_{fr}^2 + \frac{3}{4} M_t^2}$$

se,

$$M_{eq} = \sqrt{M_{fr}^2 + \frac{3}{4} M_t^2}$$

$$\Rightarrow \sigma^* = \frac{M_{eq}}{W_f}$$

$$\sigma^* \leq \sigma_{adm} \Rightarrow \frac{M_{eq}}{\pi d^3} \times 32 \leq \sigma_{adm}$$

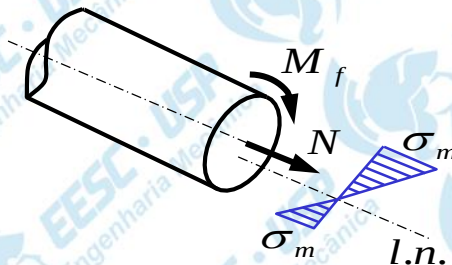
$$\bar{d} = 2,173 \sqrt[3]{\frac{M_{eq}}{\sigma_{adm}}}$$

$$\bar{d} = 2,173 \sqrt[3]{N \cdot \frac{M_{eq}}{\sigma_y}}$$

$$d = 1,1 \sim 1,3 \bar{d}$$

7.1.2. Cálculo da tensão de confronto sob solicitação dinâmica (fadiga)

b1) Flexão Pura



$$\sigma^* = \sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{fr}}{W_f} \leq \sigma_{fadm}$$

Havendo força normal :

$$\sigma = \pm \frac{N}{S} \pm \frac{M_{fr}}{W_f}$$

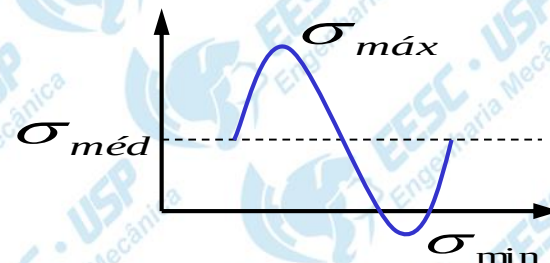
Por exemplo :

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{N}{S} + \frac{M_{fr}}{W_f} \text{ e } \sigma_{m\grave{m}n} = \frac{N}{S} - \frac{M_{fr}}{W_f}$$

Neste caso $1 < k < \infty$ e calcular sempre usando

$$S_m = \text{máx}(|\sigma_{m\acute{a}x}|, |\sigma_{m\grave{m}n}|)$$

$$\sigma^* = S_m \leq \sigma_{fadm}$$



b2) Torção Pura

$$\tau^* = \tau = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{fadm}$$

Se não houver flutuações de $M_t \rightarrow k = 1$

Se houver $S_m = \max(|\tau_{\max}|, |\tau_{\min}|)$

$$\tau^* = S_m \leq S_{fadm}(k \neq 1)$$

b3) Flexão e Torção Combinadas

b3.1) Flexão e torção tem o mesmo “k”

$$\sigma^* = \sqrt{\left(\sigma_{\max} K_{ff}\right)^2 + H^2 \left(\tau_{\max} K_{ft}\right)^2} \quad \text{com} \quad H = \frac{\sigma_e}{\tau_e}$$

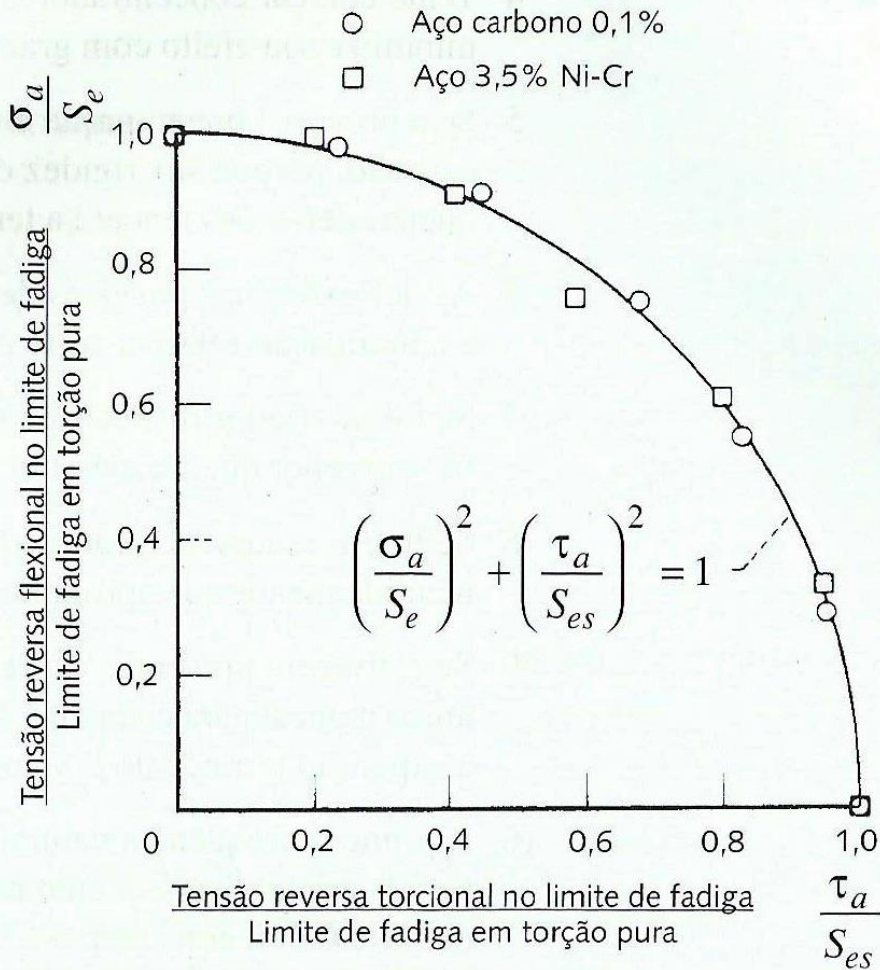
σ_e OU (σ_n) - limite resistência à fadiga por flexão corrigido por critério de resistência à fadiga

τ_e OU (τ_n) - limite resistência à fadiga por torção corrigido por critério de resistência à fadiga

K_{ff} - coeficiente de entalhe dinâmico para fadiga à flexão

K_{ft} - coeficiente de entalhe dinâmico para fadiga à torção

Flexão e torção com o mesmo “k” = ∞



(b) Dados do teste de fadiga por tensão combinada para flexão reversa combinada com torção reversa (da ref. 5).

FIGURA 9-3

Resultados dos testes de fadiga para amostras de aço sujeitas a torção e flexão combinadas. (Extraído de *Design of Transmission Shafting*, American Society of Mechanical Engineers, New York, ANSI/ASME Standard B106.1M-1985, com autorização.)

b3.2) Flexão e torção tem k diferentes

$$\sigma^* = \sqrt{\left(\sigma_{\text{máx}} K_{ff}\right)^2 + H_e^2 \left(\tau_{\text{máx}} K_{ft}\right)^2} \quad \text{com} \quad H_e = \frac{\sigma_e}{\tau_e};$$

- σ_e ou (σ_n) - limite resistência à fadiga por flexão corrigido por critério de resistência à fadiga
- τ_e ou (τ_n) - limite resistência à fadiga por torção corrigido por critério de resistência à fadiga
- K_{ff} - coeficiente de entalhe dinâmico para fadiga à flexão
- K_{ft} - coeficiente de entalhe dinâmico para fadiga à torção

Obs.: Se não dispuser de K_f 's exatos usar K_f para $k=\infty$

Dimensionamento Direto

Flexão variada e torção variada

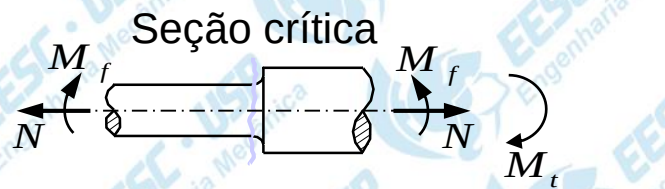
$$d = \sqrt[3]{\frac{32N}{\pi} \left(\frac{\sqrt{(K_f M_f)^2 + \frac{3}{4}(K_{ft} M_t)^2}}{S_f} + \frac{\sqrt{(K_{fm} M_{fm})^2 + \frac{3}{4}(K_{fmt} M_t)^2}}{S_{ut}} \right)}$$

b3.3) Caso particular onde $k_f = \infty$ e $k_t = 1$

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma_{máx}^2 + H^2 \tau^2}$$

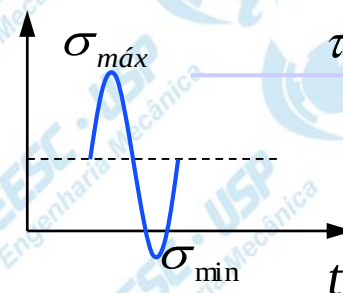
com

$$H = \frac{S'_e K_{ft}}{\tau_y K_{ff}}$$

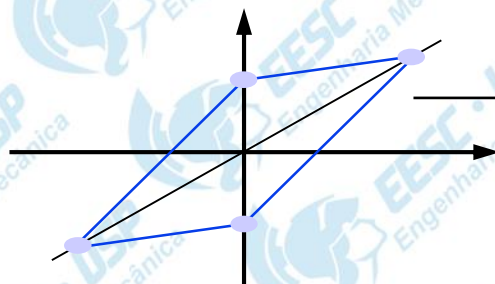


Havendo força normal :

$$\sigma_{max} = \pm \frac{N}{S} \pm \frac{M_{fr}}{W_f}$$



Entalhe $\rightarrow$ $K_{ft}, k = 1$
 $\rightarrow$ $K_{ff}, k = \infty$



Goodman

 σ_{Faf}

(estimativa)

$$\tau_y \cong 0,57 \sigma_y$$

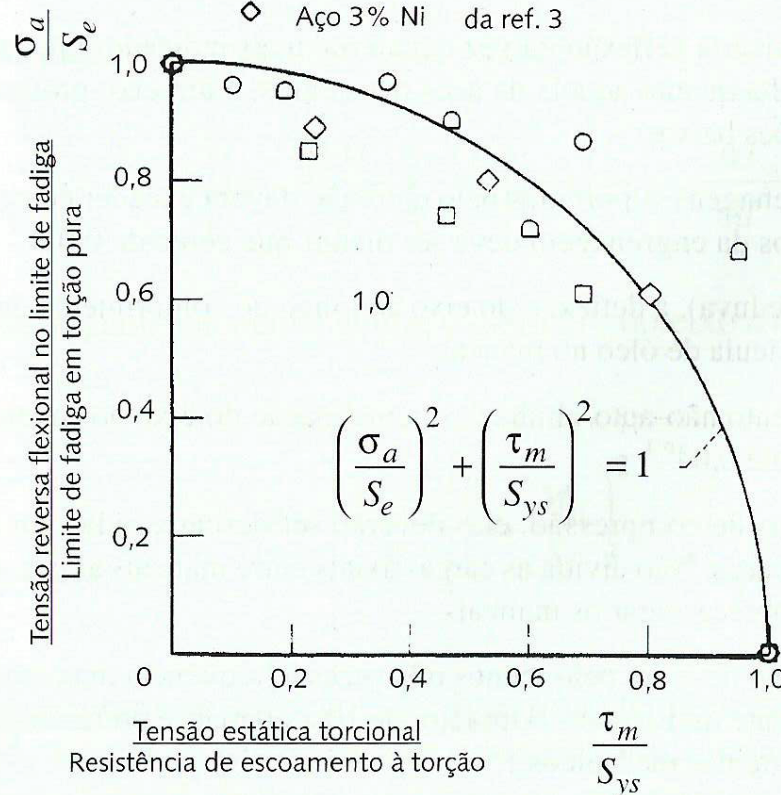
Normalmente não temos K_{ft} para $k = 1$. Usamos K_{ff} para $k = \infty$ a favor da segurança.

Se existir força normal N recai-se no caso b3.2) porque $k_f \neq \infty$

Dimensionamento Direto

Aço Ni-Cr-Mo, AISI 4340 da ref. 2

- $K_t = 1,42$ (Flexão)
- ◻ $K_t = 2,84$ (Flexão)
- ◻ Aço Ni-Cr da ref. 3
- ◊ Aço 3% Ni da ref. 3



(a) Dados do teste de fadiga por tensão combinada para flexão reversa combinada com torção estática (da ref. 4).

FIGURA 9-3

Resultados dos testes de fadiga para amostras de aço sujeitas a torção e flexão combinadas. (Extraído de *Design of Transmission Shafting*, American Society of Mechanical Engineers, New York, ANSI/ASME Standard B106.1M-1985, com autorização.)

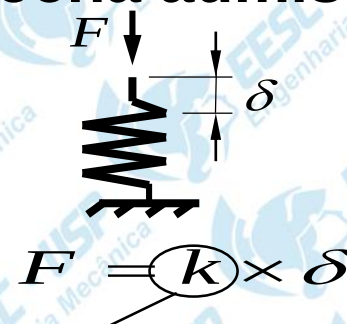
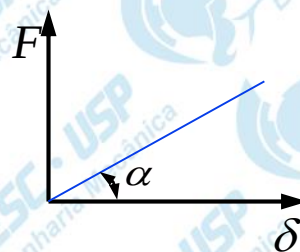
$$\text{ASME} \quad \left(\frac{\sigma_a}{S_e} \right)^2 + \left(\frac{\tau_m}{\tau_y} \right)^2 = 1 \Rightarrow \left(N \frac{\sigma_a}{S_e} \right)^2 + \left(N \frac{\tau_m}{\tau_y} \right)^2 = 1, \quad \tau_y = \sqrt{3} \sigma_y \quad k_f = \infty \text{ e } k_t = 1$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32N}{\pi} \sqrt{\left(K_{ff} \frac{M_f}{S_n} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{M_t}{S_y} \right)^2}}$$

NORTON RL, Projeto de Máquinas, 2.ed. Bookman, Porto Alegre, (2004) p485

ANSI/ASME B106.1M-1985 - Design of Transmission Shafting

7.2 – Cálculo de eixos quanto à Rigidez (ou flecha admissível)



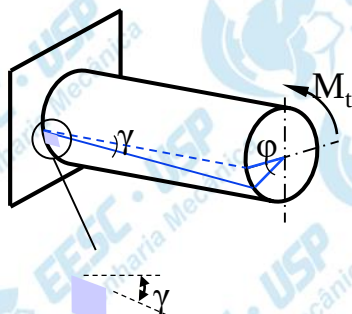
constante de mola (rigidez)

7.2.1 – Eixos de seção constante

- Tração / compressão

$$\sigma = E \times \varepsilon \rightarrow \frac{P}{A} = E \frac{\delta}{L} \Rightarrow P = \frac{EA}{L} \delta \Rightarrow k_{en} = \frac{EA}{L}$$

- Torção



$$\gamma \cdot L = \varphi \frac{d}{2}$$

$$\varphi = \frac{\gamma L 2}{d}$$

$$\gamma = \varphi \frac{d}{2L}$$

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$\tau = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t d}{J_t \cdot 2}$$

$$\Rightarrow \frac{M_t d}{J_t \cdot 2} = G \cdot \varphi \cdot \frac{d}{2L}$$

$$\Rightarrow M_t = \frac{G \cdot J_t}{L} \varphi \Rightarrow k_{et} = \frac{G \cdot J_t}{L}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad J_t = \frac{\pi d^4}{32}$$

Flexão

Da teoria de flexão :

Curvatura

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ}$$

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

$$\frac{dQ}{dx} = q \quad (\text{carga distribuída})$$

Estudo das curvas planas



$$\theta = \text{inclinação} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{M}{EJ} = \frac{\text{momento fletor}}{EJ} = \frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (1)$$

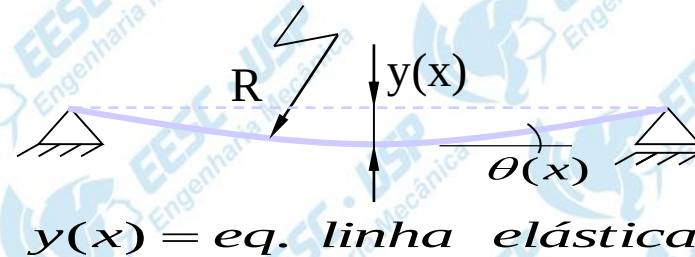
$$\frac{Q}{EJ} = \frac{\text{força cortante}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{dM}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} \quad (2)$$

$$\frac{q}{EJ} = \frac{\text{carga distribuída}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{dQ}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4}$$

De (1) e (2), partindo-se do diagrama de momento fletor :

$$\int_0^x \frac{M}{EJ} dx = \frac{dy}{dx} = \theta \quad \text{e}$$

$$\int_0^x \left(\int_0^x \frac{M}{EJ} dx \right) dx = y(x) \quad \text{eq. linha elástica}$$





$$M = P(L - x)$$

$$y(0) = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = 0$$

$$\int M dx = PL \int dx - P \int x dx = P \left[Lx - \frac{x^2}{2} \right] + C_1$$

$$\frac{d}{dx}(EJ \cdot y(x)) = \int M dx = P \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \Rightarrow$$

$$EJ \cdot y(x) = \int \left[P \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \right] dx = PL \frac{x^2}{2} - \frac{P}{2} \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \text{ e } \theta(0) = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y(x) = \frac{1}{EJ} \left[PL \frac{x^2}{2} - \frac{P}{6} x^3 \right], \text{ pondo } x = L \text{ vem}$$

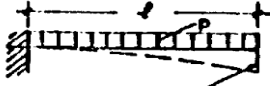
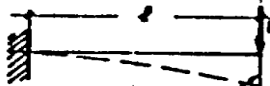
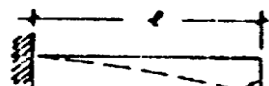
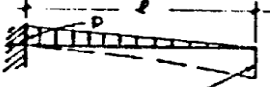
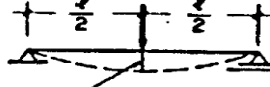
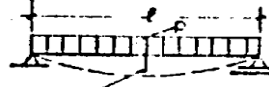
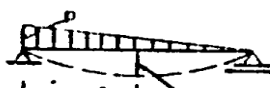
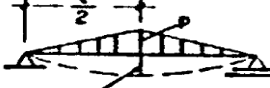
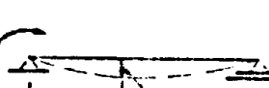
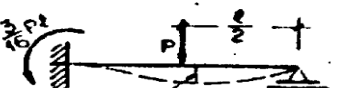
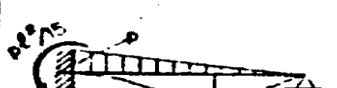
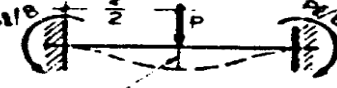
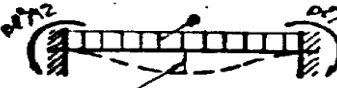
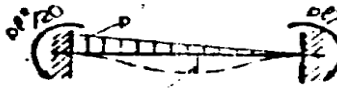
$$y(L) = \frac{P}{EJ} \left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{6} \right) \Rightarrow \delta = \frac{PL^3}{3EJ}$$

$$P = \frac{3EJ}{L^3} \delta \Rightarrow k_f = \frac{3EJ}{L^3}$$



Para demais casos simples $\longrightarrow$ tabelas.

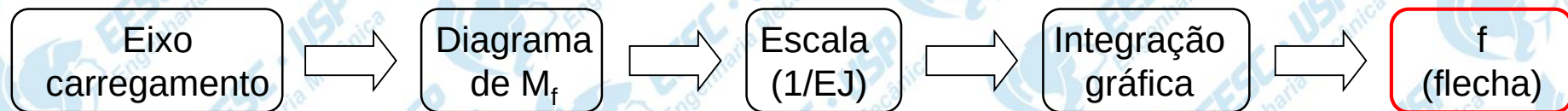
Tabela 6 – Flechas elásticas de vigas de seção constante

 $\frac{Pl^4}{8EJ}$	 $\frac{Pl^3}{3EJ}$	 $\frac{Ml^2}{2EJ}$
 $\frac{pl^4}{30EJ}$	 $\frac{Pl^3}{48EJ}$	 $\frac{5}{384} \frac{pl^4}{EJ}$
 $0,00652 \frac{Pl^4}{EJ}$	 $\frac{Pl^4}{120EJ}$	 $\frac{Ml^2}{9,3EJ}$
 $\frac{Pl^3}{48EJ}$	 $0,00542 \frac{Pl^4}{EJ}$	 $0,00239 \frac{Pl^4}{EJ}$
 $\frac{Pl^3}{192EJ}$	 $\frac{Pl^4}{348EJ}$	 $\frac{pl^4}{764EJ}$

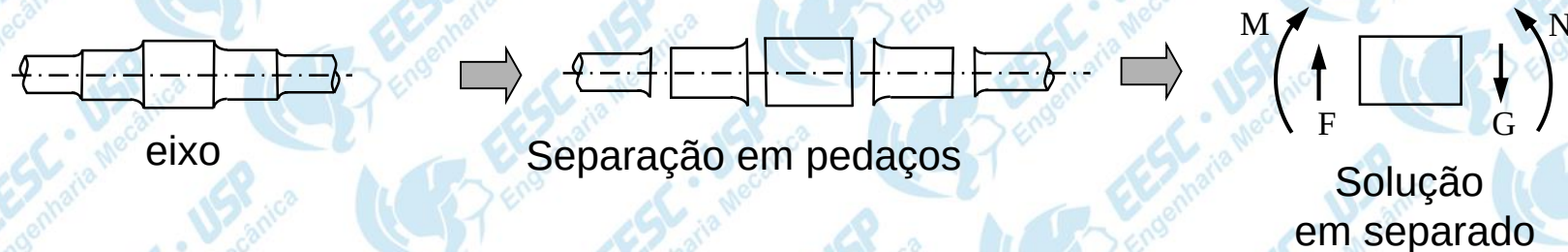
7.2.2. Cálculo de Flechas de Eixos de Seção Variável (escalonados)

a) Cálculos feitos à mão

a₁) Método da Integração Gráfica

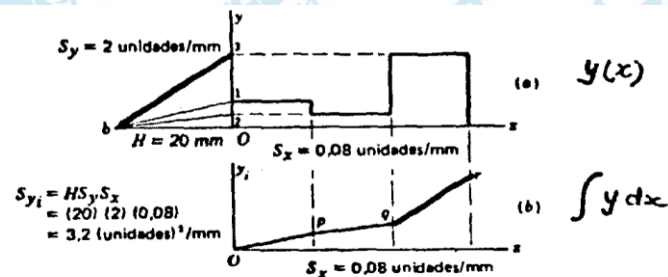


a₂) Método de Madigan

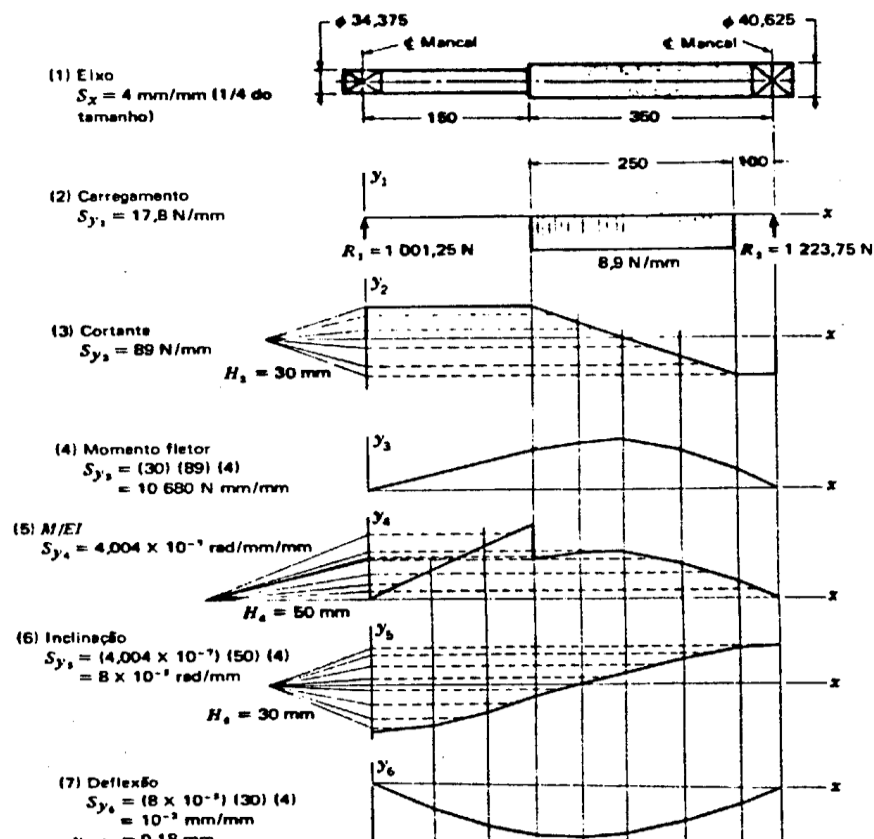


A flecha e a inclinação de cada seção em separado são passadas à seção seguinte.

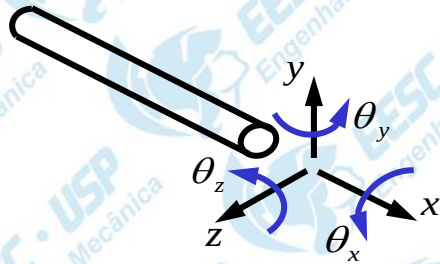
Integração Gráfica



Método Gráfico para Determinação de Flecha de Eixos Escalonados.



B) Cálculos por Computador



6 solicitações, deformações = 6 graus de liberdade
 1 gdl $\longrightarrow$ 1 k (coeficiente de mola)
 Vários gdl $\longrightarrow$ [K] Matriz de rigidez

$$F = kx \longleftrightarrow \{F\}_{n \times 1} = [K]_{n \times n} \cdot \{x\}_{n \times 1}$$

Cálculo dos K_{ij}



Método dos Elementos Finitos

Método numérico para resolver equações diferenciais



Aplicações do MEF :

- Problemas de elasticidade em sólidos – σ , ϵ , δ
- Vibrações em sólidos – ω_i , $\{X\}_i$
- Escoamento em fluidos – v , p
- Transmissão de calor – T
- Campos elétricos
- etc

Associação de Rigidezes (molas)



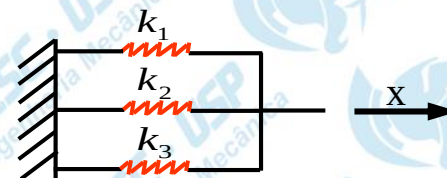
Molas em paralelo

Deslocamento igual para todas.

$$F_t = k_1 x + k_2 x + k_3 x \Rightarrow k_{eq//} x = (k_1 + k_2 + k_3) \cdot x$$

$$F_t = \sum F_i$$

$$k_{eq//} = k_1 + k_2 + k_3$$



Molas em série

Força igual para todas.

$$x_t = \sum x$$

$$x_t = \frac{F}{k_{eqS}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3}$$



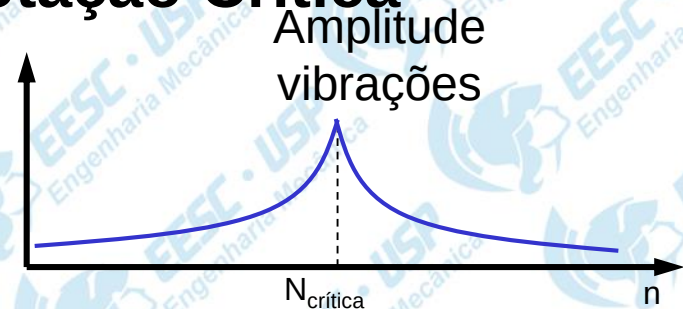
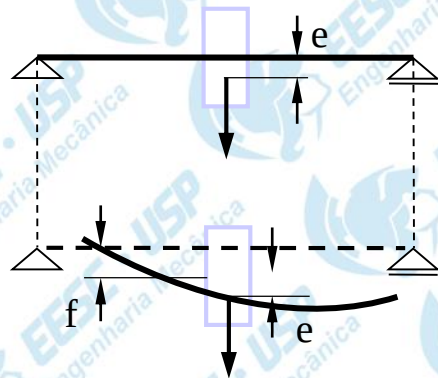
$$k_{eqS} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}}$$

Valores de flecha e ângulo de flexão admissíveis para algumas construções mecânicas

Aplicação	Flecha admissível (f_{adm})	Ângulo de inclinação β [rad]
Eixos de máquinas ferramentas com engrenagens	0.1 m	-
Motores assíncronos	0.1 δ	-
Construções mecânicas em geral	0.0002 L	-
Eixos apoiados em mancais hidrodinâmicos ou de lubrificação mista	-	0.001
Eixos apoiados em mancais de rolamento radial fixo de esferas		0.008
Eixos apoiados em mancais autocompensadores		0.05

- m = módulo da engrenagem
- δ = entreferro do motor elétrico
- L = distância entre apoios do eixo

7.3 - Cálculo de Eixos quanto à Rotação Crítica



Modelagem :

- Despreza-se o peso do eixo
- Despreza-se a inércia do eixo
- Despreza-se o momento centrífugo

$$\sum F_{ext} = M \cdot a = M \cdot \omega^2 r = M \cdot \omega^2 (f + e)$$

No caso de viga bi-apoiada :

$$f = \frac{FL^3}{48EJ} \Rightarrow F = \frac{48EJ}{L^3} \cdot f$$

como

$$\sum F_{ext} = F \Rightarrow k \cdot f = M \omega^2 (f + e) \Rightarrow$$

$$kf - Mf\omega^2 - Me\omega^2 = 0 \Rightarrow f = \frac{Me\omega^2}{k - M\omega^2} \quad \text{ou}$$

$$f = \frac{e}{\frac{k}{M\omega^2} - 1}$$

quando $\frac{k}{M\omega^2} \rightarrow 1 \Rightarrow f \rightarrow \infty, \forall e!! \Rightarrow \omega_{crit} = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad [\text{rad/s}]$

$$\omega_{crit} = \frac{2\pi}{60} n_{crit} \Rightarrow n_{crit} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (\text{rpm})$$

Novamente desprezando-se o peso do eixo, a flecha estática é

$$f_{st} = \frac{GL^3}{48EJ} \Rightarrow f_{st} = \frac{G}{k} = \frac{Mg}{k}, \quad M = \text{massa do disco}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{M} = \frac{g}{f_{st}} \Rightarrow n_{crit} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{f_{st}}}$$

OBSERVAÇÕES

1. $N_{crit} \exists$ mesmo se $e = 0$, entretanto desbalanceamento favorece fenômeno.

2. A dedução vale para $M_{eixo} \ll M_{disco} !!$

3. $n_{crit} \propto \sqrt{k} \Rightarrow$ influem

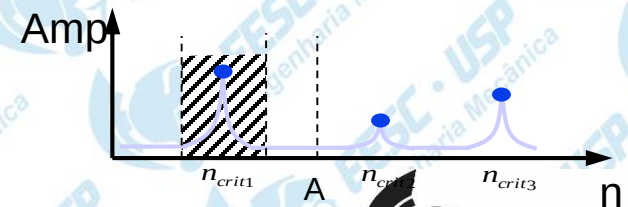
- Elasticidade E
- Forma da seção J
- Tipo de carregamento
- Vínculos

4. $N_{trabalho}$ fora da faixa : $0,7 \sim 1,3 n_{crit}$

5. $\exists n_{crit.1,2,3}$

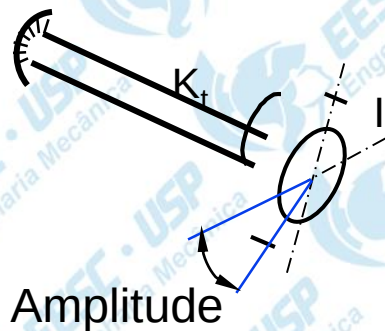
6. Pode-se trabalhar em “A”

Passa-se pela crítica com potência suficiente e amortecimento alto.

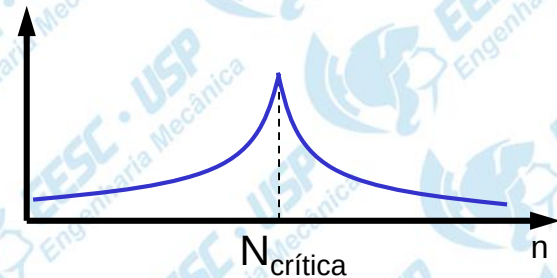


ROTAÇÃO CRÍTICA TORCIONAL

Da mesma forma que flexional, existe n_{crit} torcional, especialmente para eixos $d \ll L$



Amplitude
vibrações

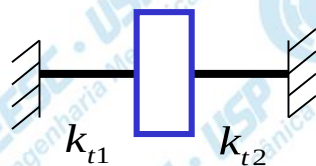


$$n_{crittorc} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{K_t}{I}}$$

- K_t : Rigidez torcional
- I : Inércia do disco
- G : Módulo de elasticidade transversal

Neste caso (eixo em balanço) :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_t = \frac{GJ_t}{L} \\ I = m \frac{d^2}{8} \end{array} \right.$$

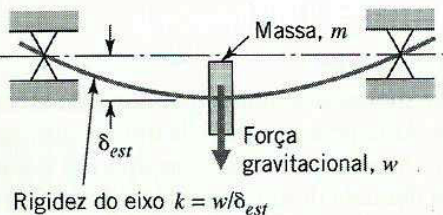


$$k_{eq//} = k_{t1} + k_{t2}$$

Configuração

Equação da Velocidade Crítica

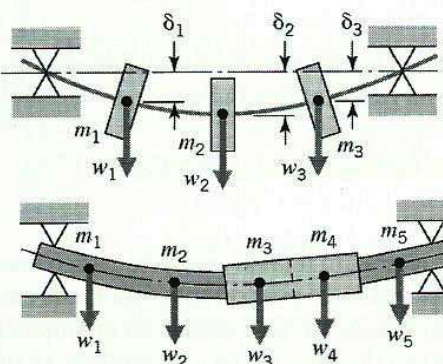
(a) Uma única massa



$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{w}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{est}}} \quad (17.1)$$

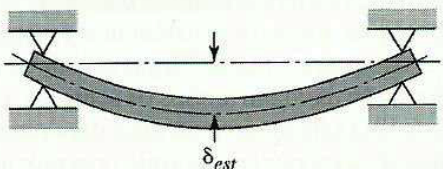
$$n_c = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{kg}{w}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{est}}} \quad (17.1a)$$

(b) Múltiplas massas



$$\left. \begin{aligned} n_c &\approx \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g(w_1\delta_1 + w_2\delta_2 + \dots)}{w_1\delta_1^2 + w_2\delta_2^2 + \dots}} \\ n_c &\approx \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g \sum w\delta}{\sum w\delta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

(c) Apenas a massa do eixo



$$\omega_n \approx \sqrt{\frac{5g}{4\delta_{est}}}$$

Grandeza	Símbolo	SI	Sistema Gravitacional Inglês
Massa	m	kg	lb · s ² /in (slug)
Força gravitacional	w	N	lb
Deslocamento estático	δ_{est}	m	in
Rigidez do eixo	k	N/m	lb/in
Aceleração de gravidade	g	m/s ²	in/s ²
Frequência natural	ω_n	rad/s	rad/s
Velocidade crítica	n_c	rpm	rpm

7.4. Referências

- ANSI/ASME B106.1M-1985 - Design of Transmission Shafting
- Niemann G. *Elementos de Máquinas*, vol. I, Editora Edgard Blucher, 1991.
- Norton, RL. “Projeto de Máquinas”, 2.ed. Bookman, Porto Alegre, 2004.
- Juvinal, R.C. & Marshek, K.M. Fundamentos do projeto de componentes de máquinas. Ed. LTC, 2008.