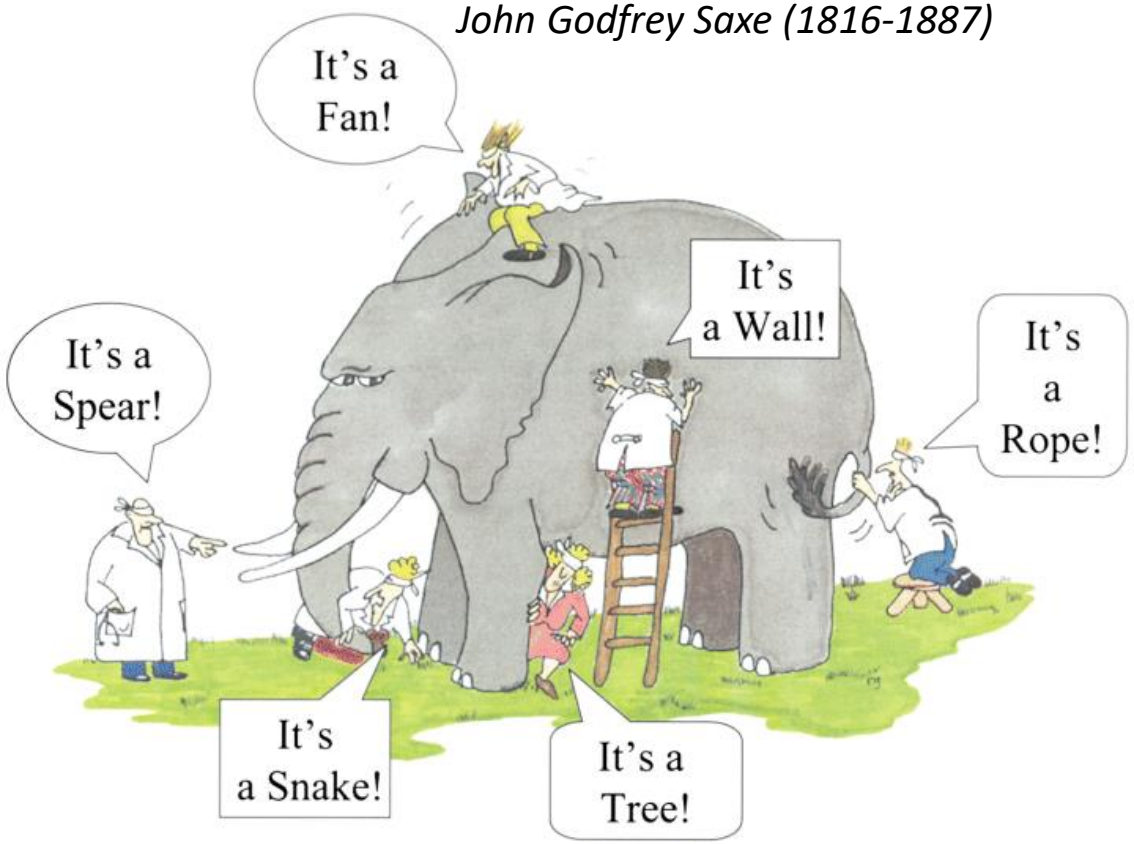
And so these men of Indostan,
Disputed loud and long,
Each in his own opinion,
Exceeding stiff and strong,
Though each was partly in the right,
And all were in the wrong!

John Godfrey Saxe (1816-1887)



PMR5010 – Elementos Finitos em Sist. Multifísicos: Fundamentos

Aula 01: Introdução

Profa. Dra. Larissa Driemeier

Prof. Dr. Marcilio Alves

Prof. Dr. Rafael Traldi Moura

Conteúdo da disciplina

Aula	Data	Assunto	Professor
1	19/2	• Modelagem em engenharia • Mecânica dos Sólidos • Análise Matricial das estruturas 1D	Rafael
2	26/2	• Introdução ao Método dos Elementos Finitos • Aplicações: estruturas, fluidos, corpos rígidos	Rafael
3	05/3	• Elementos finitos: exercícios	Rafael
4	12/3	• Prova 1 : Teoria e Exercício Programa 1	Rafael
5	19/3	• Elementos finitos para vigas • Programação do método dos elementos finitos	Marcilio
6	26/3	• Análise modal de vigas • Experimento: modal	Marcilio
7	09/4	• Resposta dinâmica de vigas: implícito/explícito	Marcilio
8	16/4	• Prova 2 : Teoria e Exercício Programa 2	Marcilio
9	23/4	• Elementos finitos planos • Elementos finitos isoparamétricos	Larissa
10	07/5	• Elementos finitos isoparamétricos	Larissa
11	14/5	• Integração numérica	Larissa
12	21/5	• Prova 3 : Teoria e Exercício Programa 3	Larissa

Avaliação

A média final é composta por:

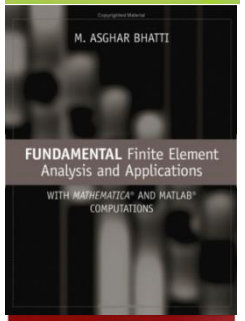
$$\textbf{Média final} = \textbf{Media}_{\textbf{prova}}$$

- **Media** $_{\textbf{prova}}$ significa média **harmônica** das 3 provas;
- **Programas: podem** ser feitos em dupla;
- **Parte teórica da prova:** com consulta ao próprio material;
- **Parte do programa da prova:** apesar do programa poder ser feito em dupla, cada aluno deve resolver o exercício de aplicação do programa da prova **individualmente, no seu próprio notebook**.

Bibliografia Básica

- **AVELINO ALVES FILHO** "*Elementos Finitos, A base da tecnologia CAE*", 5ª Edição – Editora Érica.

- **AVELINO ALVES FILHO** "*Elementos Finitos - A Base da Tecnologia CAE - Análise Dinâmica*", 2ª Edição – Editora Érica.



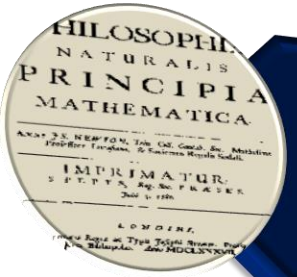
- **M. ASGHAR BHATTI** "*Fundamental Analysis and Applications with Mathematica and MatLab computations*", 1ª Edição – Editora Wiley.

- **KLAUS-JURGEN BATHE** *"Finite Element Procedures"*, 2ª Edição – Editora Prentice Hall.

Em nossas aulas aprenderemos...

- Um pouco de engenharia...
  - MEF.
- Um pouco de postura de engenheiro...
  - Curiosidade;
  - Cuidado;
  - Capricho;
  - Responsabilidade;
  - Atitude.

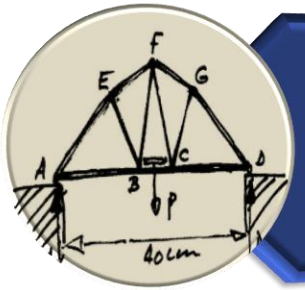
Mecânica



Teórica

Lida com leis fundamentais e princípios da mecânica, com intrínseco valor científico.

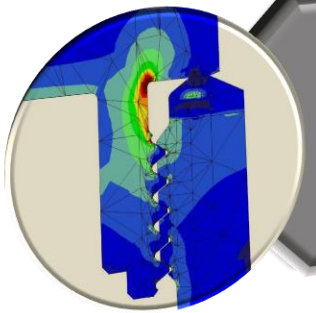
Prova a existência de problemas e soluções.



Aplicada

Transfere o conhecimento teórico para aplicações científicas e de engenharia: construção de modelo matemático do fenômeno físico.

Procura por problemas que se encaixam nas soluções.



Computacional

Resolve problemas específicos através de simulações utilizando ferramentas numéricas implementadas em computadores.

Procura soluções para um dado problema.

Fisolofia do Curso

Segundo Prof. Dr. Avelino Alves Filho (livro texto),

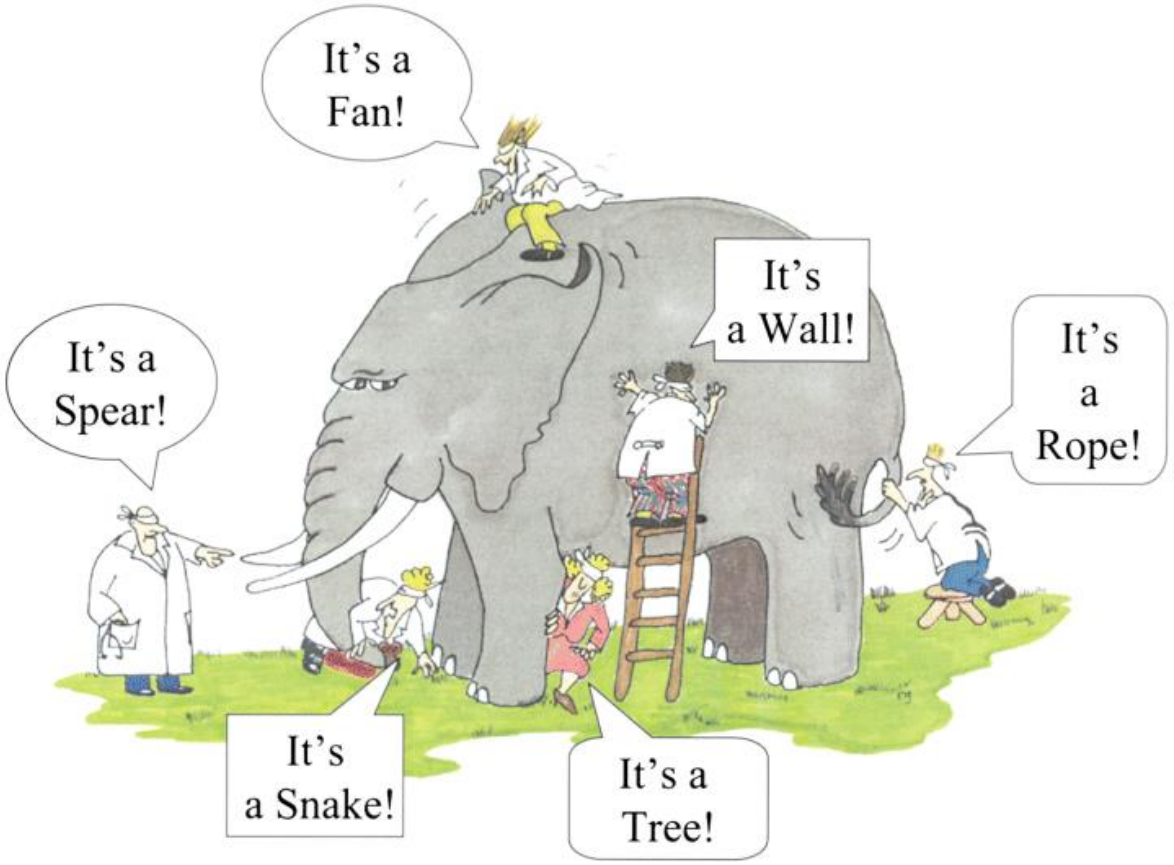
"Um dos pontos mais importantes que contribui comprovadamente para o sucesso e progresso dos recursos de CAE, e que tive a oportunidade de verificar nos anos de trabalho nesta área, está relacionado aos CONCEITOS OBRIGATÓRIOS NA UTILIZAÇÃO DA TECNOLOGIA CAE. Muitos profissionais que iniciam suas aplicações na área de Elementos Finitos encontram dificuldades, pois o aprendizado de uso de software é feito sem base conceitual, confundindo o aprendizado de manuseio de programa com o conhecimento do Método dos Elementos finitos. Justifica-se portanto, a filosofia de abordagem:

SE O ENGENHEIRO NÃO SABE MODELAR O PROBLEMA SEM TER O COMPUTADOR, ELE NÃO DEVE FAZÊ-LO TENDO O COMPUTADOR!"

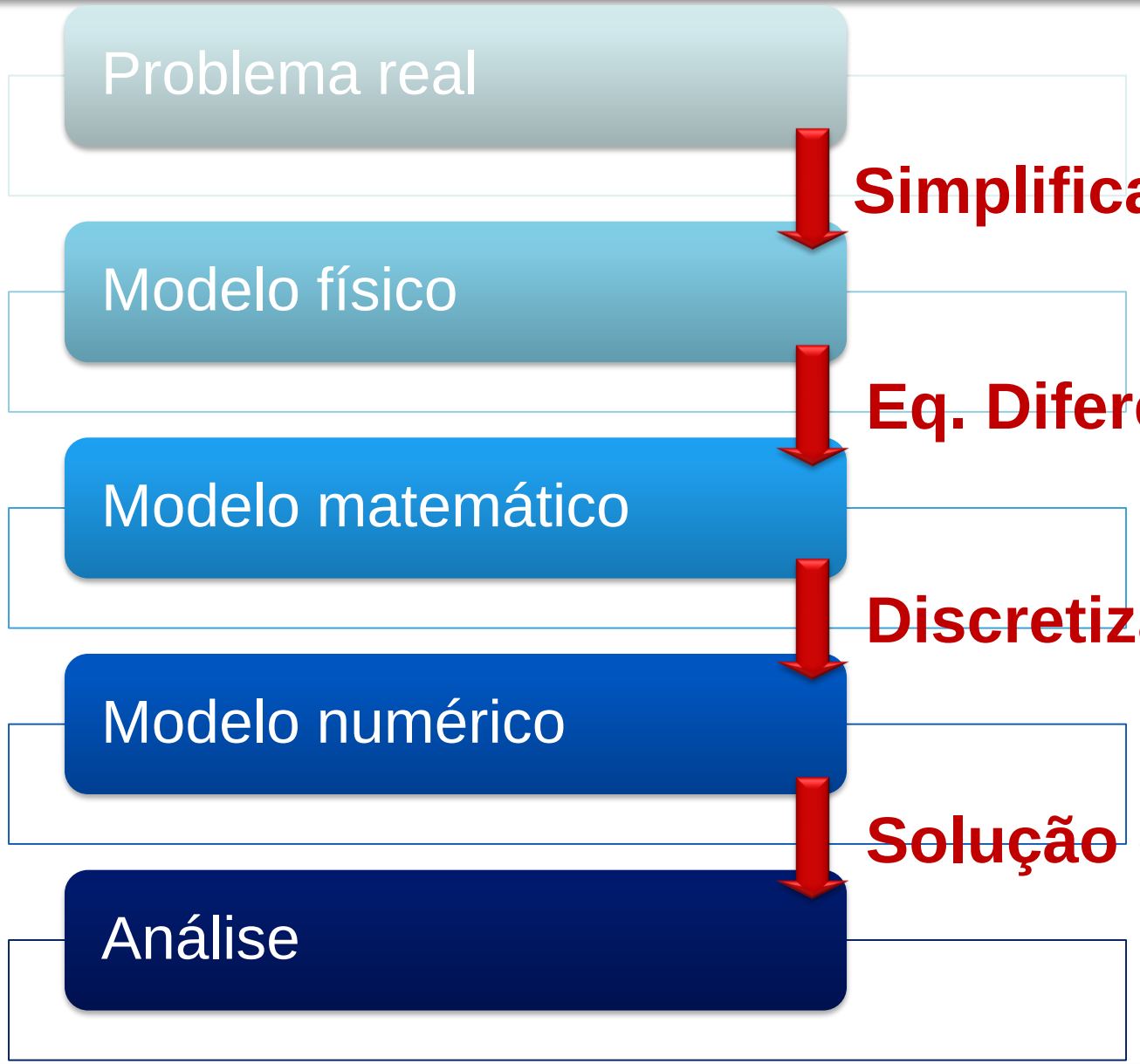
The blind men and the elephant.

Poem by John Godfrey Saxe

And so these men of Indostan,
Disputed loud and long,
Each in his own opinion,
Exceeding stiff and strong,
Though each was partly in the right,
And all were in the wrong!

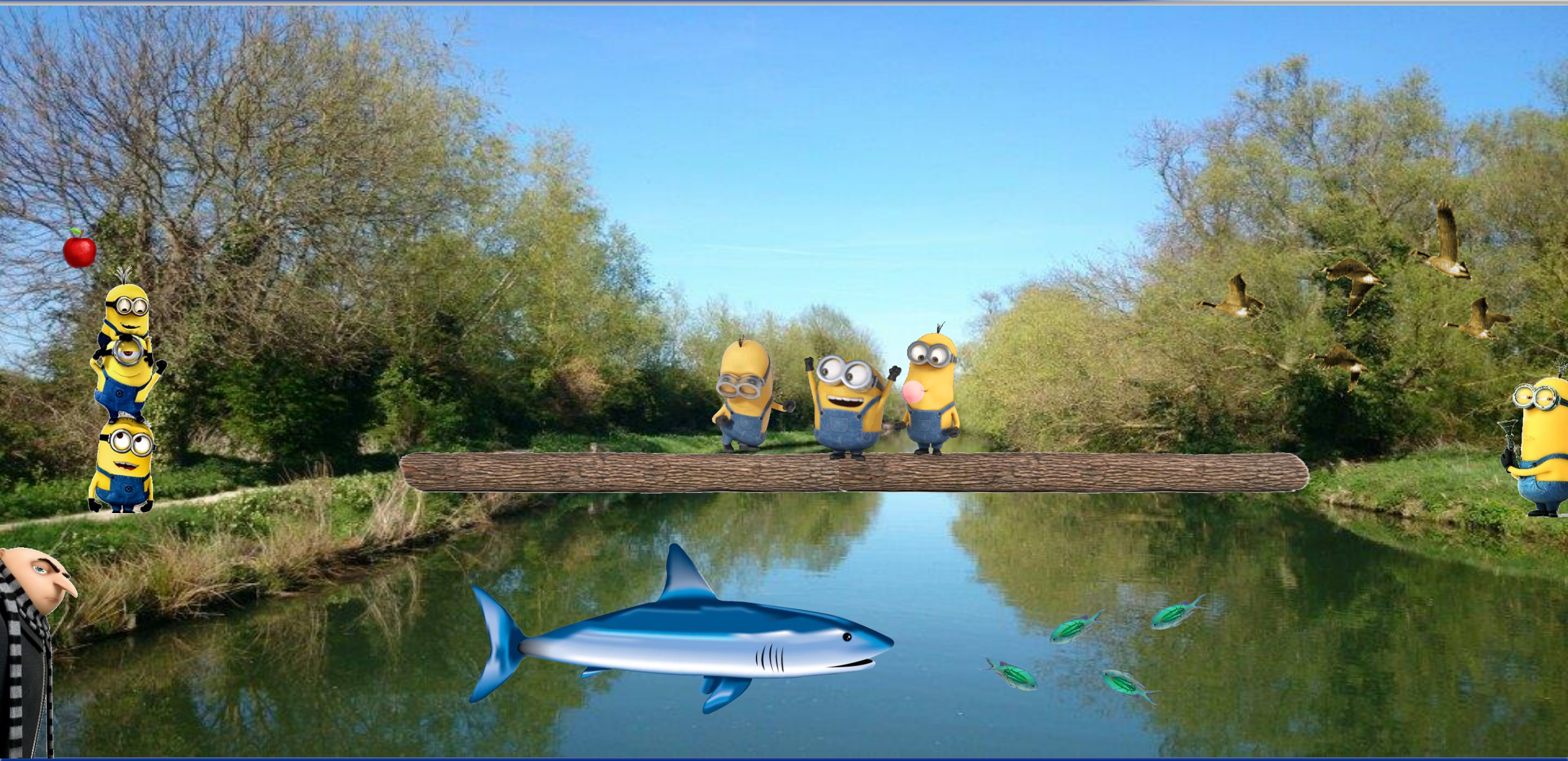


Modelamento e Análise



MODELO FÍSICO

O mundo é tridimensional, dinâmico e não linear



Modelo

- O engenheiro constrói um **modelo**, a partir de um problema que não possui solução exata, e acha uma solução aproximada ótima.

Modelar é o processo de escrever uma equação ou sistema de equações que descreve o movimento de um mecanismo físico. O sucesso do modelo é determinado por quão bem a solução da equação prevê o comportamento observado no sistema real.

O mundo é tridimensional, dinâmico e não linear

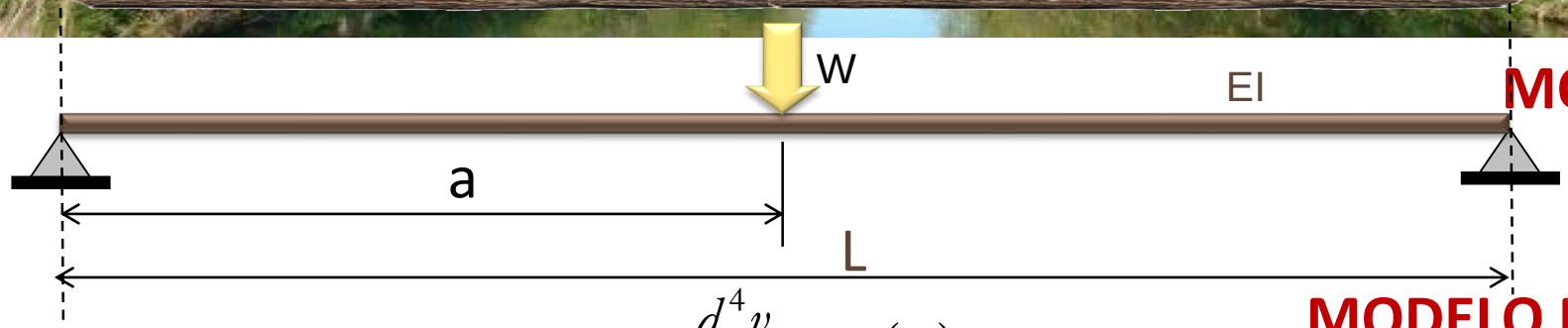
Serão desprezados quaisquer efeitos dinâmicos

Peso concentrado na posição correspondente ao centro de gravidade do corpo

SISTEMA REAL

O tronco tem seção transversal constante e a madeira é um material homogêneo

Apoios ideais



MODELO FÍSICO

Viga bi-apoiada

MODELO MATEMÁTICO

Teoria simples de Viga

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = p(x)$$

Modelo de engenharia (modelo físico)

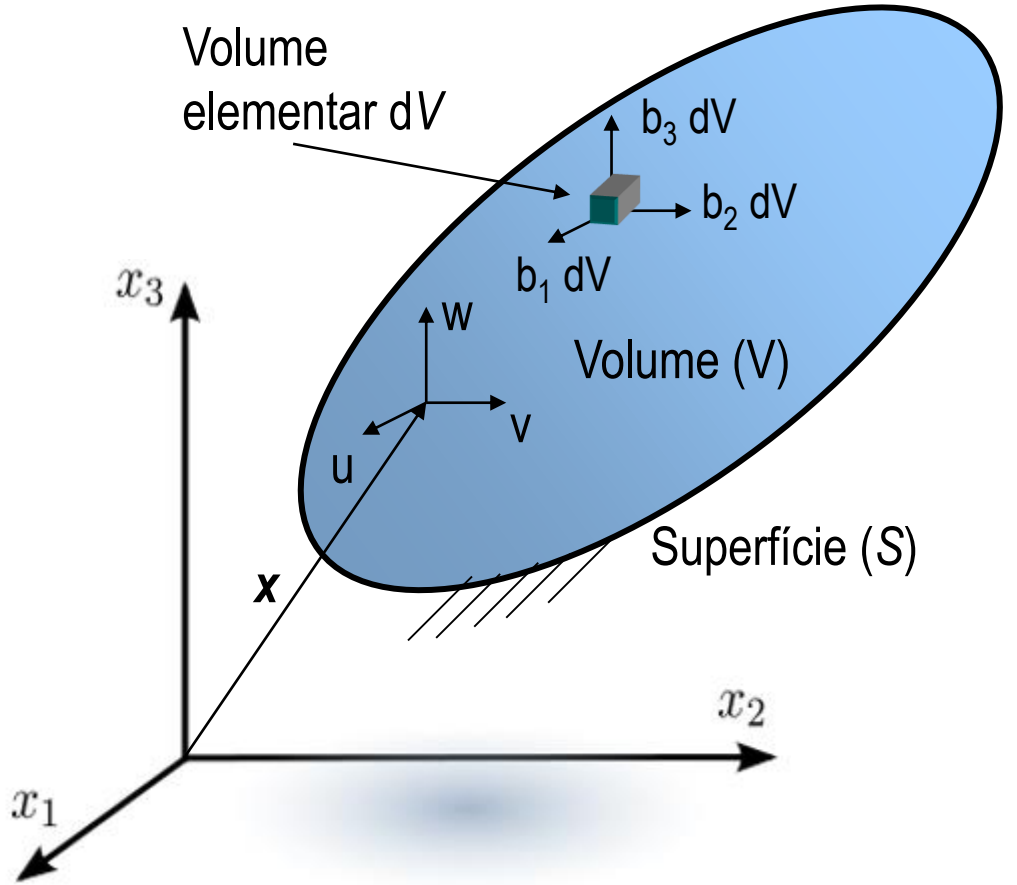
- Um bom modelo deve:
  - Considerar os aspectos essenciais do problema;
  - Desprezar os fatores secundários;
  - Fornecer resultados próximos **o suficiente** das respostas reais.
- Habilidade em modelamento é baseada na visualização do problema físico e relacionamento com o que queremos analisar:
  - Distribuição de temperatura?
  - Campo de tensões?
  - Campo de deformações?
- Se as previsões do modelo não estão de acordo com as respostas reais ou esperadas é necessário refinar o modelo:
  - Incluir aspectos inicialmente desprezados.

MODELO MATEMÁTICO

Forças de volume

As forças de volume são descritas sempre por unidade de massa ou de volume e não necessitam de contato para transmissão. São exemplos:

- Gravidade;
- Forças eletromagnéticas;
- Forças de inércia;
- Coriolis, centrifuga, etc.



Forças de volume:

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

Se o corpo é acelerado, então as forças de inércia,

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \rho\ddot{u} \\ \rho\ddot{v} \\ \rho\ddot{w} \end{Bmatrix}$$

Forças totais de volume:

$$\mathbf{X} = \mathbf{b} - \rho\ddot{\mathbf{u}}$$

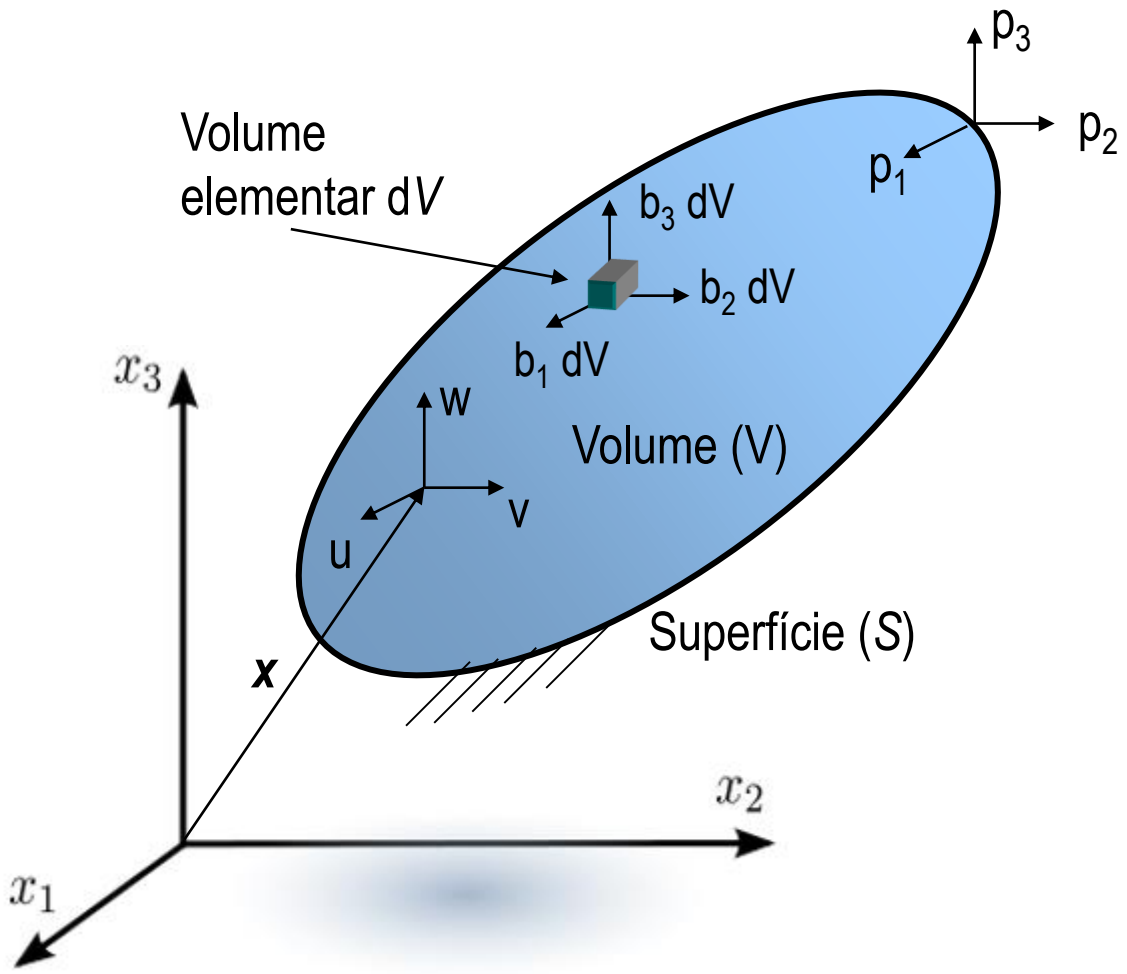
Forças de superfície

As forças de superfície são descritas sempre por unidade área e necessitam de contato para transmissão. São exemplos:

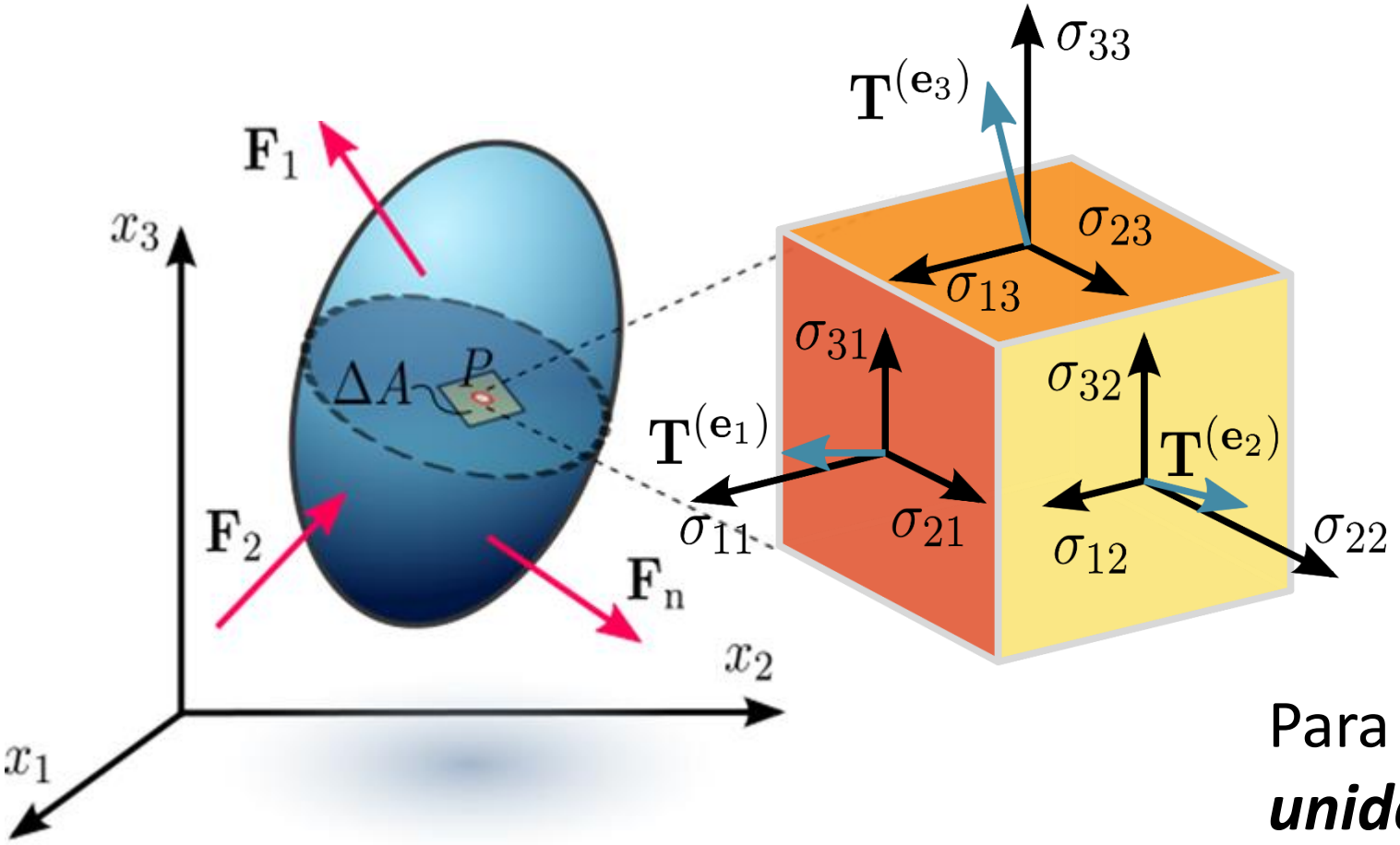
- Atrito;
- Força normal;
- Força cisalhante;
- Pressão, etc.

Força distribuída por unidade de superfície

$$\mathbf{T}_S = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix}$$



Forças internas



Se extrairmos um *volume elementar* do corpo vamos ver que, devido às forças externas aplicadas, há forças de reação.

Para o cubo, as ***forças internas por unidade de área*** (setas azuis), em cada face, podem ser decompostas em três componentes ortogonais.

By Sanpaz - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5736462

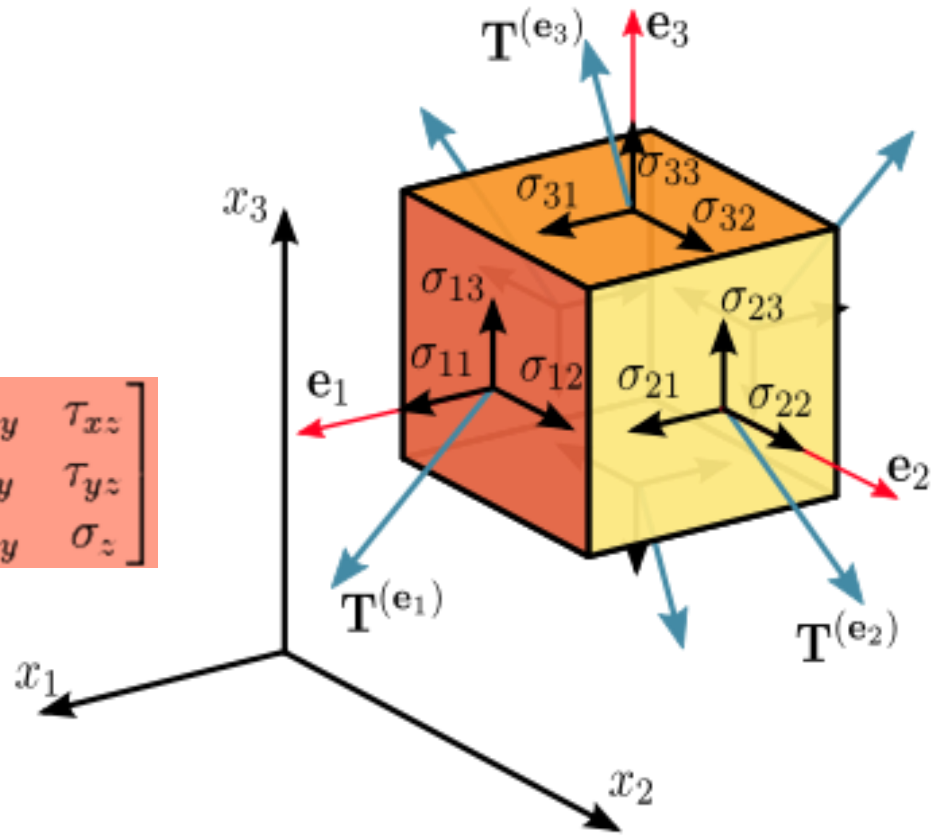
Pode-se decompor os vetores de tensão em componentes normais e cisalhantes

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_1)} = T_1^{(\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 + T_2^{(\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_2 + T_3^{(\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_3 = \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_2)} = T_1^{(\mathbf{e}_2)}\mathbf{e}_1 + T_2^{(\mathbf{e}_2)}\mathbf{e}_2 + T_3^{(\mathbf{e}_2)}\mathbf{e}_3 = \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_3)} = T_1^{(\mathbf{e}_3)}\mathbf{e}_1 + T_2^{(\mathbf{e}_3)}\mathbf{e}_2 + T_3^{(\mathbf{e}_3)}\mathbf{e}_3 = \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_i)} = T_j^{(\mathbf{e}_i)}\mathbf{e}_j = \sigma_{ij}\mathbf{e}_j.$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} = \begin{bmatrix}\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_1)}\\ \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_2)}\\ \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_3)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx}\\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}\\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}\end{aligned} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}$$



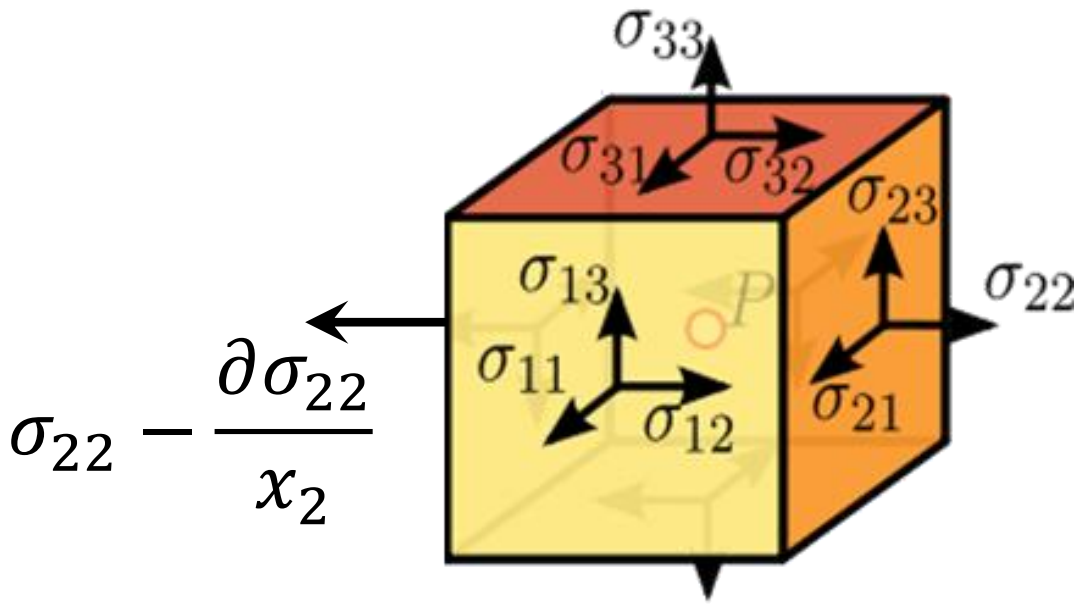
https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_stress_tensor

Considere o equilíbrio de um volume diferencial para obter as 3 equações de equilíbrio,

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33_z}}{\partial x_3} + b_3 = 0$$



De forma compacta, temos:

Forma forte de equilíbrio

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Equilíbrio Estático

$$\partial^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

Equilíbrio Dinâmico

$$\partial^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = m \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{t^2}$$

Onde $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}$ e $\partial = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}$

"Dado o carregamento externo aplicado (em S^T e em V) e os deslocamentos prescritos (em S^u) queremos encontrar deslocamentos, deformações e tensões, que mantêm o corpo em equilíbrio."

Equações de equilíbrio

$$\partial^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad \text{em} \quad V$$

Condições de contorno

1. **Deslocamentos no contorno:** Deslocamentos são prescritos na parte S^u do contorno

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{presc} \quad \text{em} \quad S^u$$

2. **Forças no contorno:** Forças são especificadas na parte S^T do contorno.

Lei constitutiva

- A lei constitutiva relaciona tensões e deformações.
- A lei constitutiva elástica linear é a mais simples lei constitutiva!
- Por definição, o material elástico apresenta as seguintes características,

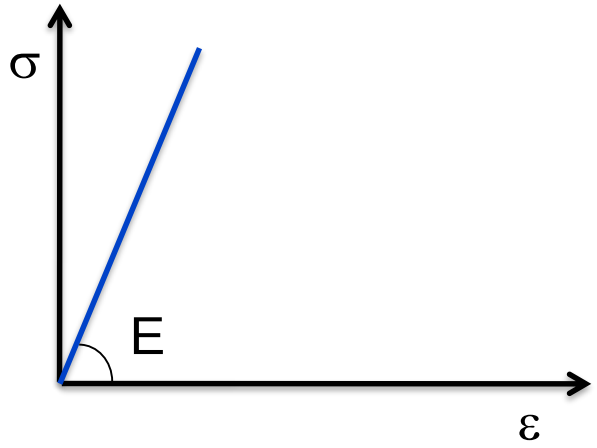
i. Relação tensão deformação é linear;

ii. O comportamento do material é completamente reversível;

iii. A tensão em um ponto depende apenas da medida de deformação total naquele ponto;

iv. Deformações são pequenas.

Caso unidimensional:



$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Material elástico linear isotrópico:

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

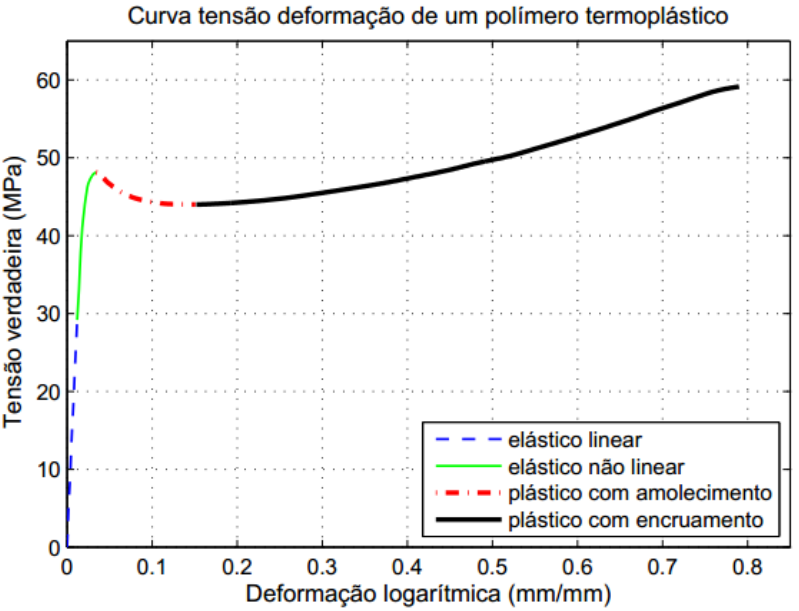
Rigidez: $\boldsymbol{D}$

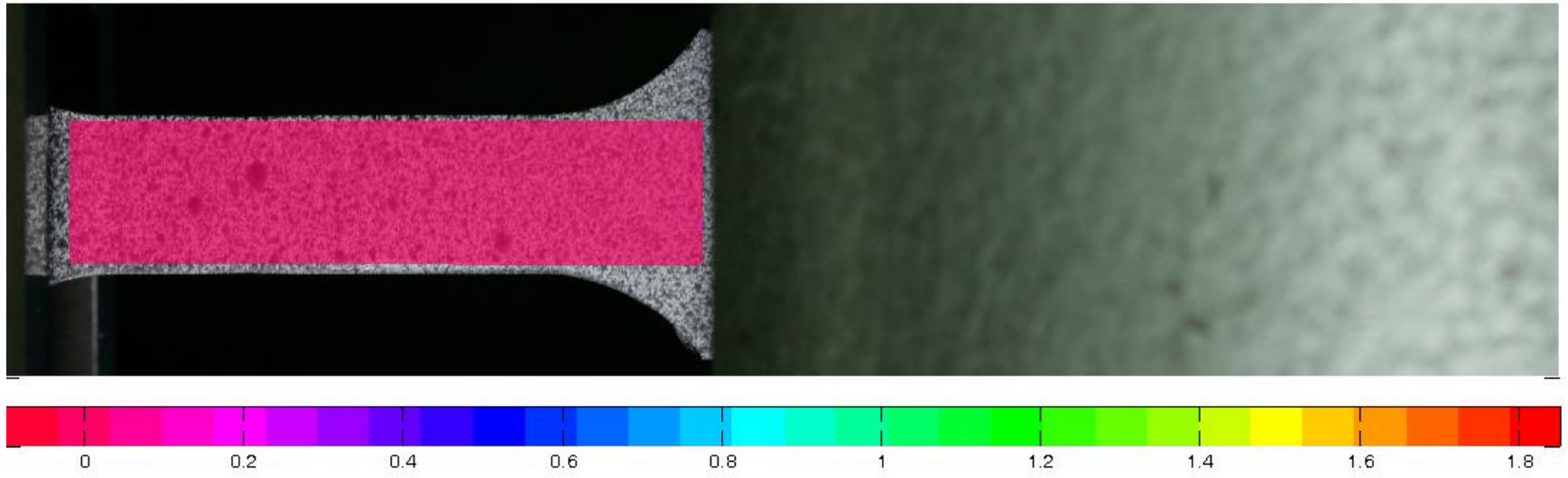
Flexibilidade = $\boldsymbol{D}^{-1}$

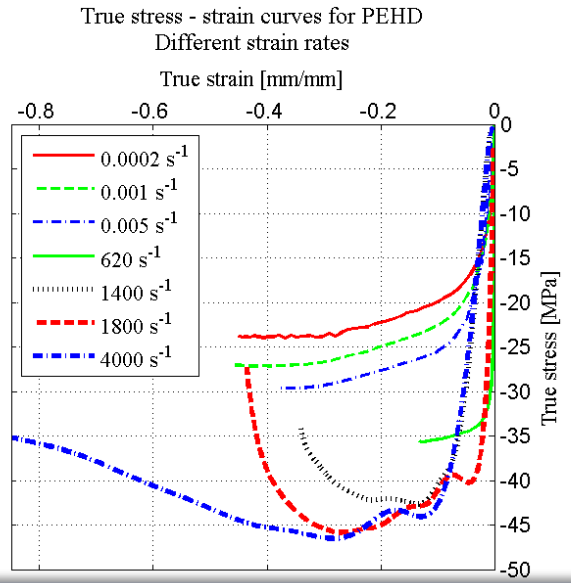
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}$$

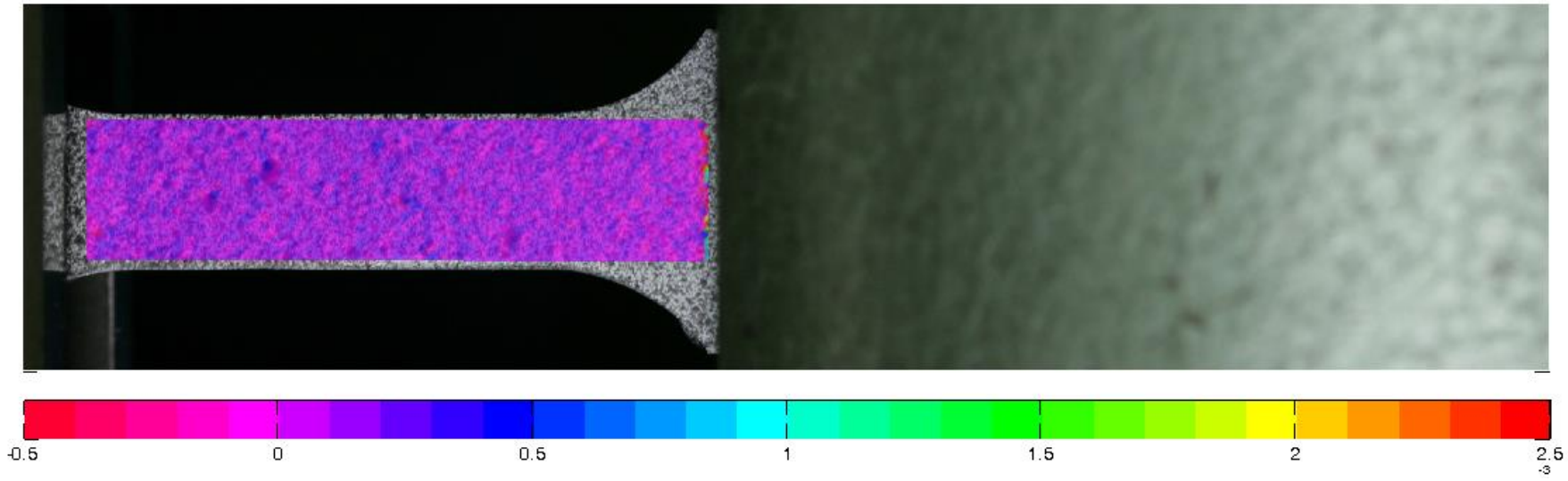
Rigidez

Outros materiais









Casos particulares

Tensão plana:

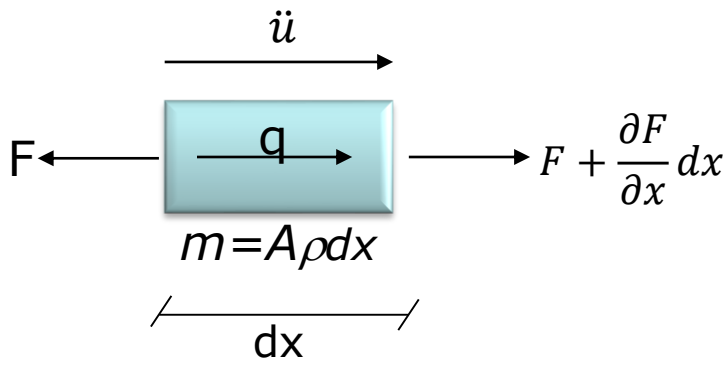
$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

Deformação plana:

$$\boldsymbol{D} = = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

Vamos acordar! Determinando eq. governante

- Fazer somatório de forças igual a massa vezes aceleração!

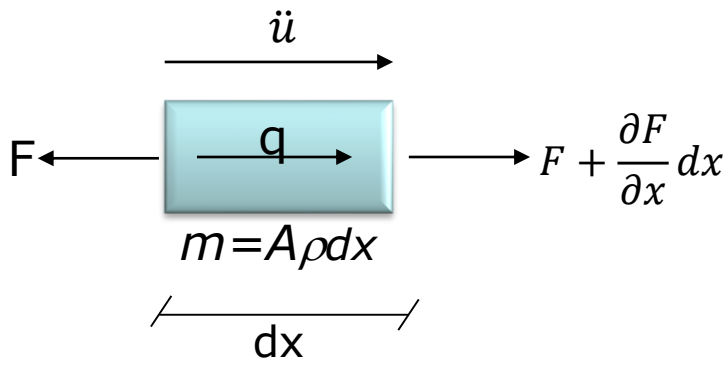


$$A(x)\rho dx\ddot{u} + F = qdx + F + \frac{\partial F}{\partial x} dx$$

$$A\rho\ddot{u} = q + \frac{\partial F}{\partial x}$$

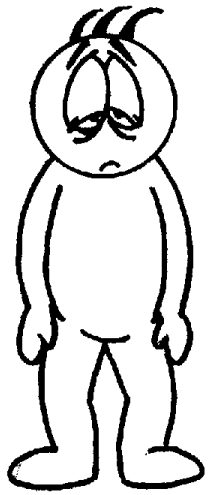
Vamos acordar! Determinando eq. governante

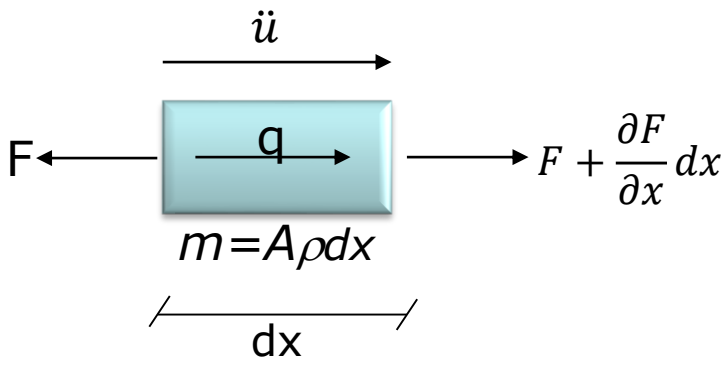
- Utilizando a lei de Hooke e as definições de tensão e deformação, encontre a equação governante do sistema.
  Dica: utilizar a definição de força e lei de Hooke, depois a definição de deformação e por último a resultante do equilíbrio de forças!



$$\left.\begin{array}{l} \sigma = \dfrac{F}{A} \\ \sigma = E\varepsilon \end{array}\right\} F = AE\varepsilon \left.\begin{array}{l} \\ \varepsilon = \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{array}\right\} F = AE\frac{\partial u}{\partial x} \left.\begin{array}{l} \\ \\ A\rho\ddot{u} = q + \dfrac{\partial F}{\partial x} \end{array}\right\} \frac{\partial}{\partial x}\left(AE\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q = A\rho\ddot{u}$$

Determinando as condições de contorno





$$\frac{\partial}{\partial x}\left(AE\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q = A\rho\ddot{u}$$

Precisamos de:

- Duas condições de contorno;

$$u(x_q, t) = u_{x_q} \quad \text{ou} \quad A(x_q)E(x_q)\frac{\partial u(x_q, t)}{\partial x} = P_{x_q}(t)$$

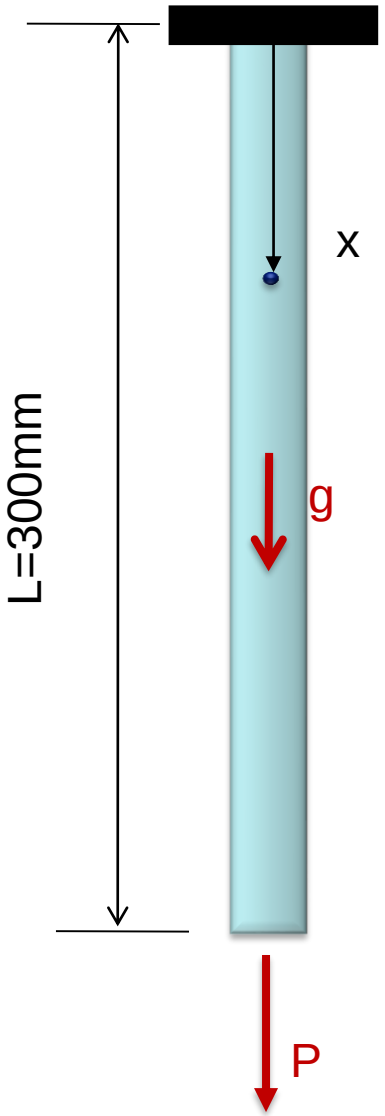
- Duas condições iniciais.

$$u(x, 0) = u_0 \qquad \dot{u}(x, 0) = v_0$$

Exercício exemplo

A barra de alumínio (E=72GPa) ao lado tem 300mm de comprimento e *seção transversal constante* A=120 mm^2. Calcule os deslocamentos da barra, considerando:

1. Força P;
2. Peso próprio;
3. Peso próprio + força P.

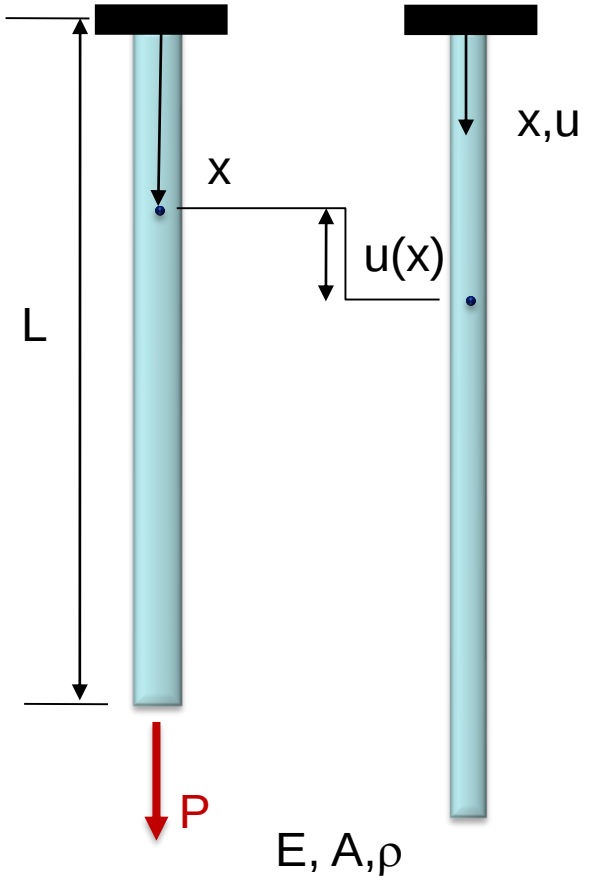


Equilíbrio estático: $$\frac{d\sigma}{dx} = 0$$

Lei constitutiva:

Elástica linear $$\sigma = E\varepsilon$$

Cinemática: $$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$



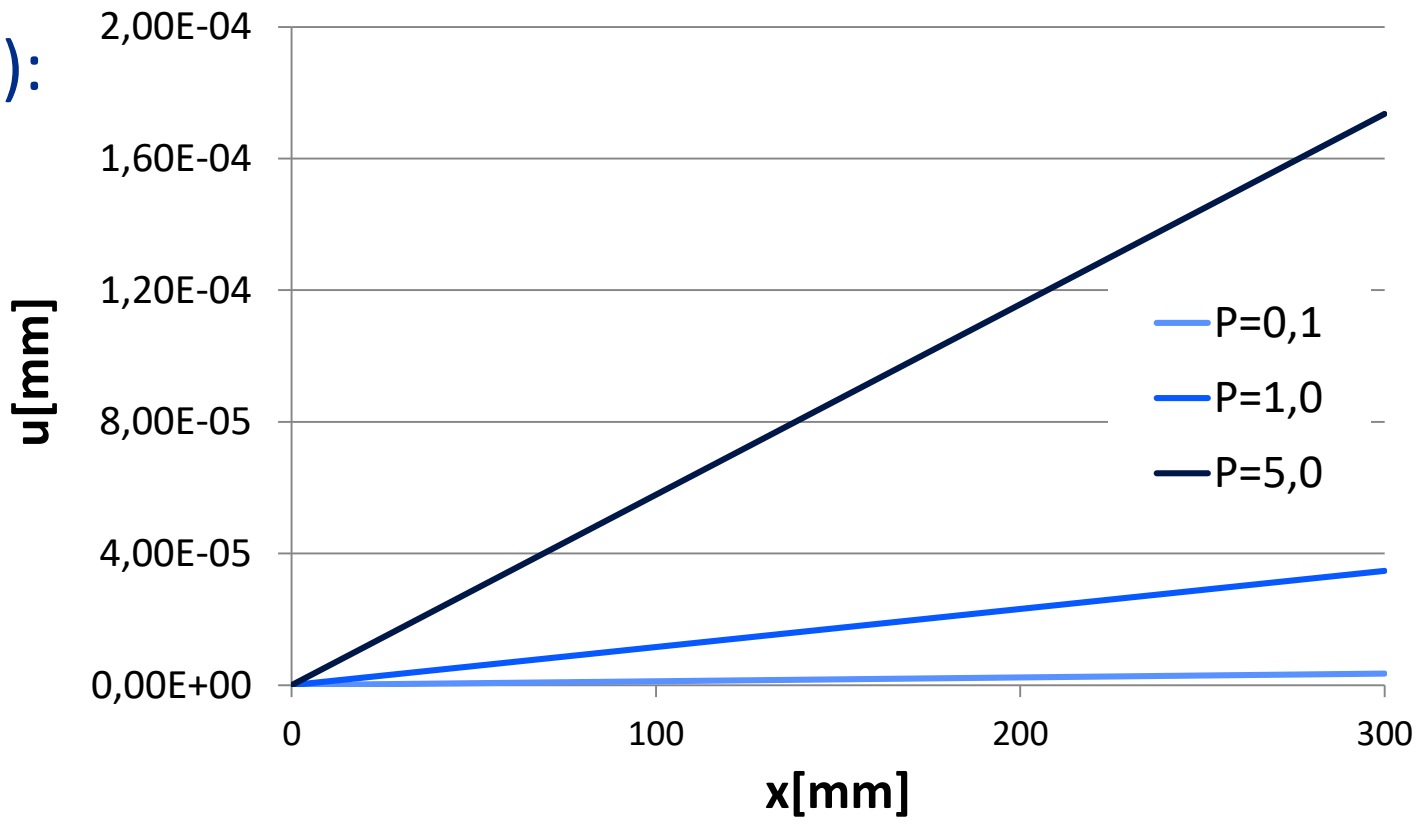
Equação diferencial (ODE):

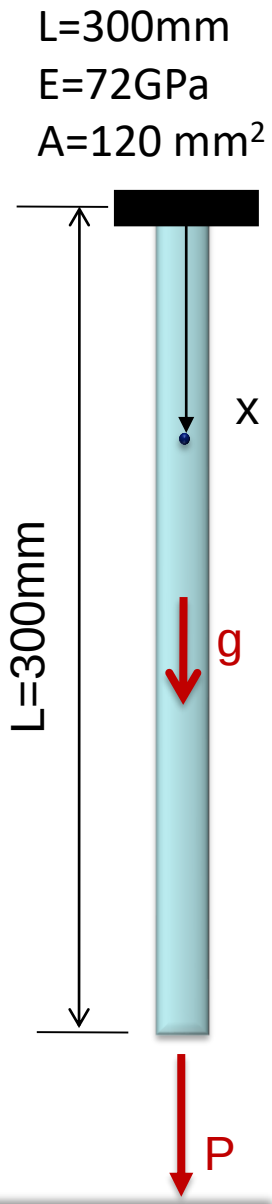
$$\frac{d}{dx}\left(E\frac{du}{dx}\right)+\rho g=0$$

Condições de contorno:

$$u(0)=0$$

$$F_{x=L}=P=EA\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=L}\Rightarrow\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=L}=\frac{P}{EA}$$





Solução analítica do problema:

$$u(x)=\frac{P}{EA}x$$

$$u(x)=\frac{P}{EA}x$$

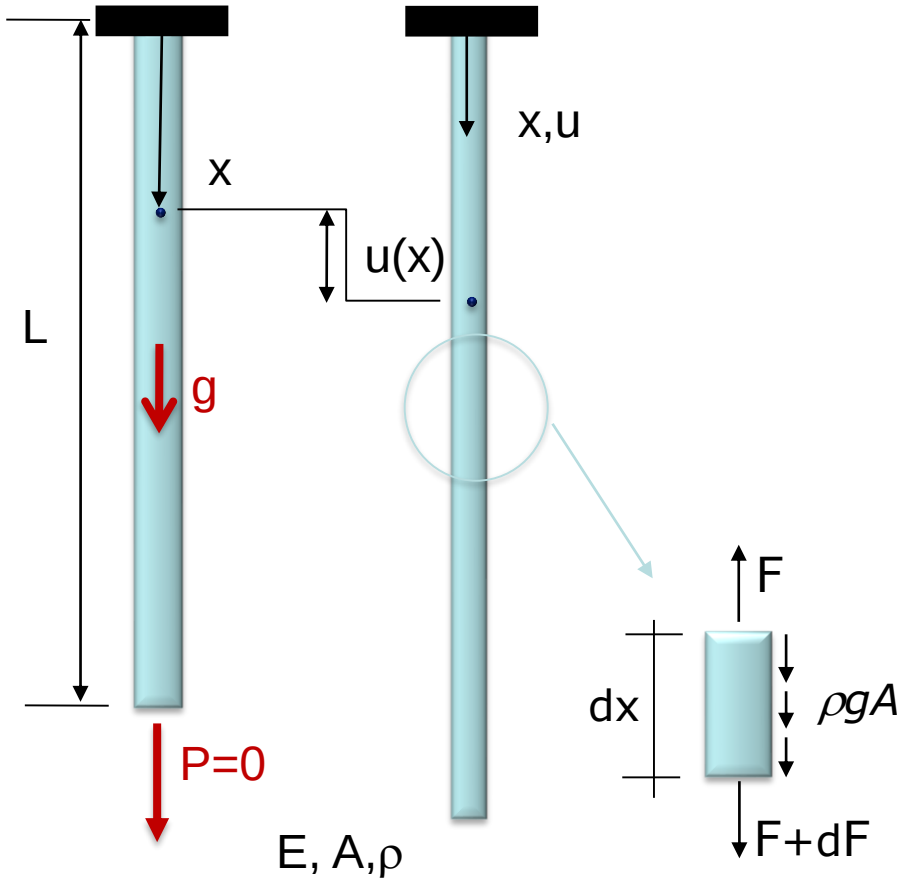
2. Peso Próprio

Equilíbrio estático: $$\frac{d\sigma}{dx} = -\rho g$$

Lei constitutiva:

Elástica linear $$\sigma = E\varepsilon$$

Cinemática: $$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$



Equação diferencial (ODE):

$$\frac{d}{dx}\left(E\frac{du}{dx}\right)+\rho g=0$$

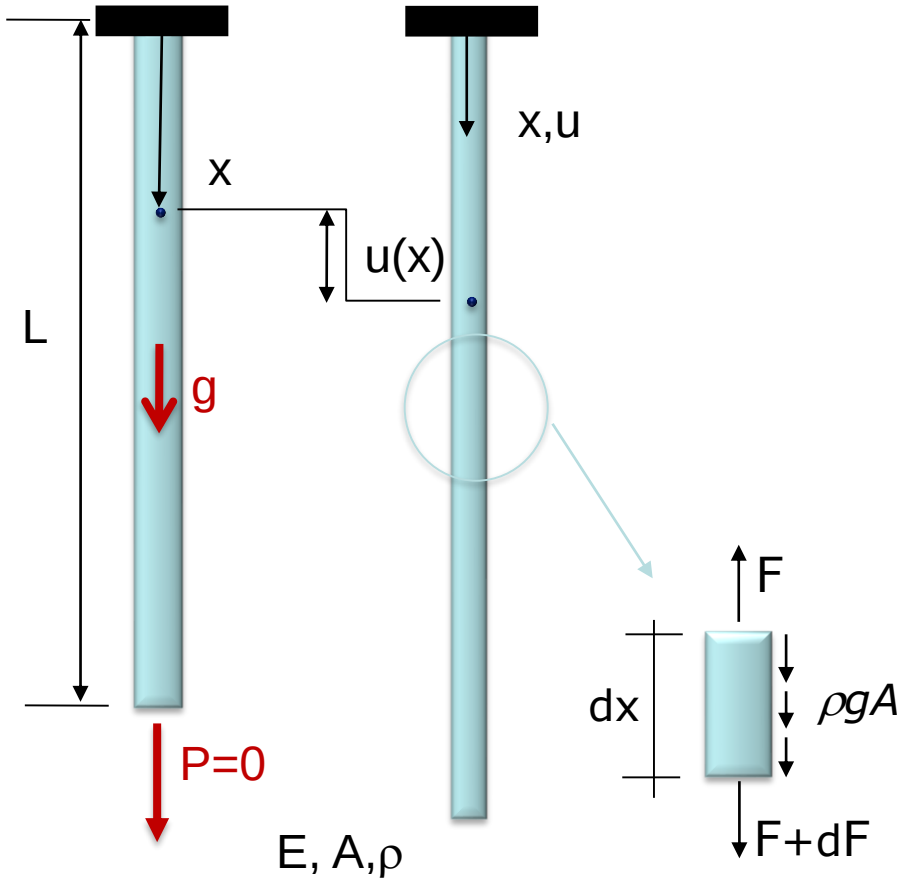
Condições de contorno:

$$u(0)=0$$

$$P_{x=L}=0=EA\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=L}\Rightarrow\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=L}=0$$

Solução analítica do problema:

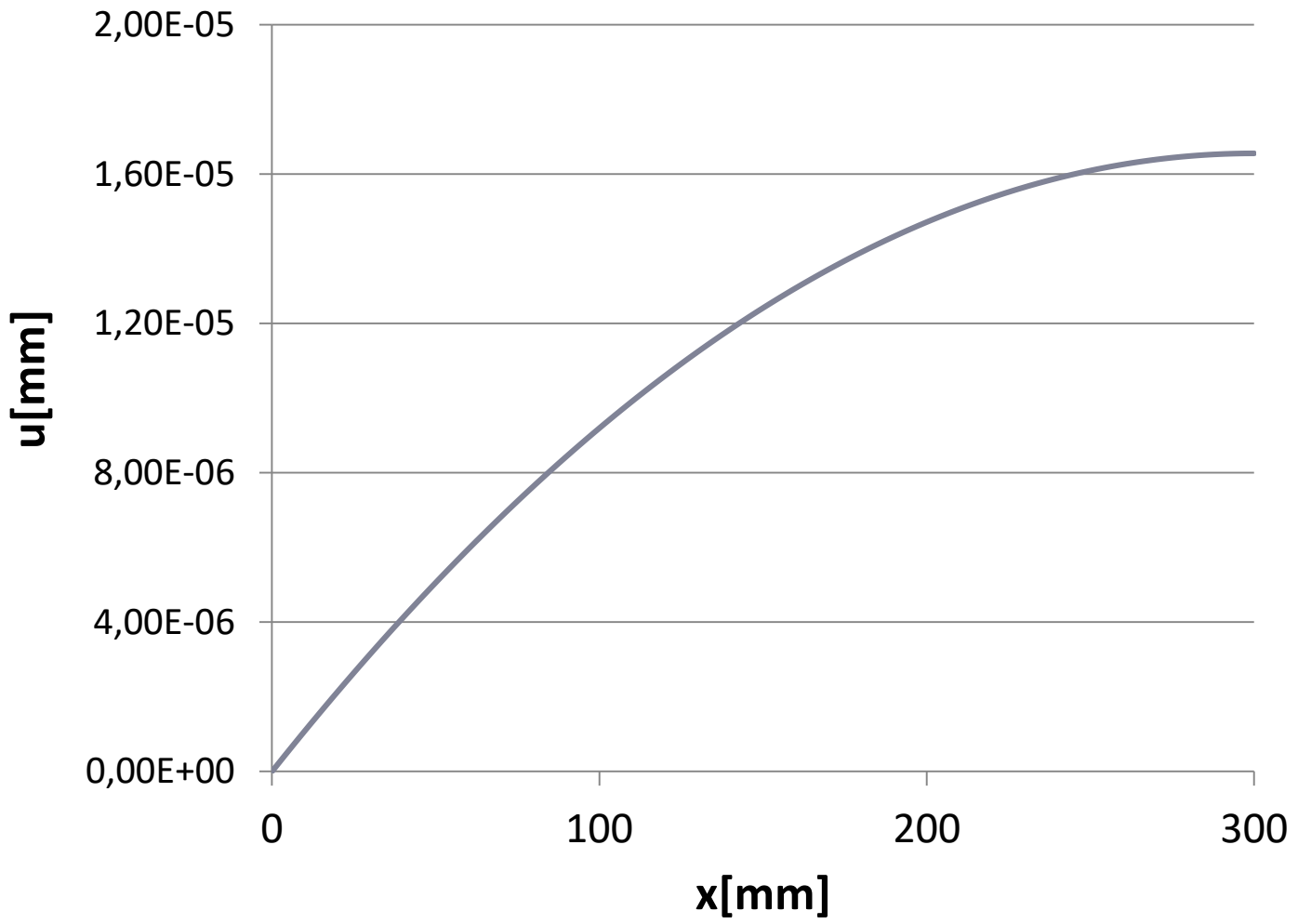
$$u(x)=\frac{\rho g}{E}\left(L-\frac{x}{2}\right)x$$

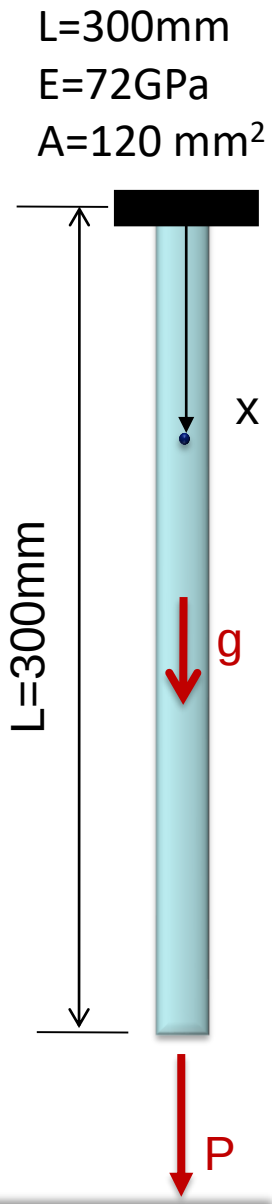


2. Peso Próprio

$$u(x) = \frac{\rho g}{E}\left(L - \frac{x}{2}\right)x$$

g=9,81 m/s²
L=300mm
E=72GPa
A=120 mm²
ρ= 2,7000E-06 kg/mm³





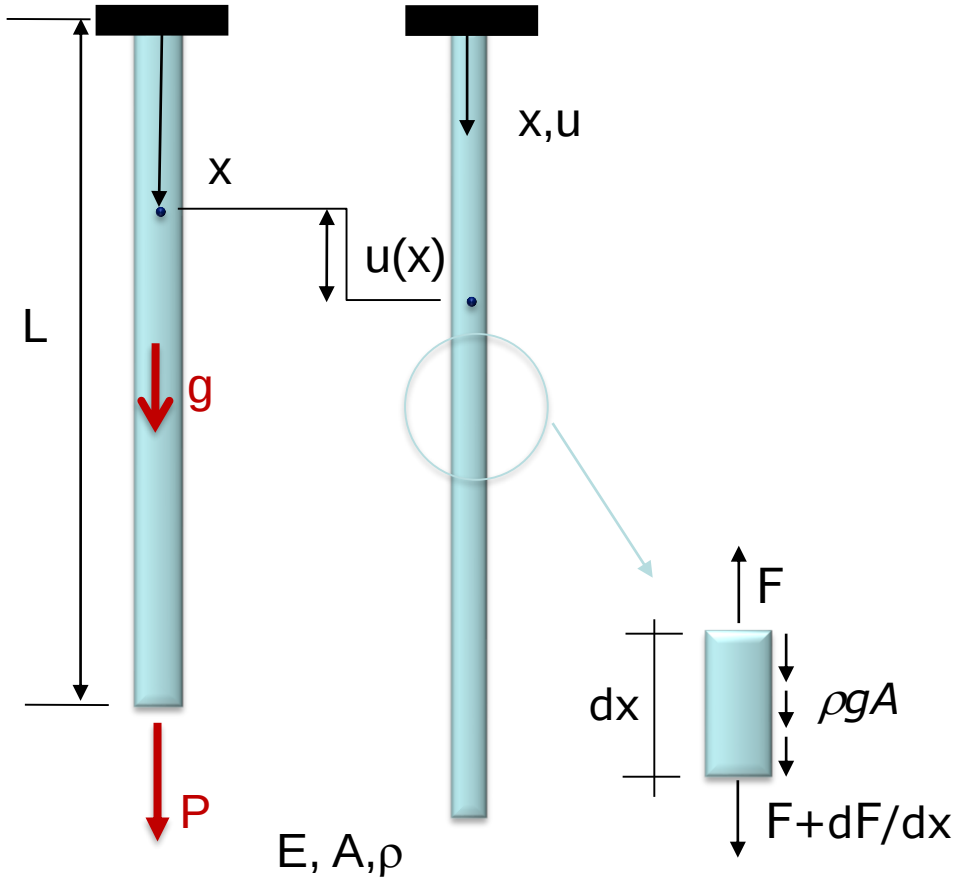
3. Peso próprio + Força P

Equilíbrio estático: $$\frac{d\sigma}{dx} = -\rho g$$

Lei constitutiva:

Elástica linear $$\sigma = E\varepsilon$$

Cinemática: $$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$



3. Peso próprio + Força P

Equação diferencial (ODE):

$$\frac{d}{dx}\left(E\frac{du}{dx}\right)+\rho g=0$$

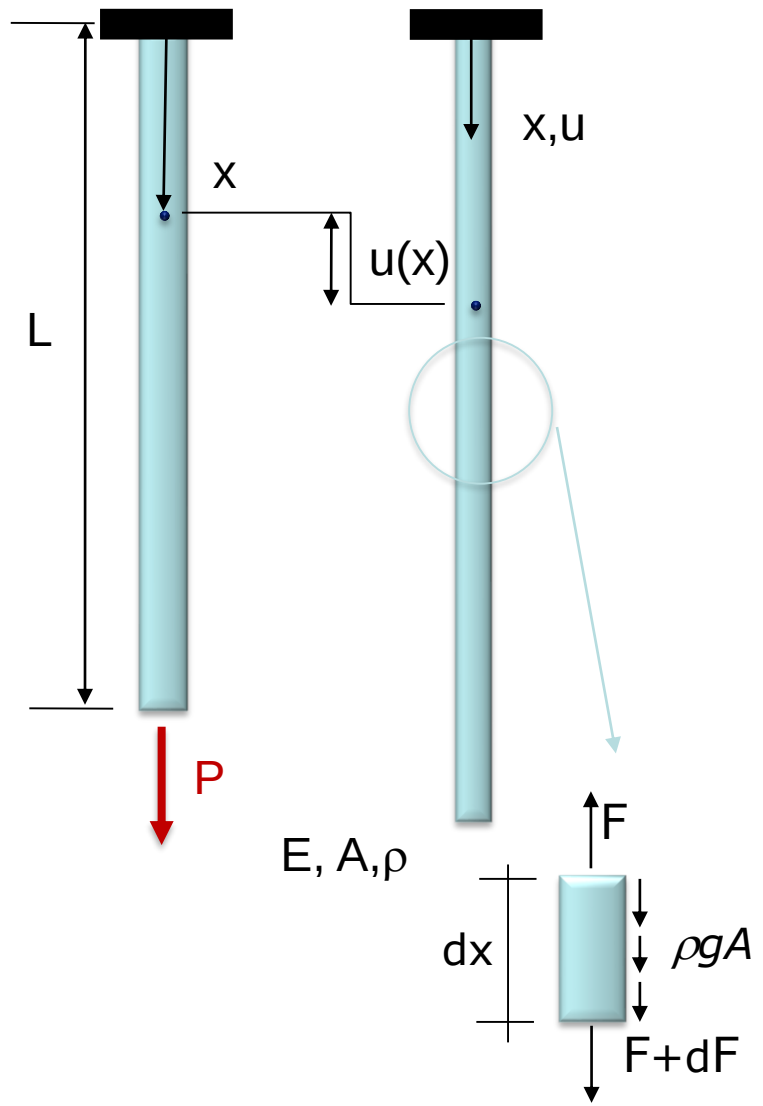
Condições de contorno:

$$u(0)=0$$

$$F_{x=L}=P=EA\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=L}\Rightarrow\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=L}=\frac{P}{EA}$$

Solução analítica do problema:

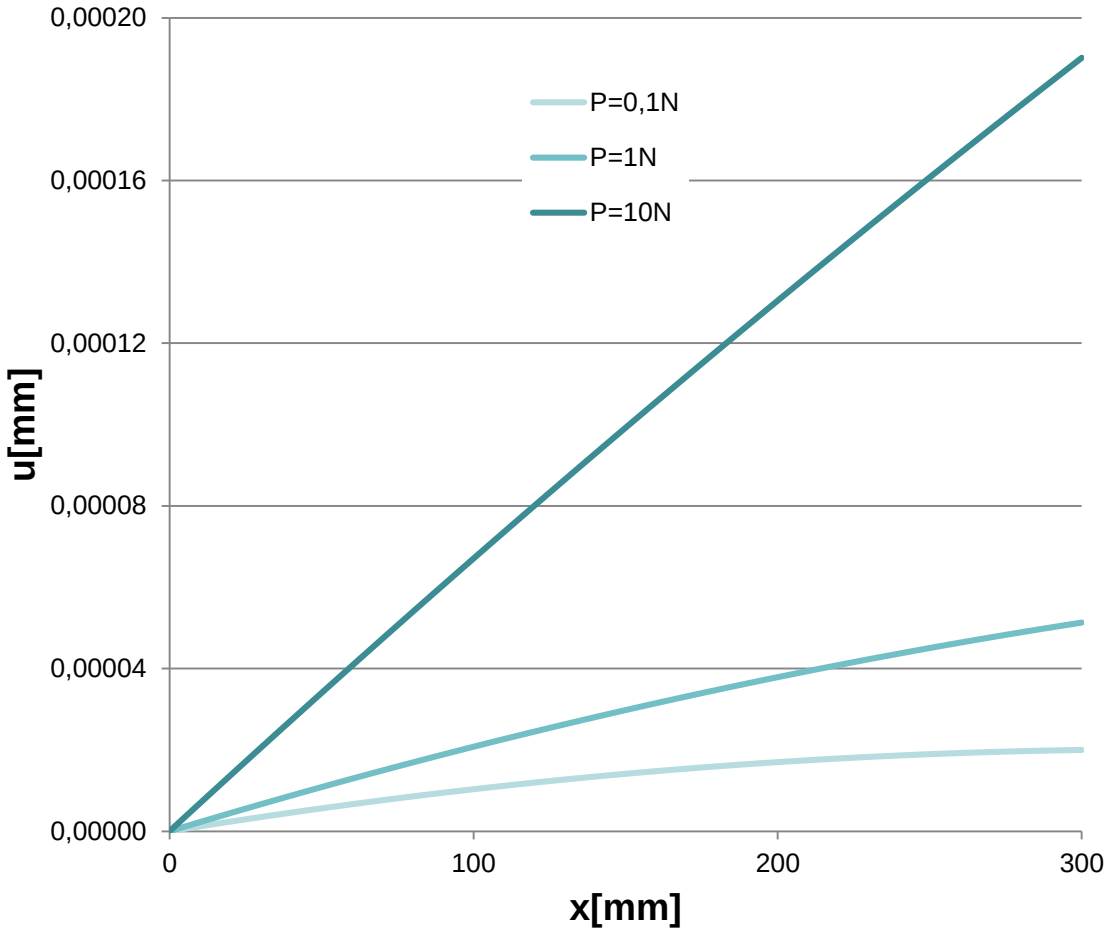
$$u(x)=\left[\frac{\rho g}{E}\left(L-\frac{x}{2}\right)+\frac{P}{EA}\right]x$$

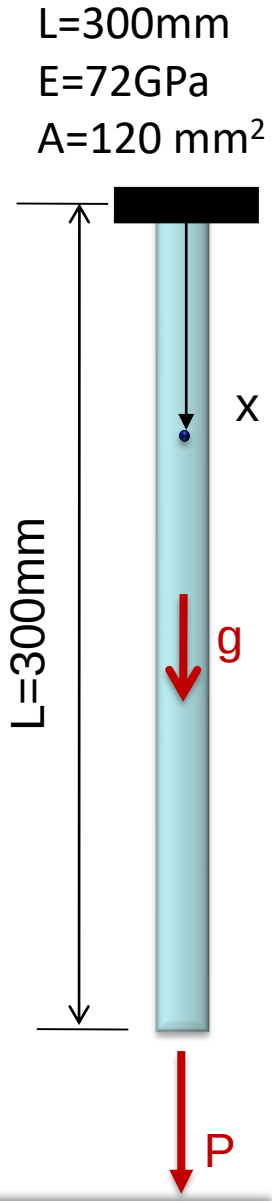


3. Peso próprio + Força P

$$u(x) = \left[\frac{\rho g}{E} \left(L - \frac{x}{2} \right) + \frac{F}{EA} \right] x$$

g=9,81 m/s^2
L=300mm
E=72GPa
A=120 mm^2
ρ= 2,7000E-06 kg/mm^3

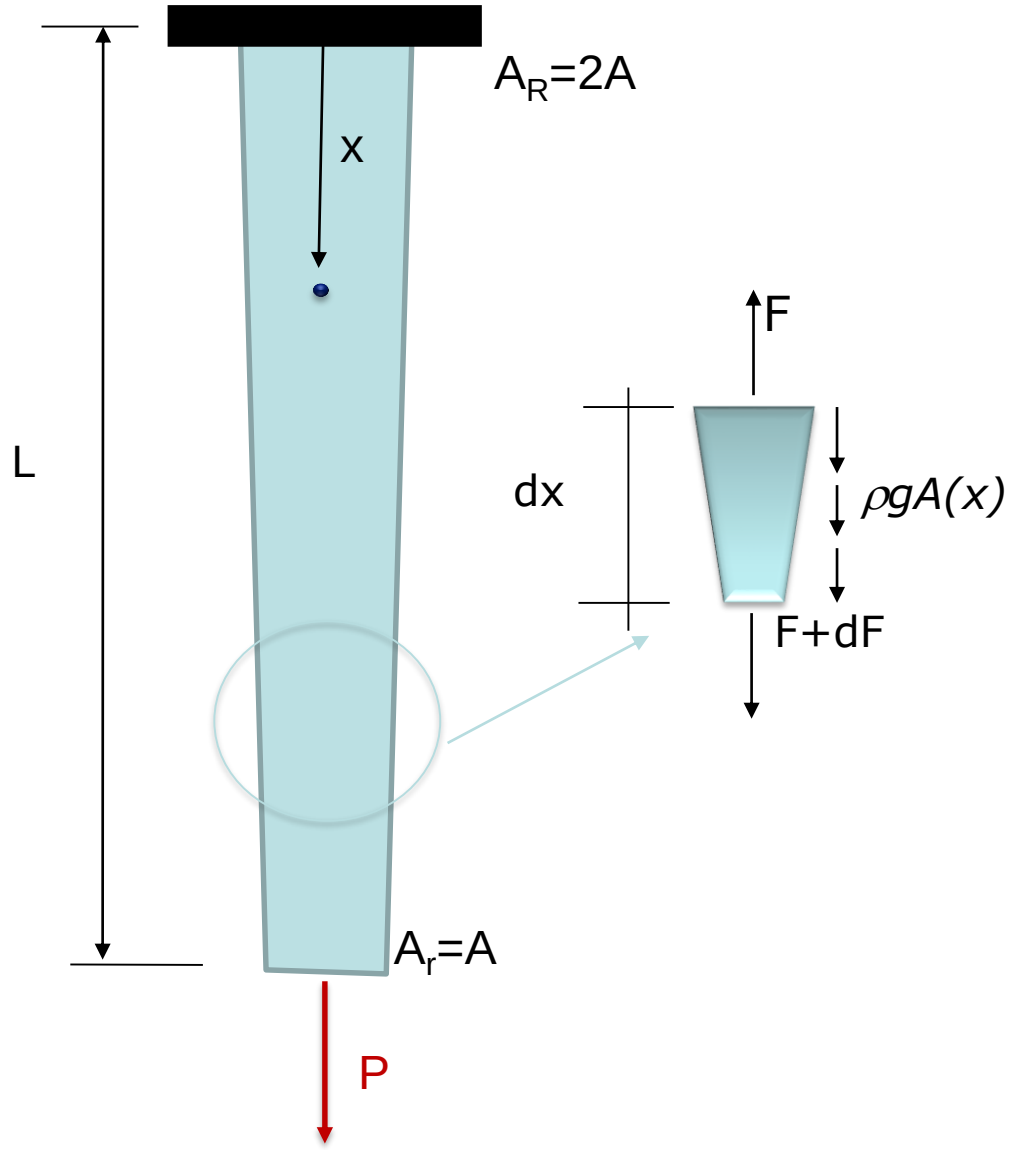




Desafio para casa!

Supondo um problema mais complexo de uma barra de alumínio de comprimento L, com seção variável: A_R=2A e A_r=A.
Supondo que a barra esteja tracionada por uma força P, calcule analiticamente seus deslocamentos, desprezando o peso próprio.

$$u(x) = \frac{PL}{E(A_R - A_r)} \ln\left(\frac{A_R}{A_R - \frac{A_R - A_r}{L} x} \right)$$

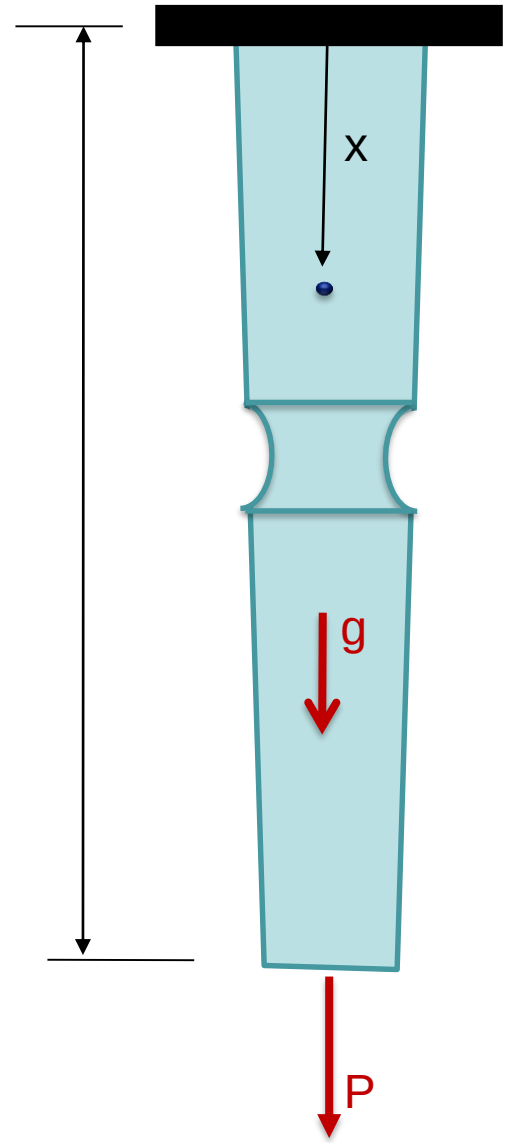


Acadêmico x Realidade

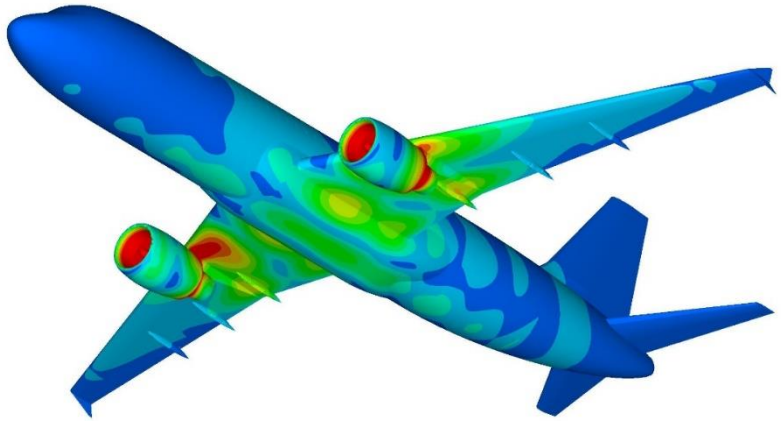
A medida que nos distanciamos dos problemas acadêmicos e nos aproximamos dos problemas reais de engenharia, estes vão se tornando mais complexos!

Dessa forma, encontrar a solução da equação diferencial, quando esta existir, é um trabalho árduo...

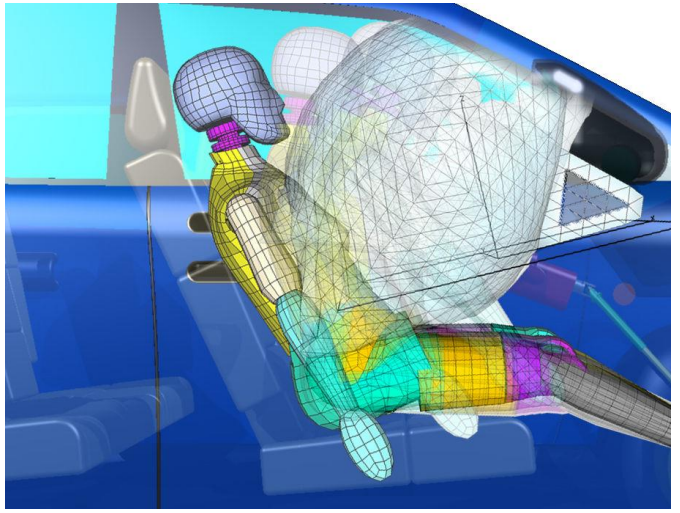
Além disso, os casos foram unidimensionais...



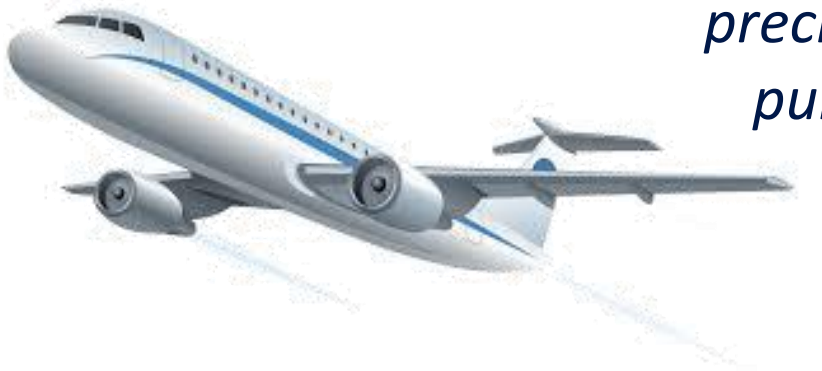
Engenharia é uma arte!



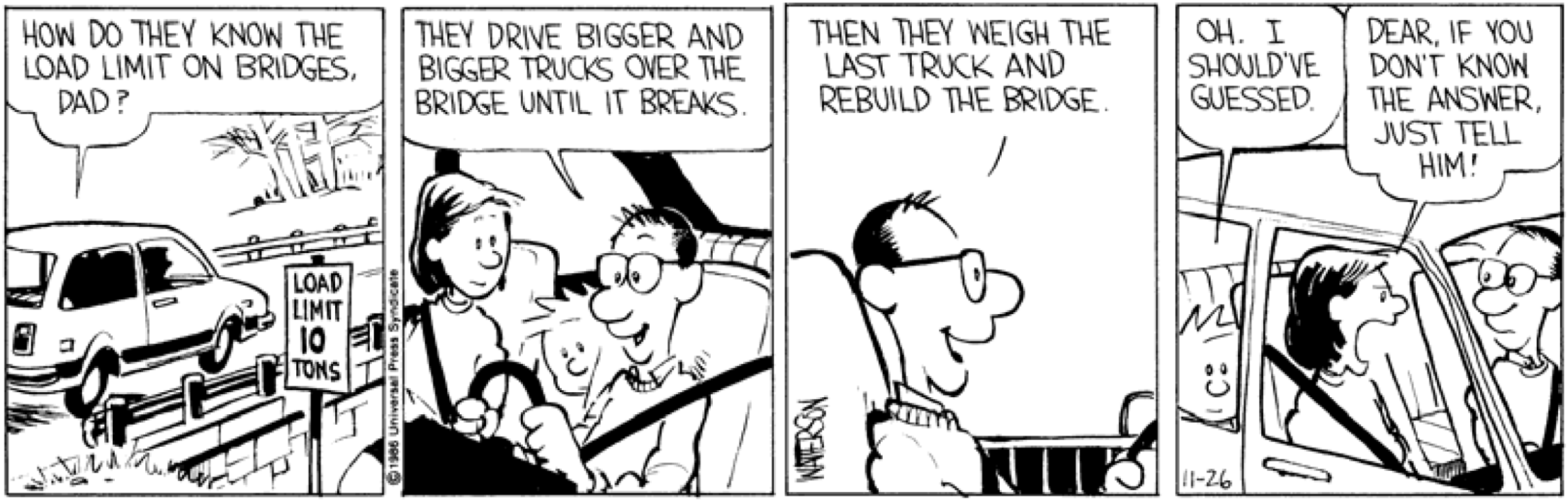
O problema é bem resumido pelo Dr A. R. Sykes, do *British Institution of Engineers*, que, em 1976, disse:



Engineering is the art of modelling materials we do not wholly understand, into shapes we cannot precisely analyse, so as to withstand forces we cannot precisely assess, in such a way that the public has no reason to suspect the extent of our ignorance.



Então como fazer?



Problemas devem ser simplificados usando certas aproximações...

Métodos numéricos são ***aproximações*** dos modelos matemáticos.

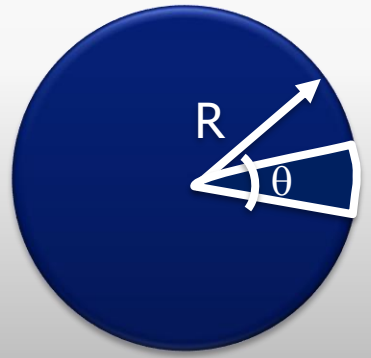
MODELO NUMÉRICO

Métodos numéricos

- A análise de estruturas envolve a solução de equações diferenciais parciais.
- Soluções analíticas exatas (fechadas) só existem em casos especiais:
  - Geometria e condições de contorno simples.
  - Certos tipos de carregamento.
  - Material homogêneo.
- A solução de problemas reais requer a utilização de métodos numéricos (aproximados):
  - Método das Diferenças Finitas.
  - **Método dos Elementos Finitos.**
  - Método dos Elementos de Contorno
  - Método espectral...

Discretização do problema

Determinação do perímetro de um círculo.



$$L = \int_0^{2\pi} R\theta \, d\theta$$

$$L = 2\pi R$$

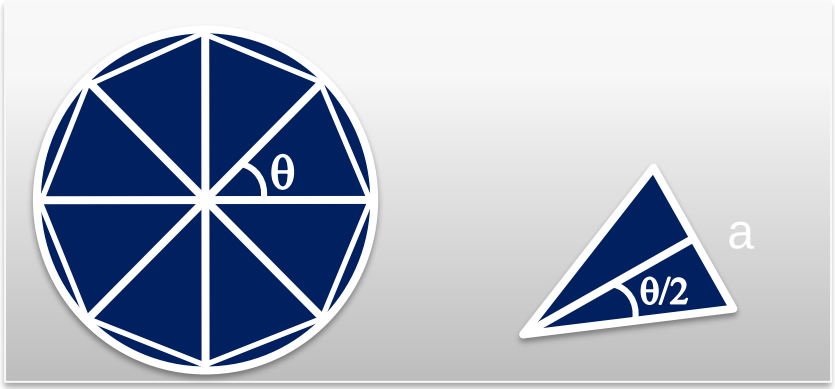
Discretizando o círculo em *n* partes:

$$L = na \qquad \text{tal que} \qquad a = 2R\,sen(\theta/2)$$

$$\theta = 2\pi/n \qquad \therefore n = 2\pi/\theta$$

$$L = 2\pi R \frac{sen(\theta/2)}{(\theta/2)}$$

A medida que θ tende a zero, senθ tende a θ



Solução exata x numérica

$$L = 2\pi R$$

$$L = 2\pi R \frac{sen(\theta/2)}{(\theta/2)}$$

A medida que θ tende a zero, senθ tende a θ

→ Um método numérico é confiável se ele **converge** para a solução exata do modelo matemático, com o *refinamento*.

Para n=360:
Erro (%)=0,00127

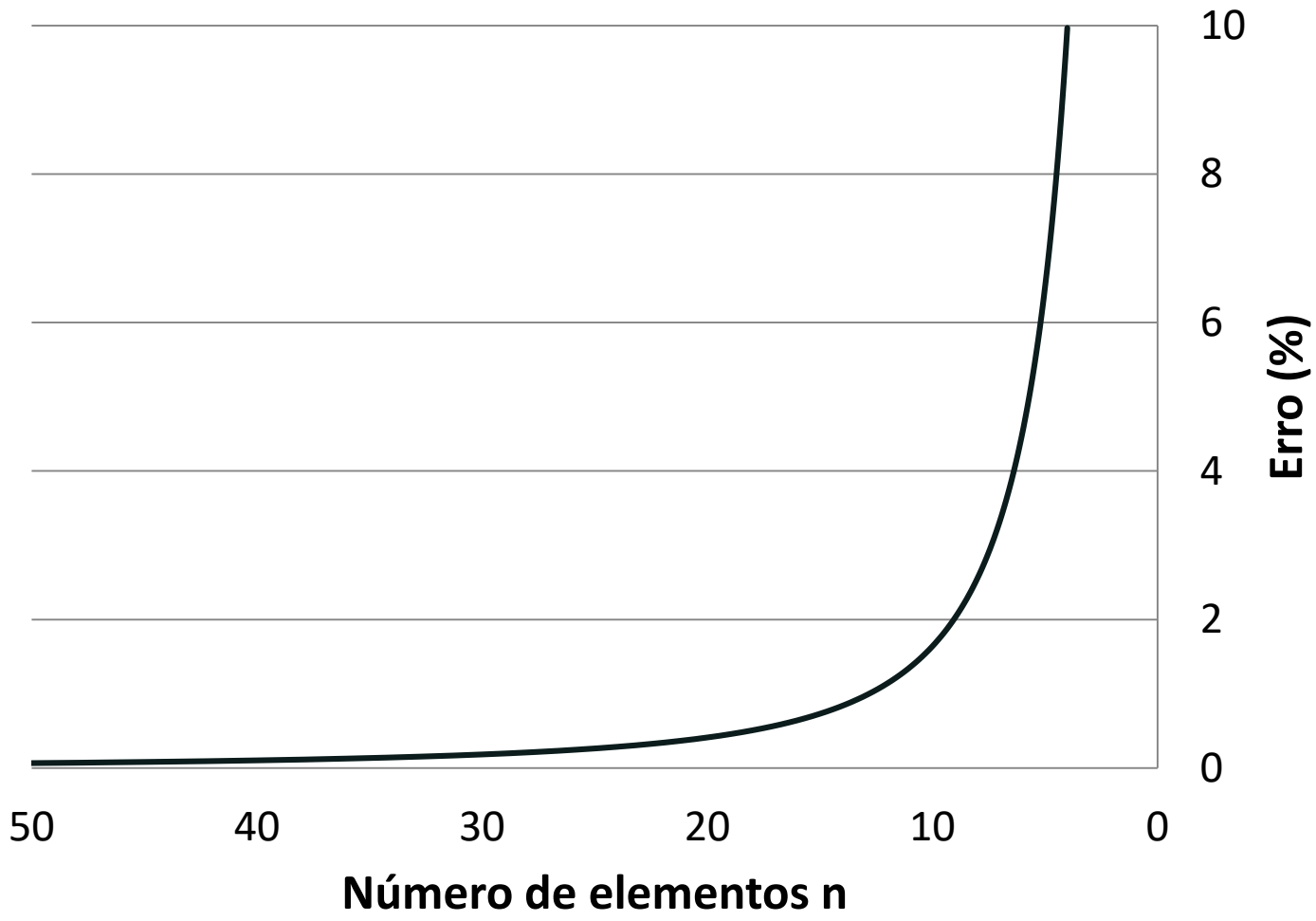
→ A solução numérica de um problema **não é melhor** do que o modelo matemático utilizado.

Esse é um exemplo clássico da literatura, para retratar que a *idéia* do método dos elementos finitos pode ser considerada dos matemáticos egípcios (aprox. 1800 a.C.) ou de *Archimedes* em seus famosos estudos sobre aproximação de círculo (aprox. 250 a.C.).

Discretização

Os modelos numéricos devem ser implementados e utilizados com facilidade, além de serem eficientes computacionalmente.

Analisar a velocidade de convergência!



Passos em uma análise em elementos finitos

- **Pré-Processamento**
  - Criação da geometria;
  - Atribuição da propriedade de material;
  - Seleção do tipo de elemento;
  - Discretização do modelo.
- **Análise**
  - Aplicação das condições de contorno;
  - Aplicação da carga;
  - Submissão para solução.
- **Pós-Processamento**
  - Seleção do tipo de variável de campo de interesse;
  - Visualização da variável selecionada;
  - Geração de Gráficos/Formas

Vários softwares disponíveis no mercado

Ansys

- Ansys Workbench
- Ansys - LS Dyna

Abaqus

- CAE
- Standard
- Explicit

MSc Products

Patran

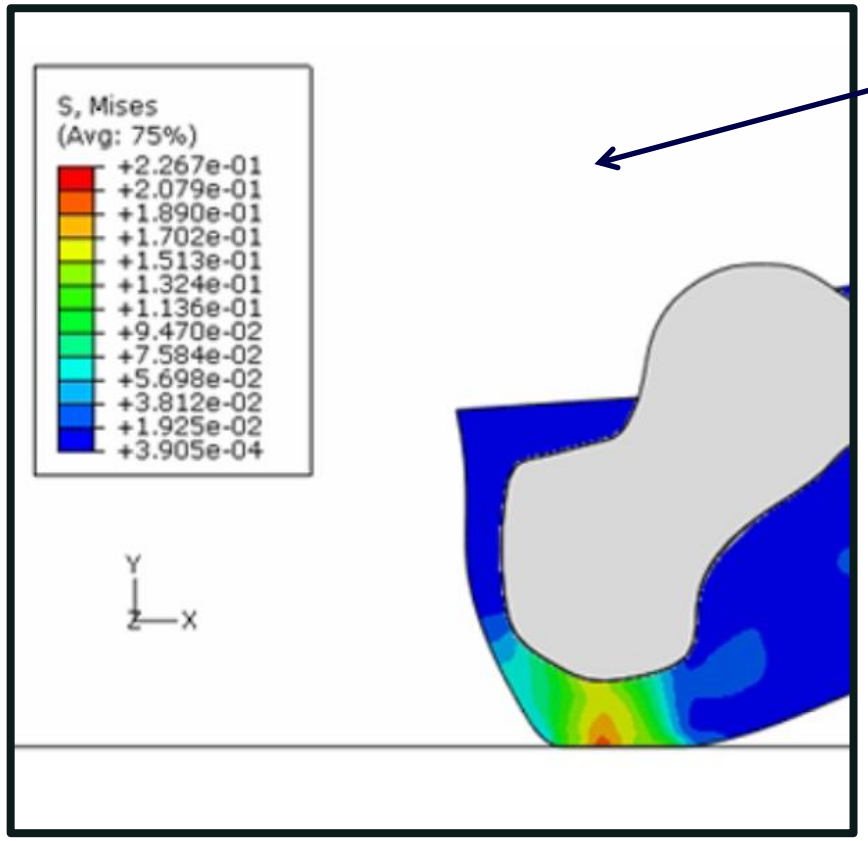
Nastran

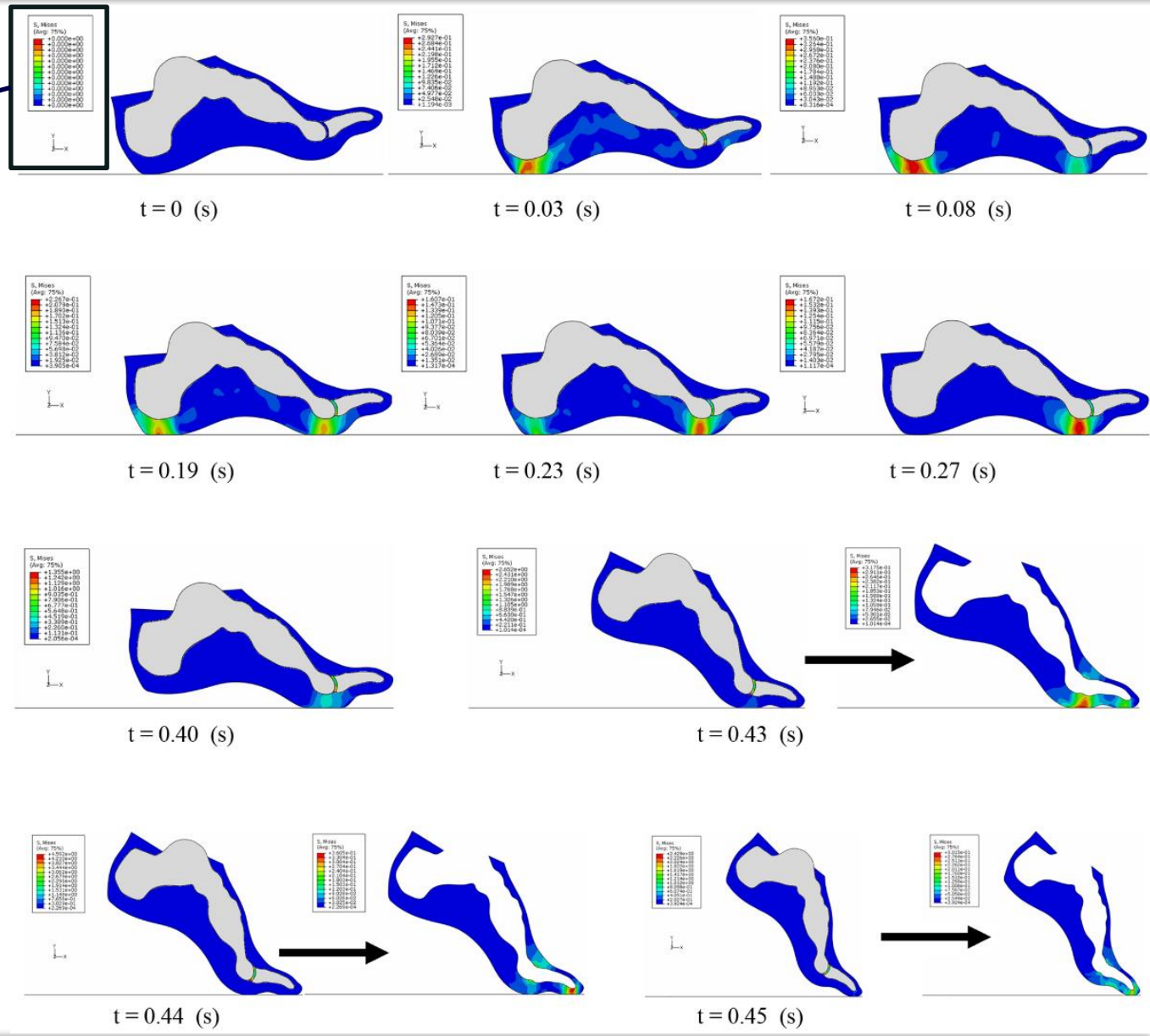
Dytran

LS-Dyna

Hyper mesh, Ideas, Unigraphics, Pro-Mechanica, Adina, Cosmos, ...

Exemplo

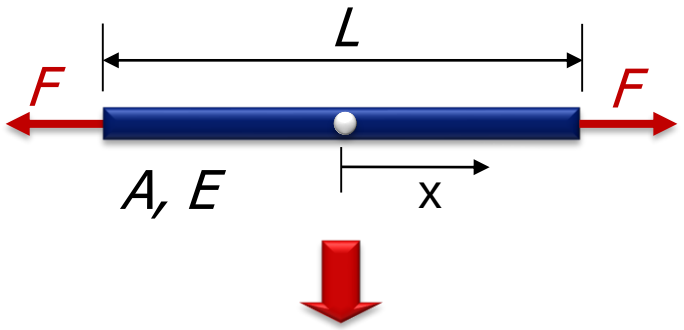


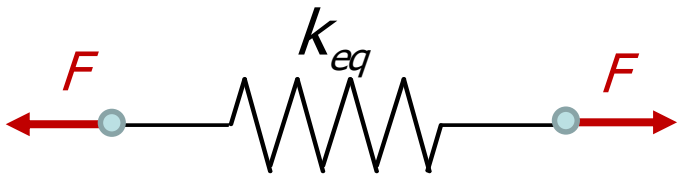


A Dynamic Finite Element Analysis of Human Foot Complex in the Sagittal Plane during Level Walking
Zhihui Qian Lei Ren Yun Ding John R. Hutchinson Luquan Ren
November 11, 2013https://doi.org/10.1371/journal.pone.0079424

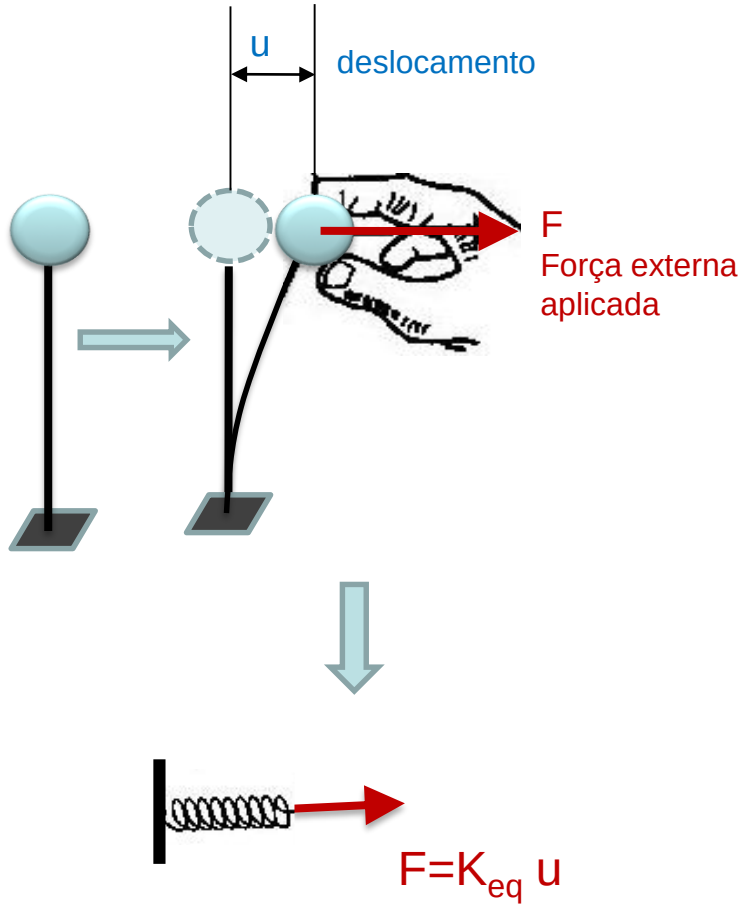
ESTRUTURA DE UM PROGRAMA MEF
EQUAÇÕES E MATRIZES
TRELIÇAS

Da Mecânica dos sólidos elementar, uma barra uniforme de comprimento L, área da seção transversal A, e módulo de elasticidade E podem ser modeladas como uma mola de rigidez k_{eq}



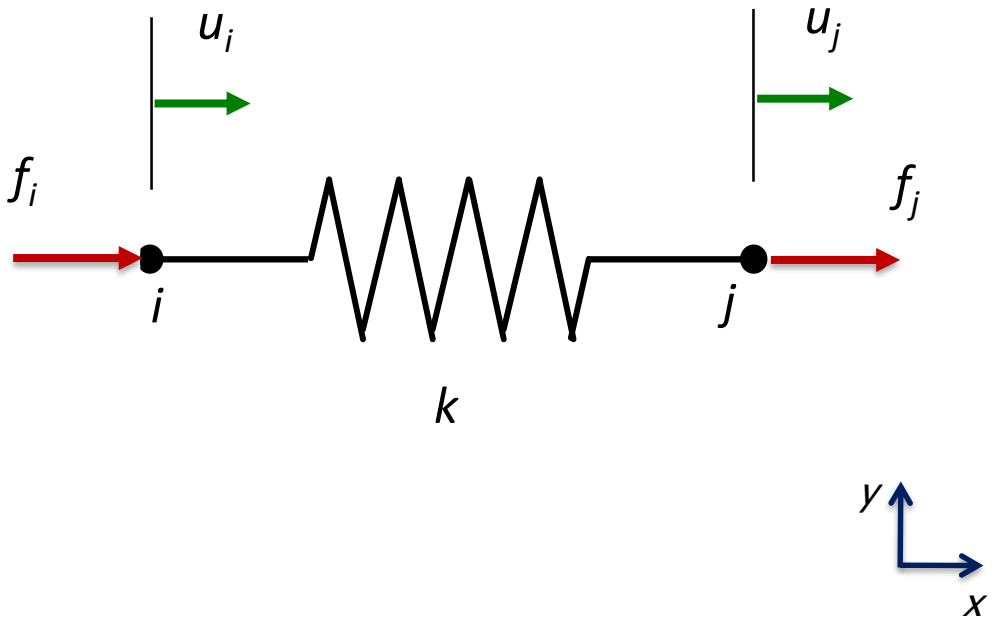


com: $k_{eq} = \frac{AE}{L}$



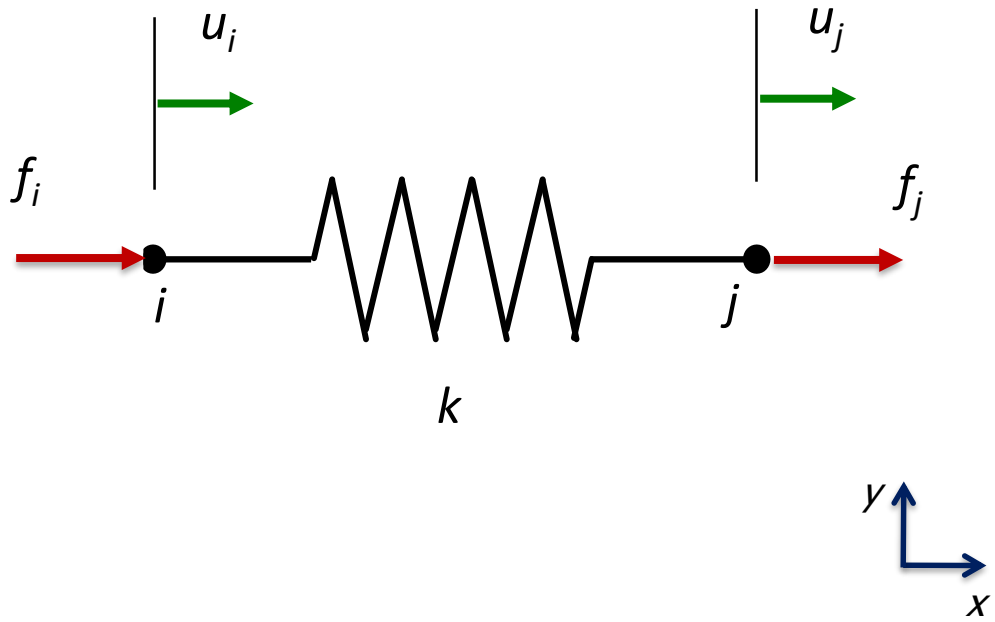
Forças e deslocamentos nodais

Considere uma mola linear de rigidez k. Supõe-se que os deslocamentos em suas extremidades, chamadas nós, sejam u_i e u_j, conhecidos como deslocamentos nodais. Vamos considerar que as forças atuando nas duas extremidades, chamadas forças nodais, sejam f_i e f_j.



As forças nodais e deslocamentos nodais estão relacionados conforme as equações.

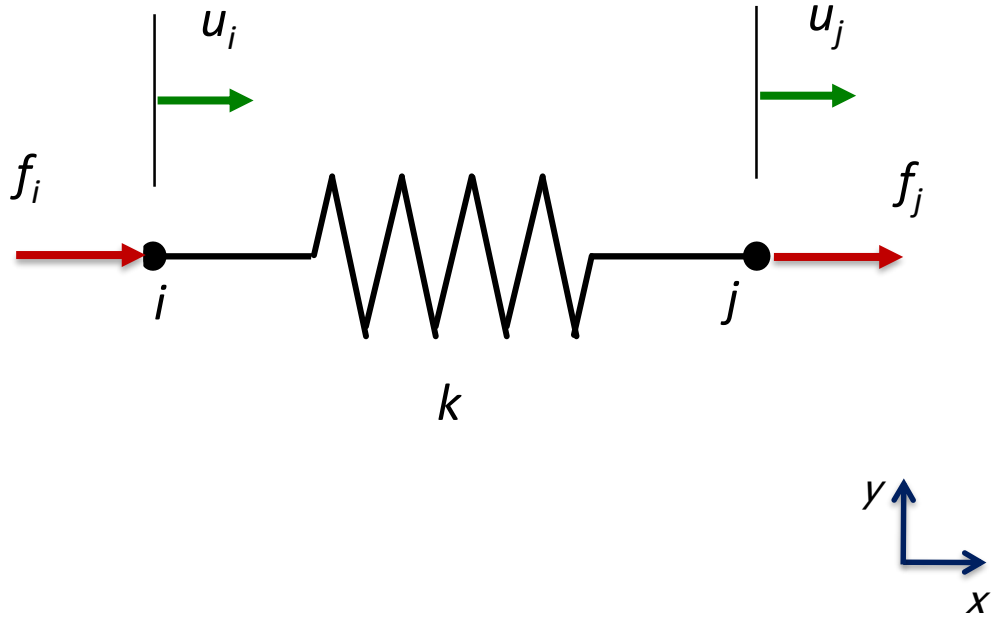
$$f_i = k(u_i - u_j)$$
$$f_j = k(u_j - u_i)$$



As relações anteriores podem ser colocadas na forma matricial, ou seja:

$$f_i = k(u_i - u_j)$$
$$f_j = k(u_j - u_i)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$



$$\boldsymbol{kd = F}$$

Matriz de rigidez do elemento

$$K = k\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez

sempre simétrica

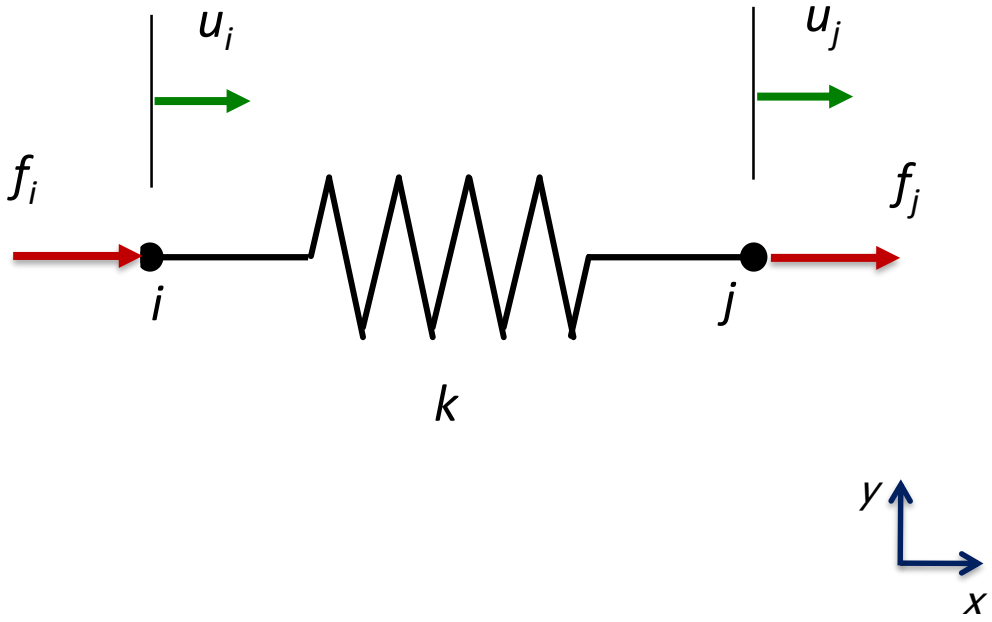
$$d = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Vetor de deslocamentos nodais

ou graus de liberdade do elemento

$$F = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Vetor de forças nodais



Matriz de rigidez do elemento

Uma coluna **i** de K será sempre multiplicada pelo valor de deslocamento da linha **i** do vetor **u** (isto é, em um grau de liberdade).

Define-se a coluna da matriz **K** – K_{i1}, por exemplo – como forças correspondentes a deslocamentos unitários no grau de liberdade **1**.

Portanto, K_{ij} é a **força necessária no grau de liberdade j** para **deslocamento unitário no grau de liberdade i**.

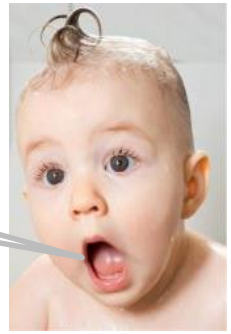
$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema de reciprocidade Betti-Maxwell

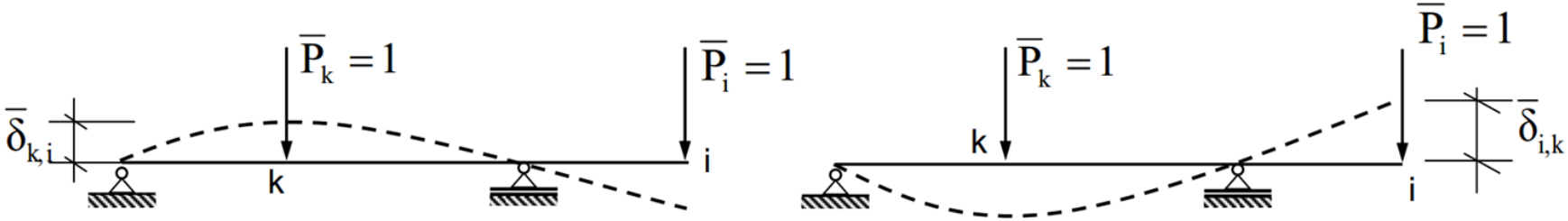
A dor no peito por ter levado um soco no rosto

=

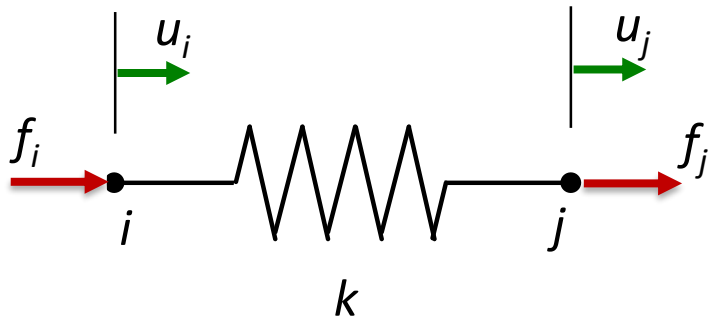
dor no rosto por ter levado um chute no peito!



" O deslocamento do ponto k, provocado por uma força unitária aplicada no ponto i, é igual ao deslocamento do ponto i, provocado por uma força unitária aplicada no ponto k, desde que as direções das forças e deslocamentos coincidam nos respectivos pontos"



$$\overline{\delta}_{k,i} = \overline{\delta}_{i,k}$$



Portanto, **as matrizes de Rigidez e Flexibilidade são sempre simétricas.**

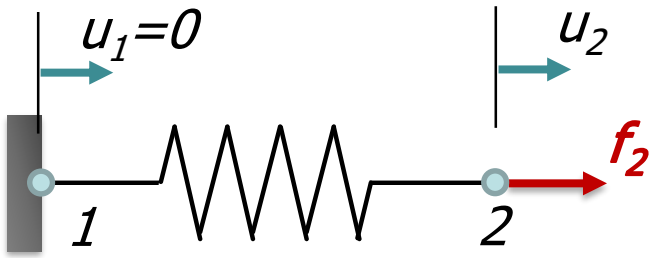
Singularidade da matriz de rigidez do elemento

A equação **Kd=F** não pode ser resolvida (i. é, encontrar deslocamentos nodais) para um valor arbitrário de **F** porque a matriz **K** é singular.

Fisicamente, isso quer dizer que, em equilíbrio estático, os deslocamentos nodais não podem ser determinados unicamente por um par de forças aplicadas nos nós.

Um dos nós deve ser fixo ou com deslocamento prescrito e, daí, o deslocamento da outra extremidade pode ser unicamente determinado.

$$K^{-1}=??$$

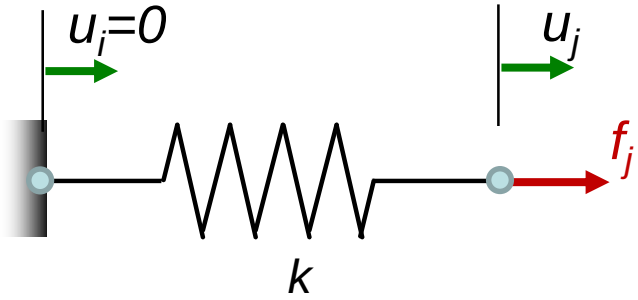


Restringir alguns nós da estrutura significa *aplicar condições de contorno*.

Solução para um único elemento

$$k\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Nó ***i*** é fixo (i.é seu deslocamento é nulo) :



$$ku_j = f_j \quad \Longrightarrow \quad u_j = \frac{f_j}{k}$$

Redução da matriz

Note que quando um deslocamento ou GL está restrito e vale zero, linhas e colunas de **k** associadas àquele deslocamento são eliminadas e apenas o restante da matriz é resolvida.

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

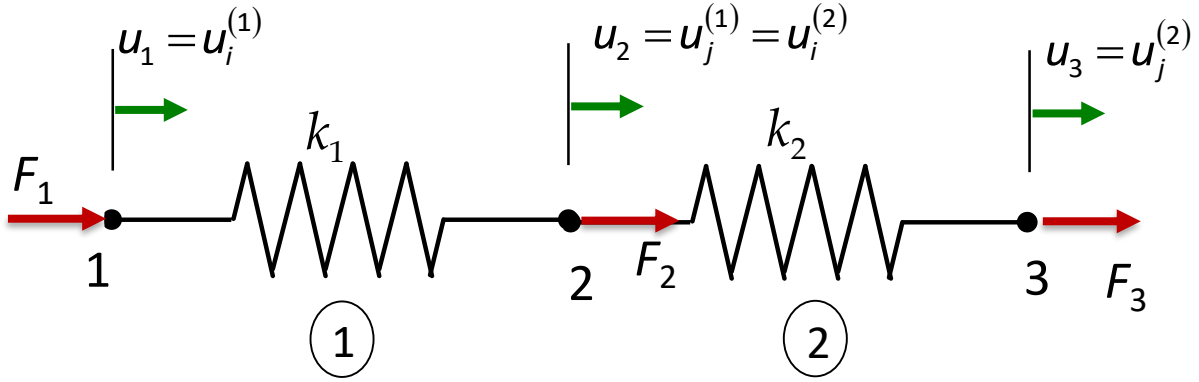
Linha associada com u_i

Coluna associada com u_i

Vários elementos

Considere agora duas molas de rigidez diferente unidas uma a outra.

Os nós são numerados globalmente como nós 1,2 e 3.

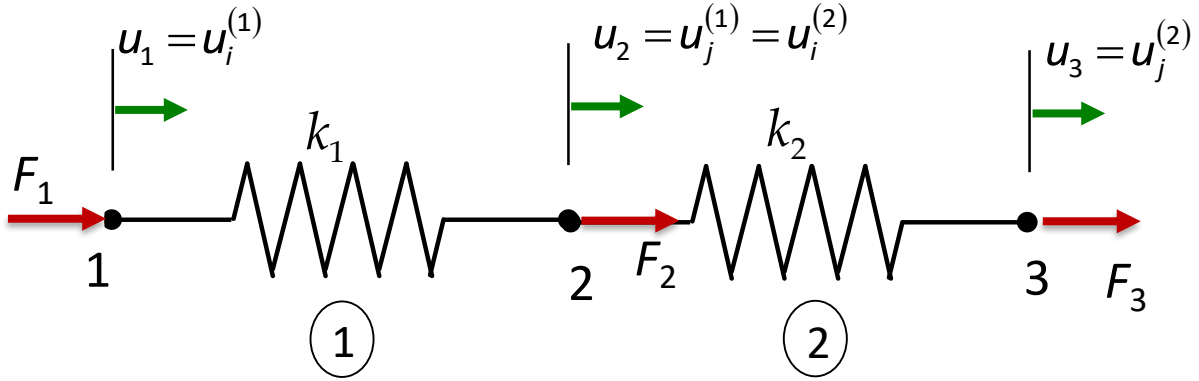


$u_{i,j}^{(1,2)}$ - índice inferior refere-se ao número local do nó , representado pelas letras i e j, e o índice superior refere-se ao número global do elemento

$u_{1,2,3}$ - índice inferior representa o número global do nó..

Relações de continuidade

Quando dois elementos estão ligados, os nós nós de ligação (final do primeiro elemento e inicial do segundo) se tornam um só e DEVEM ter o mesmo deslocamento



$$u_2 = u_j^{(1)} = u_i^{(2)}$$

deslocamento do nó final do elemento 1 (nó j) deve ser igual ao deslocamento do nó inicial do elemento 2 (i).

Equilíbrio de forças

A soma das forças nodais externas atuando em cada nó devem ser iguais à soma das forças nodais de cada elemento, em todos os nós.

$$F_1 = f_i^{(1)}$$
$$F_2 = f_j^{(1)} + f_i^{(2)}$$
$$F_3 = f_j^{(2)}$$

onde F1, F2, F3 são forças nodais externas numeradas globalmente.

Equações de equilíbrio globais

Quando continuidade e equilíbrio de forças são impostos, as equações de equilíbrio global resultante são,

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{kd=F}$$

Problema global

Matriz de rigidez global (sempre simétrica)

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

Vetor de deslocamentos nodais global

$$\boldsymbol{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Vetor global de forças nodais

$$\boldsymbol{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Os deslocamentos nodais globais são também conhecidos como *graus de liberdade globais*.

Montagem da matriz de rigidez global

A matriz de rigidez *global* é montada através da união das matrizes de rigidez de cada elemento, da seguinte forma:

Matriz de rigidez do elemento 1

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

Os termos de rigidez das duas matrizes se somam nos GL coincidentes

Matriz de rigidez do elemento 2

Singularidade da matriz de rigidez global

- Como no caso da matriz de rigidez local do elemento a matriz de rigidez global **K** é *singular*. Alguns nós da estrutura devem ser restritos (i.é, deslocamento conhecido ou nulo) para tornar o problema estaticamente determinado ou hiperestático. Então os GL restantes podem ser determinados.

- Restringir alguns nós da estrutura significa ***aplicar condições de contorno***.

Condição de contorno homogênia

$u_1 = 0,$

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

0

$F_1 = -K_1 u_2$ Força de reação desconhecida no nó 1

$F_2 = (K_1 + K_2)u_2 - K_2 u_3$

$F_3 = -K_2 u_2 + K_2 u_3$

Forças nodais desconhecidas

Condição de contorno homogênia

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Linha associada com u_1

Coluna associada com u_1

PORTANTO:

1. Para condições de contorno **homogêneas delete as linhas e colunas apropriadas** da matriz de rigidez global e resolva o conjunto reduzido de equações para os deslocamentos nodais desconhecidos.
2. Deslocamentos e forças NÃO PODEM ser conhecidos no mesmo nó. Se o deslocamento é desconhecido, a força naquele nó é conhecida e vice-versa.

Condição de contorno não homogênea

$u_1 = \delta$, um valor conhecido diferente de zero

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

δ

$F_1 = K_{11}\delta - K_1 u_2$ Força de reação desconhecida no nó 1

$F_2 = -K_1\delta + (K_1 + K_2)u_2 - K_2 u_3$

$F_3 = -K_2 u_2 + K_2 u_3$

Forças nodais desconhecidas

Condição de contorno não homogênea

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = K_{11}\delta - K_1 u_2$$

$$F_2 = -K_1\delta + (K_1+K_2)u_2 - K_2 u_3$$

$$F_3 = -K_2 u_2 + K_2 u_3$$

$$F_2 - K_{11}\delta = K_{22}u_2 + K_{23}u_3$$

$$F_3 = K_{22}u_2 + K_{33}u_3$$

$$\begin{Bmatrix} F_2 - K_{11}\delta \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

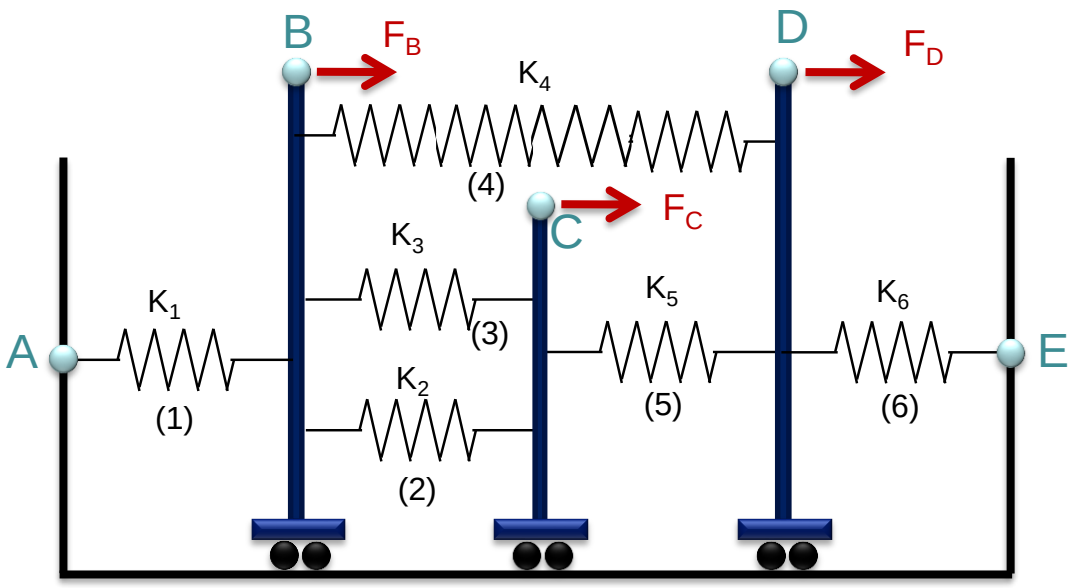
PORTANTO:

Para condições de contorno **não homogêneas**

1. **Delete as linhas e colunas apropriadas** da matriz de rigidez global e resolva o conjunto reduzido de equações para os deslocamentos nodais desconhecidos.
2. Não esqueça de modificar o lado direito da equação!!!

Exercício exemplo

Calcule os deslocamentos nodais da estrutura abaixo:

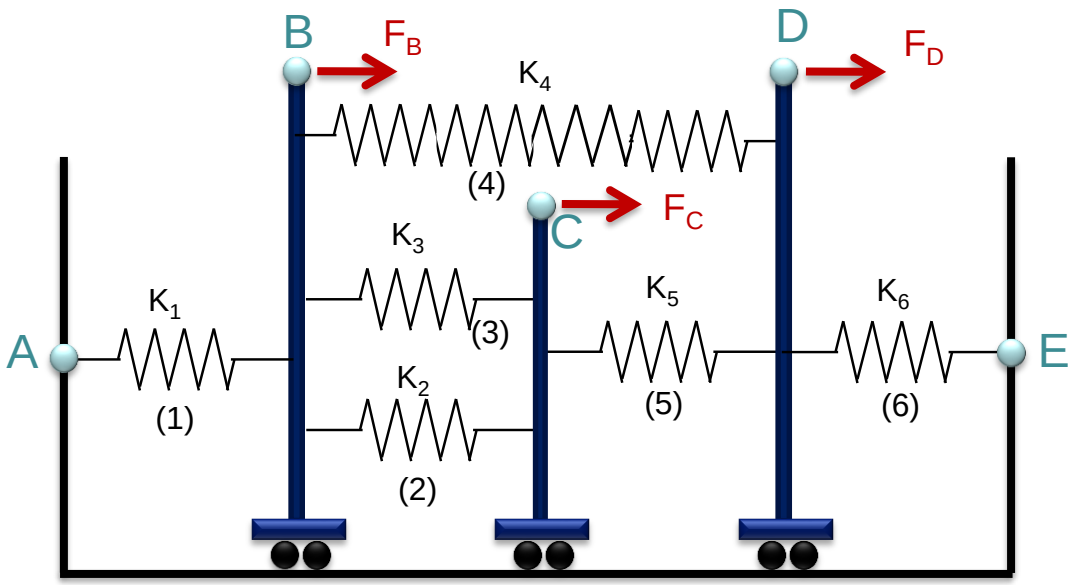


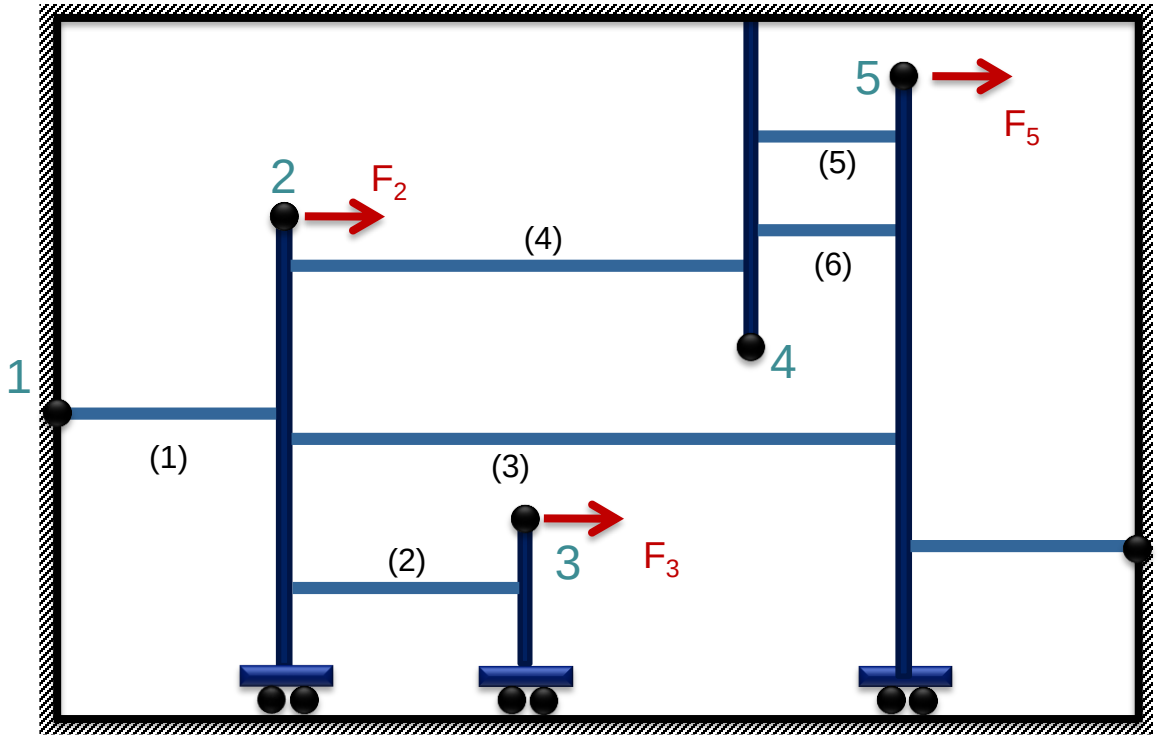
K_1=200 Kgf/mm
K_2=100 Kgf/mm
K_3=150 Kgf/mm
K_4=300 Kgf/mm
K_5=400 Kgf/mm
K_6=500 Kgf/mm

F_B=400 Kgf
F_C=300 Kgf
F_D=500 Kgf

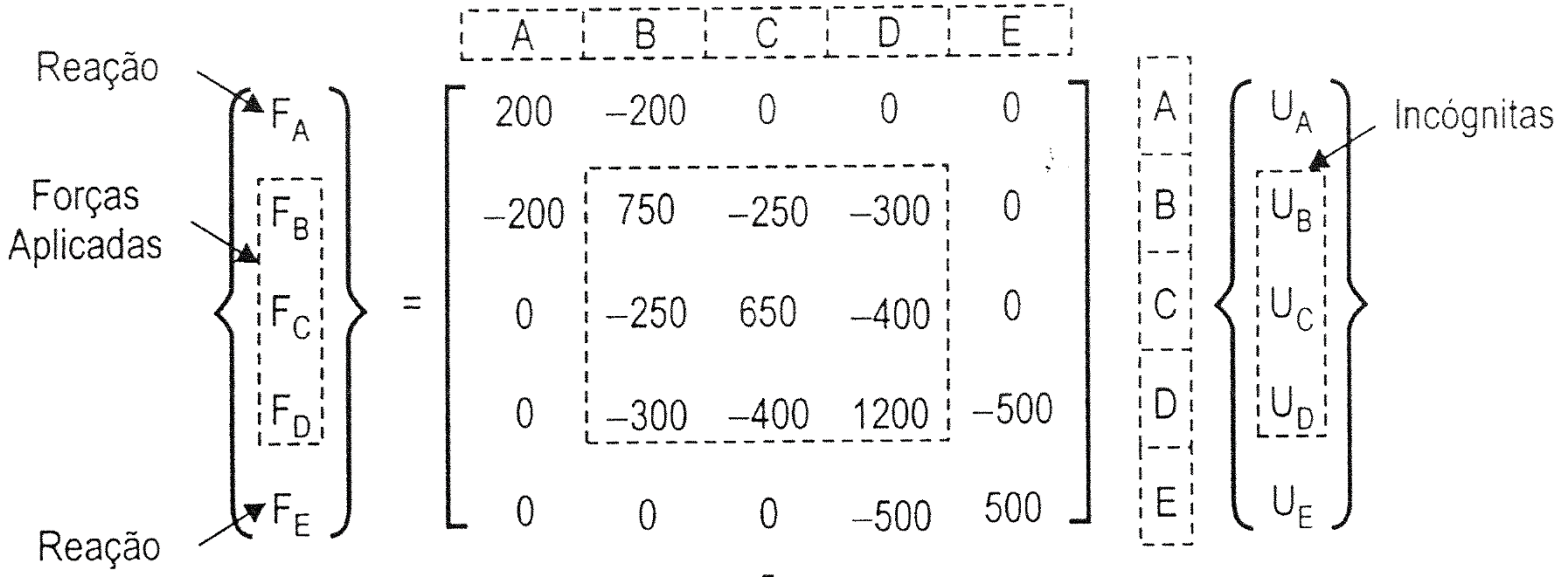
Exercício adaptado de:
Elementos Finitos, A base da tecnologia CAE
Avelino Alves Filho
5ª. Edição – Editora Érica

Exercício exemplo





Exercício exemplo



$U_B = 1{,}92084$ mm

$U_C = 2{,}20442$ mm

$U_D = 1{,}63165$ mm

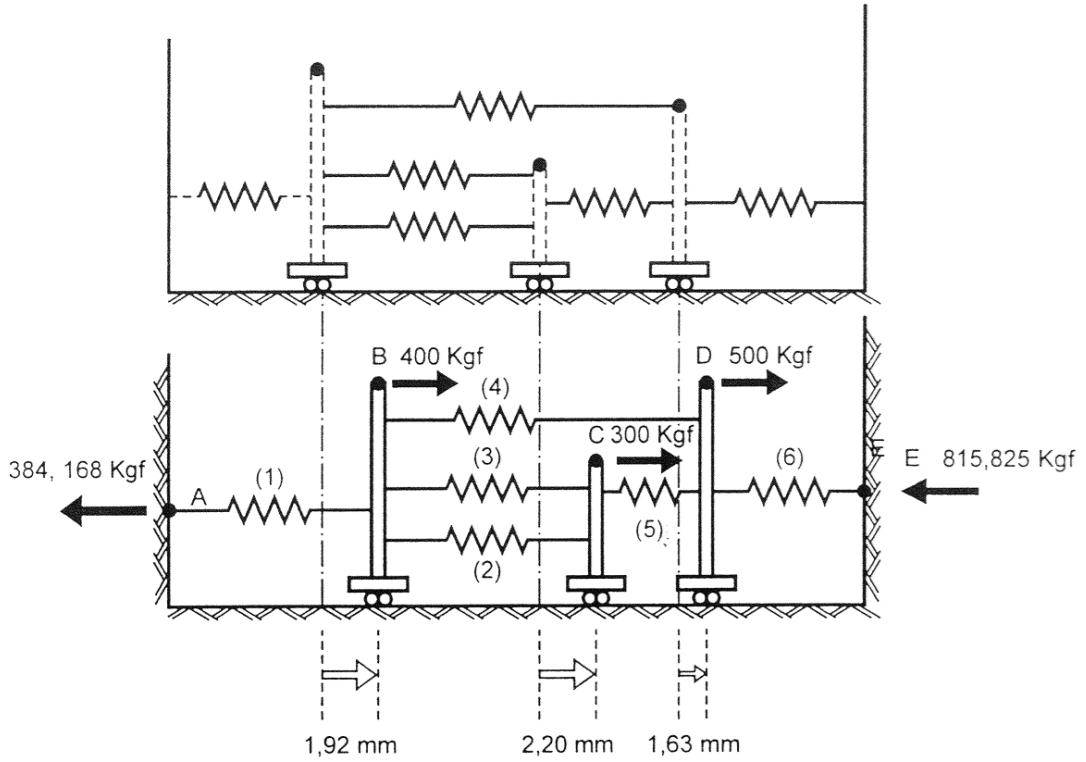
$F_A = -384{,}168$ kgf Reação em A

$F_E = -815{,}825$ kgf Reação em E

Usyst =

1.9208
2.2044
1.6317

Exercício exemplo



$$F_A + F_B + F_C + F_D + F_E = -384{,}168 + 400 + 300 + 500 - 815{,}825 = 0{,}007 \sim \text{Zero}$$

Figura 2.12 – Estrutura Deformada.

Em função dos deslocamentos obtidos podemos observar que:

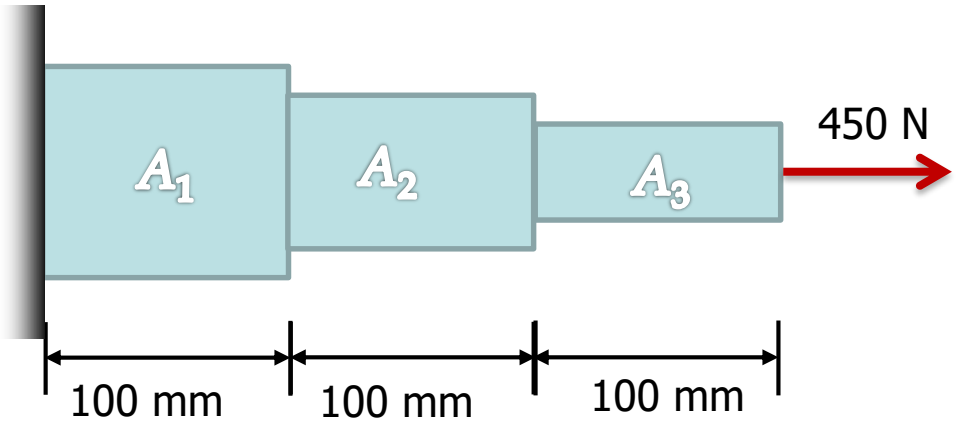
- *A mola (1) está TRACIONADA.*
- *Como B e C têm AFASTAMENTO RELATIVO, as molas (2) e (3) estão TRACIONADAS.*
- *Como B e D têm APROXIMAÇÃO RELATIVA, a mola (4) está comprimida.*
- *A mola (6) está COMPRIMIDA.*

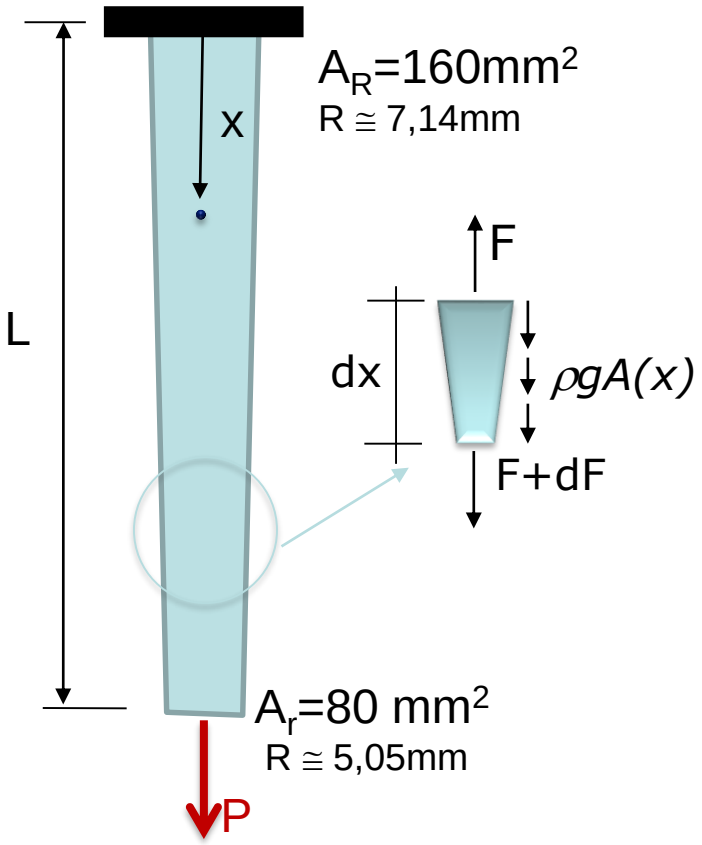
Sequência de passos sugerida no livro

1. No exemplo já foi fornecido o modelo constituído de elementos de mola. Defina os nós em comum para cada elemento;
2. Determine a matriz de rigidez de cada elemento;
3. Monte matriz de rigidez da estrutura e o vetor de forças nodais;
4. Defina as condições de contorno e aplique à matriz de rigidez;
5. Determine os deslocamentos nodais

Para você treinar!

Você achou a solução analítica para uma barra de alumínio – L=300mm, com seção variável: A_R=160mm^2 e A_r=80mm^2 e tracionada pela força P=450 N. Calcule os deslocamentos da barra por análise matricial.





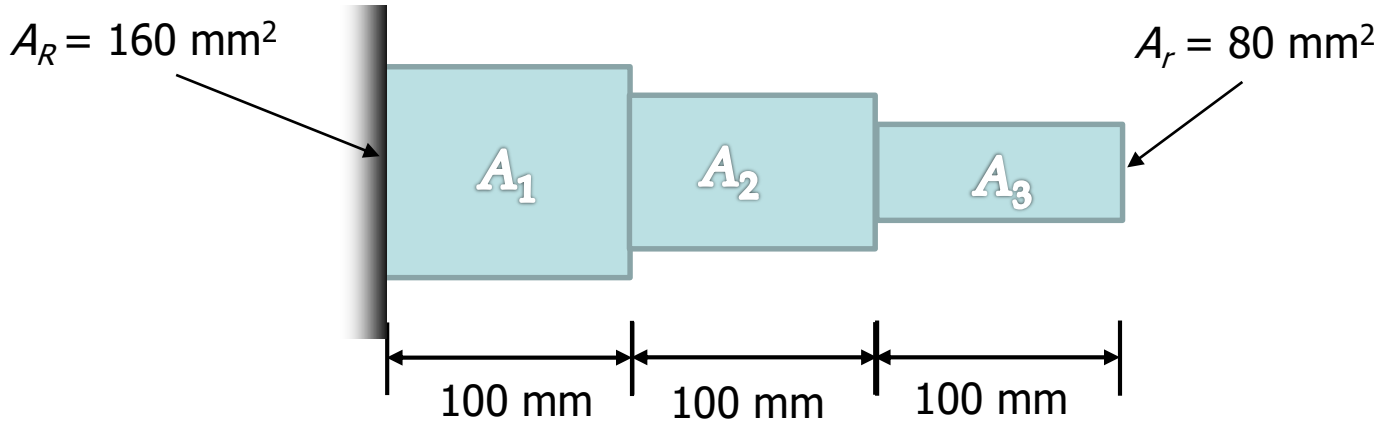
Para você treinar!

A seção transversal de cada barra pode ser obtida assumindo-se a média de cada segmento,

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[A_R + \left(A_R - \frac{(A_R - A_r)}{3}\right)\right] = 147\,\text{mm}^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left[\left(A_R - \frac{(A_R - A_r)}{3}\right) + \left(A_R - \frac{2(A_R - A_r)}{3}\right)\right] = 120\,\text{mm}^2$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\left[\left(A_R - \frac{2(A_R - A_r)}{3}\right) + A_0\right] = 93\,\text{mm}^2$$



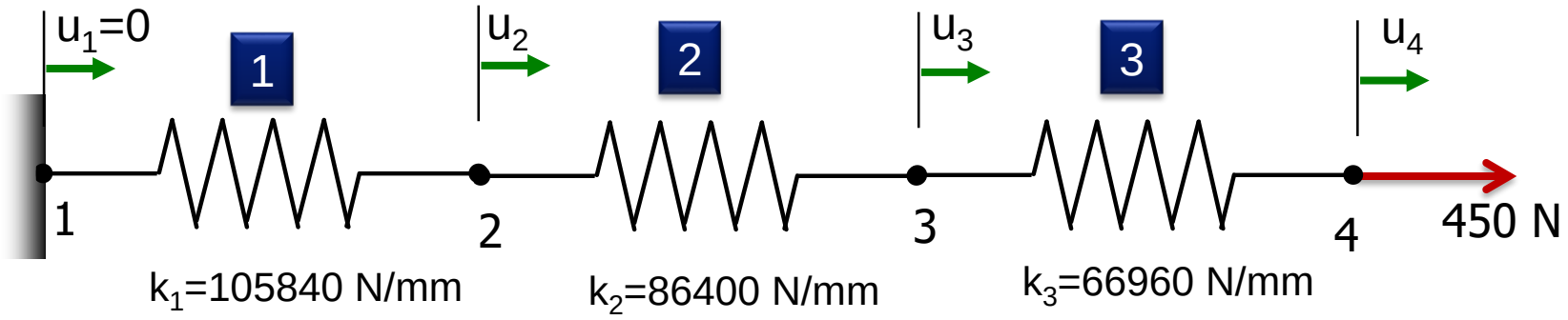
Para você treinar!

- A rigidez equivalente de cada barra é dada por $k_i = \frac{A_i E_i}{L_i}$ /mm.

$$k_1 = \frac{147x72000}{100} = 105840\,\text{N/mm}$$

$$k_2 = \frac{120x72000}{100} = 86400\,\text{N/mm}$$

$$k_3 = \frac{93x72000}{100} = 66960\,\text{N/mm}$$



Redução da matriz de rigidez,
Condição de contorno homogênea

$u_1 = 0,$

Força associada com o GL restrito (força de reação)

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

Linha e coluna associada a u_1

$$0 = (K_1 + K_2)u_2 - K_2 u_3$$
$$0 = -K_2 u_2 + (K_2 + K_3)u_3 - K_3 u_4$$
$$450 = -K_3 u_3 + K_3 u_4$$

Solução para um único elemento

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0{,}94482 & 0{,}94482 & 0{,}94482 \\ 0{,}94482 & 2{,}10223 & 2{,}10223 \\ 0{,}94482 & 2{,}10223 & 3{,}60000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 450 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}00425 \\ 0{,}00946 \\ 0{,}01618 \end{Bmatrix}$$

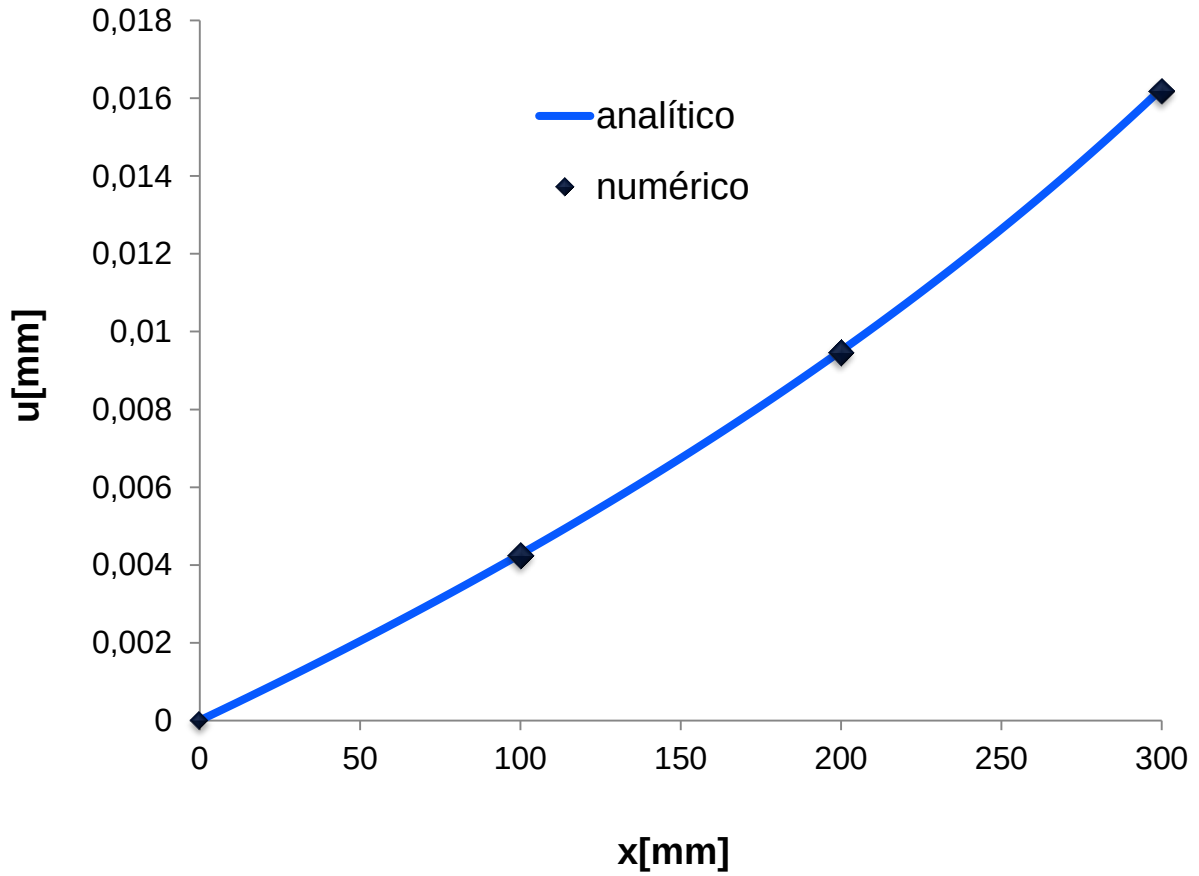
x=0	u=0 (condição de contorno do problema...)
x=100	u=0,00425 mm
x=200	u=0,00946 mm
x=300	u=0,01618 mm

AINDA, se utilizarmos a linha da matriz de rigidez que foi retirada, e multiplicarmos pelo vetor deslocamentos, agora conhecido,

$$\begin{bmatrix} 105840 & -105840 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}004252 \\ 0{,}009460 \\ 0{,}016180 \end{Bmatrix} = \{\text{Reação de apoio}\} = -450\,\text{N}$$

Obviamente... reação de apoio vale - 450 N!

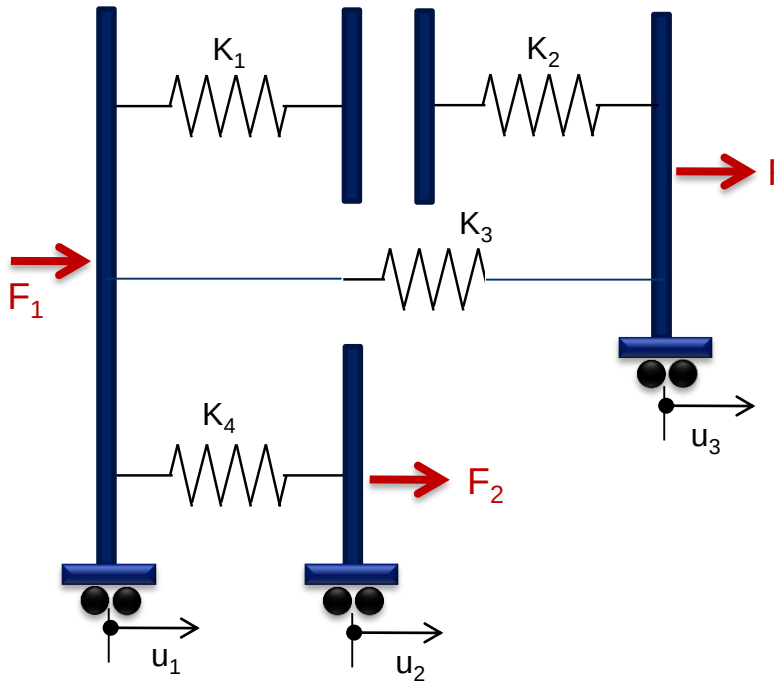
Comparação com resultados exatos



Nesse caso, os resultados produzidos pelo MEF são exatos, porém, discretos.

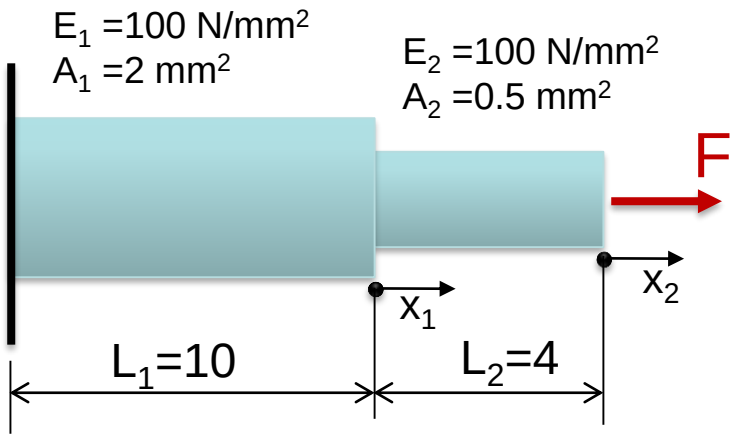
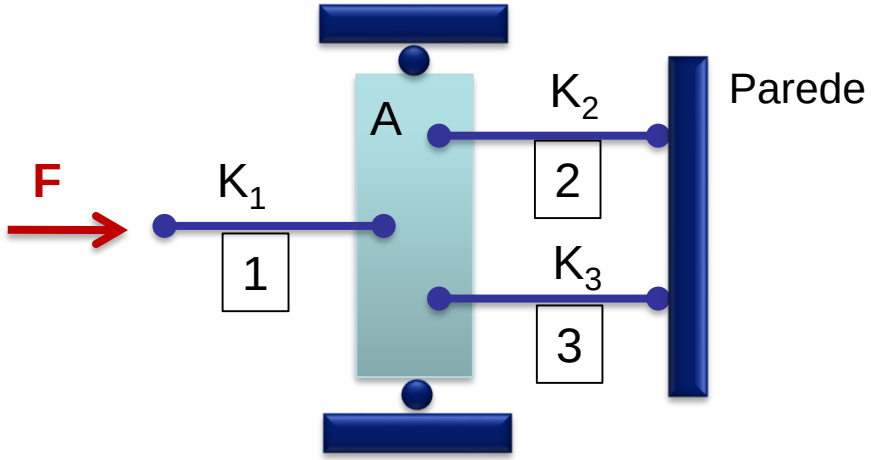
Para você treinar em casa!

1. Na estrutura montada abaixo, os blocos rígidos estão unidos a molas lineares. Imagine que são somente permitidos deslocamentos horizontais. Escreva as equações de equilíbrio global **Kd=F** depois de aplicar as condições de contorno em deslocamentos em termos de: rigidez das molas k_i, graus de liberdade, u_i, e forças aplicadas, F_i.



Para você treinar em casa!

2. Uma força F=2N é aplicada ao sistema ao lado. Determine os deslocamentos x_1 e x_2 do sistema.



3. Seja um conjunto de três elementos de barra sujeitos a uma força externa F em uma extremidade e fixo a uma parede na outra. O movimento está restrito a uma dimensão (x). Determine o deslocamento do elemento rígido A, as forças nos elementos 1,2 e 3 e as forças de reação na parede. Admita K_1=50 N/cm, K_2=30 N/cm, K_3=70 N/cm e F=50 N/cm.