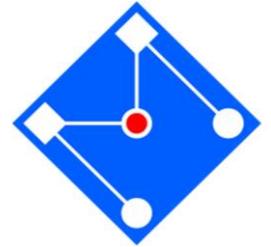


PMR 5010

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECATRÔNICA

Larissa Driemeier [driemeie@usp.br]
3091 5756

MATRIZ DE RIGIDEZ

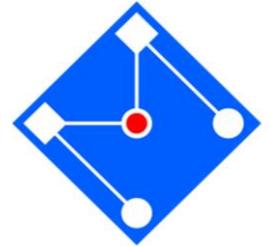


As deformações do elemento são obtidas a partir das derivadas dos deslocamentos com relação às coordenadas locais.

Para obter a matriz de rigidez de um elemento, precisamos da matriz B de transformação $u-\varepsilon$.

Uma vez que os deslocamentos do elemento são definidos nas coordenadas *naturais*, precisamos relacionar as derivadas de x,y,z com as derivadas de r,s,t .

REGRA DA CADEIA...



$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \mathbf{x}}$$

E relações similares para $\partial/\partial y$ e $\partial/\partial z$.

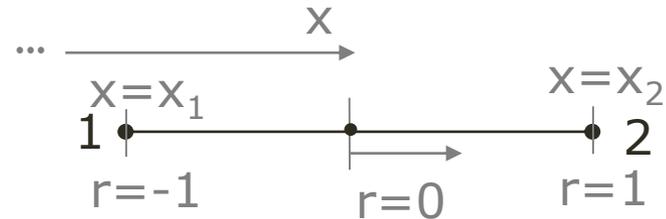
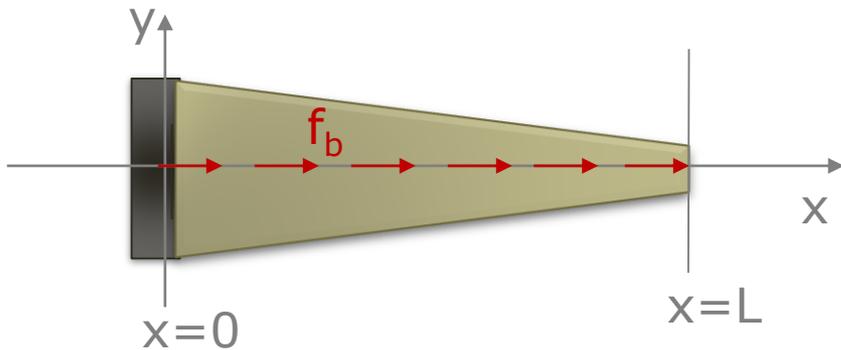
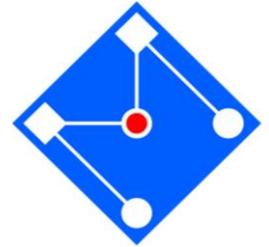
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$$

↓
Operador
Jacobiano

BARRA ELÁSTICA CARREGADA AXIALMENTE



Para cada elemento

Matriz de rigidez

$$\mathbf{k} = \int_{x_1}^{x_2} EAB^T \mathbf{B} dx = \int_{-1}^1 EAB^T \mathbf{B} Jdr$$

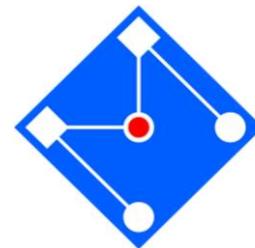
e

$$\mathbf{B} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(2r-1) & \frac{1}{2}(2r+1) & -2r \end{bmatrix}$$

Vetor de carregamentos nodais

$$\mathbf{f}_b = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{f}_b Jdr$$

A questão é: Como programar estas integrais????



SOLUÇÃO APROXIMADA

$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx \sum_{i=1}^p w_i f(r_i)$$

Peso

Valor da função no
ponto i de
integração

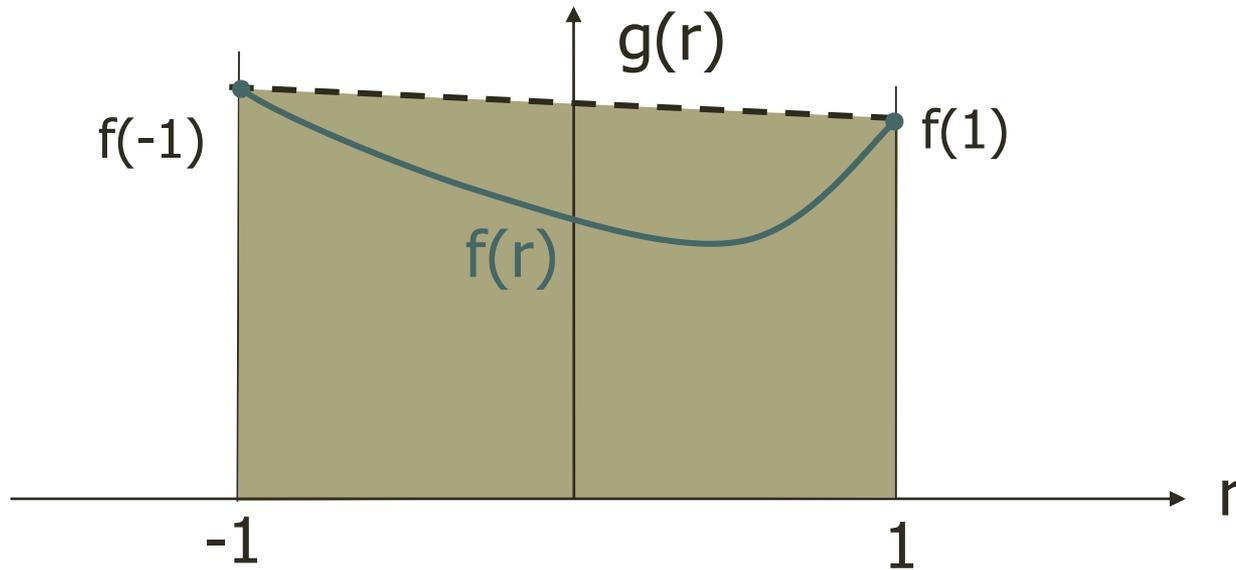
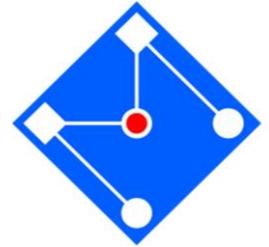
Newton Cotes

- Trapezoidal
- Simpson

Gauss

Os métodos se resumem em encontrar os valores dos pesos w_i e das coordenadas dos chamados pontos de integração r_i

Regra trapezoidal: Aproximamos a função $f(r)$ por uma linha $g(r)$ que passa nos pontos extremos $f(-1)$ e $f(1)$ e integramos a linha



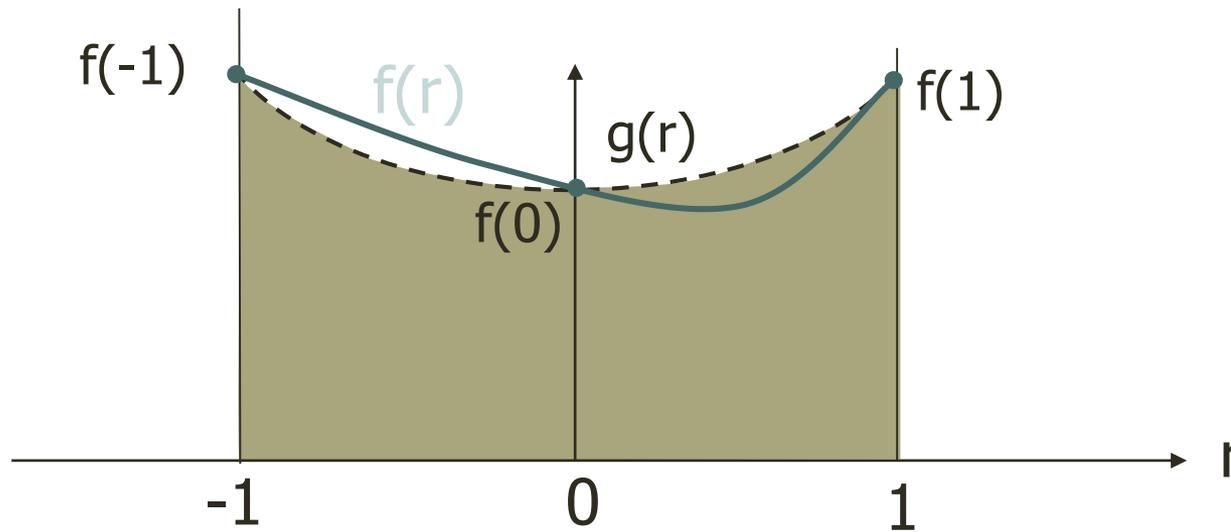
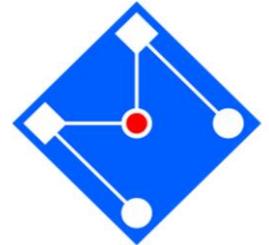
$$g(r) = \frac{1-r}{2} f(-1) + \frac{1+r}{2} f(1)$$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx \int_{-1}^1 g(r) dr = f(1) + f(-1)$$

Repare que w_i são as funções de forma...

Funções constantes e lineares são integradas com exatidão

Regra de Simpson: Aproximamos a função $f(r)$ por uma parábola $g(r)$ que passa pelos pontos extremos $f(-1)$ e $f(1)$ e pelo ponto médio $f(0)$ e integramos a parábola



$$g(r) = \frac{r(r-1)}{2} f(-1) + (1-r^2) f(0) + \frac{r(1+r)}{2} f(1)$$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx \int_{-1}^1 g(r) dr = \frac{1}{3} f(1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(-1)$$

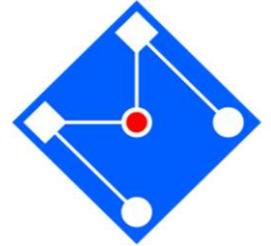
Funções constantes, lineares e parabólicas são integradas com exatidão

Regra

Trapezoidal:

$P=2$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx \int_{-1}^1 g(r) dr = f(1) + f(-1)$$



$$w_1 = 1 \quad r_1 = -1$$

$$w_2 = 1 \quad r_2 = 1$$

Correto para polinômios até grau
1 ($=P-1$)

Regra de

Simpson:

$P=3$

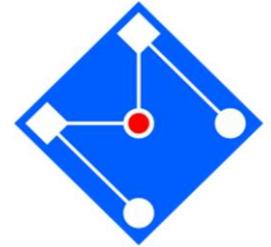
$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx \int_{-1}^1 g(r) dr = \frac{1}{3} f(1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(-1)$$

$$w_1 = 1/3 \quad r_1 = -1$$

$$w_2 = 4/3 \quad r_2 = 0$$

$$w_3 = 1/3 \quad r_3 = 1$$

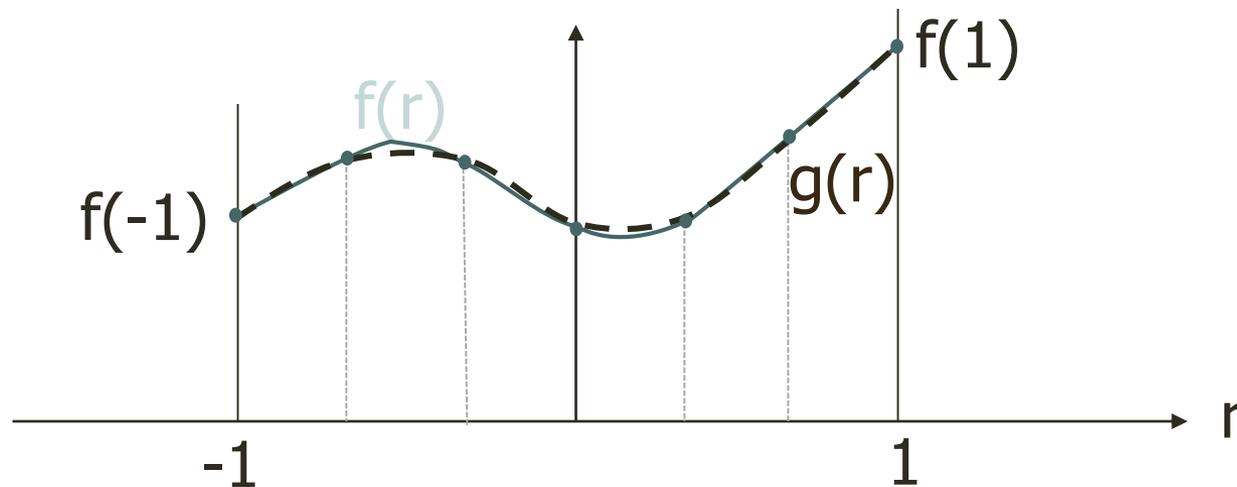
Correto para polinômios até grau
2 ($=P-1$)



NEWTON-COTES

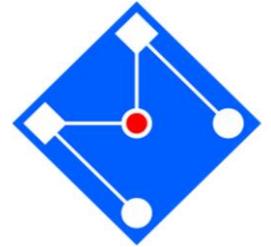
De maneira geral...

- Divida o intervalo $(-1,1)$ em P pontos de integração ($P-1$ intervalos iguais);
- Passe um polinômio de grau $P-1$ através dos P pontos (nesses pontos $g(i)=f(i)$);
- Integre o polinômio para obter um valor aproximado da integral.



Sempre válido que com 'P' pontos pode-se integrar um polinômio de grau 'P-1' de forma exata!

GAUSS



Com 'P' pontos de integração, podemos integrar um polinômio de grau $2P-1$ de forma exata **usando a integração por Gauss!!!**

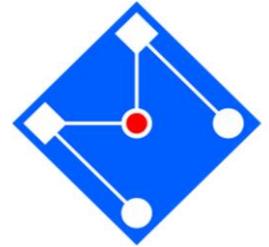
$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx \sum_{i=1}^p w_i f(r_i)$$

peso

Ponto de integração



INTEGRAÇÃO NUMÉRICA POR GAUSS



Na prática, as integrais:

$$\int_{-1}^1 f(r) dr \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s) dr ds \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s,t) dr ds dt$$

são resolvidas numericamente usando:

$$\int_{-1}^1 f(r) dr = \sum_{i=1}^p w_i f(r_i) + R_1$$

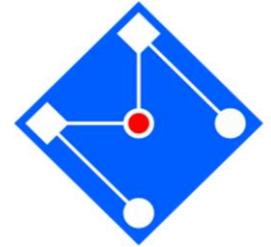
$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s) dr ds = \sum_{i,j=1}^p w_{ij} f(r_i, s_j) + R_2$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s,t) dr ds dt = \sum_{i,j,k=1}^p w_{ijk} f(r_i, s_j, t_k) + R_3$$

p é o número de termos do meu somatório...

Ou seja, p é o número de pontos de integração ou número de pontos de Gauss!

w_i , w_{ij} e w_{ijk} são funções peso e $f(r_i)$, $f(r_i, s_j)$ e $f(r_i, s_j, t_k)$ são os valores da função f avaliadas em pontos específicos de coord (i) , (i,j) e (i,j,k) , respectivamente. A pergunta é: **como calcular os pontos i,j,k e os respectivos pesos?**



QUADRATURA DE GAUSS (GAUSS LEGENDRE)

r_i : pontos de amostragem

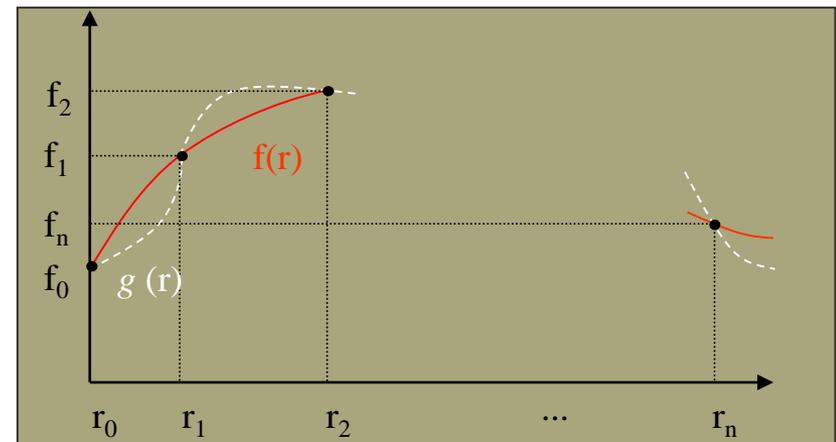
w_i : pesos

Essas são as variáveis do problema – determinar os valores para que a somatória forneça a integral exata do polinômio

Caso unidimensional

$$f(r) \cong g(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n$$

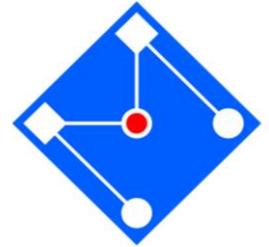
n é o grau do meu polinômio



$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx \sum_{i=1}^p w_i f(r_i)$$

peso

Ponto de integração



Como podemos escolher os pontos de integração e pesos de modo que possamos integrar exatamente um polinômio de ordem **2P-1**?

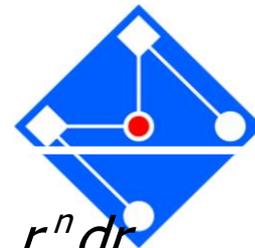
Lembre-se: a priori não sabemos a posição dos pontos...

$$f(r) \cong g(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n$$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr = \int_{-1}^1 a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n dr$$

$$= 2a_0 + \frac{2}{3} a_2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}]$$

$$\int f(r)dr = \sum_{i=1}^p w_i f(r_i) = w_1 f(r_1) + w_2 f(r_2) + \dots + w_p f(r_p)$$



$$\int_{-1}^1 f(r)dr = \int_{-1}^1 a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n dr$$

$$= 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}]$$

$$f(r_i) \approx g(r_i) = a_0 + a_1 r_i + a_2 r_i^2 + \dots + a_n r_i^n$$

$$\therefore f(r_1) \approx a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_1^2 + \dots + a_n r_1^n$$

Portanto:

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_p = 2$$

$$w_1 r_1 + w_2 r_2 + \dots + w_p r_p = 0$$

⋮

$$w_1 r_1^n + w_2 r_2^n + \dots + w_p r_p^n = \frac{1}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}]$$

Grau do polinômio

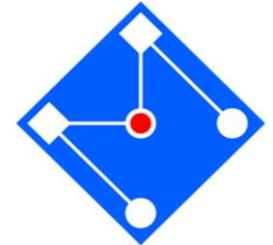
O sistema possui $(n+1)$ equações e $2(p)$ incógnitas.

Termos do somatório

Portanto, para haver solução:

$$n = 2p - 1$$

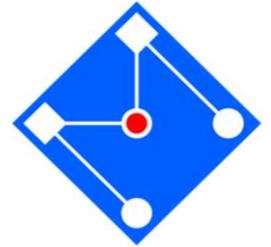
Número de termos do somatório=Pontos de Gauss (p)	Máximo grau do polinômio integrado exatamente (n)
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9



$$n = 2p - 1$$

São necessários pelo menos $(n+1)/2$ termos no somatório para que ele represente a integral exata de um polinômio de grau n .

EXEMPLO



Encontrar os pontos de amostragem e pesos para QG de 1 e 2 pontos.

Resumo

$$\int_{-1}^1 f(r) dr = \sum_{i=1}^p w_i f(r_i) = w_1 f(r_1) + w_2 f(r_2) + \dots + w_p f(r_p)$$
$$f(r_i) \approx g(r_i) = a_0 + a_1 r_i + a_2 r_i^2 + \dots + a_n r_i^n$$
$$\int_{-1}^1 f(r) dr = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}]$$

P=1 (1 Ponto de Gauss):

$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx w_1 f(r_1)$$

$$f(r) = a_0 + a_1 r$$

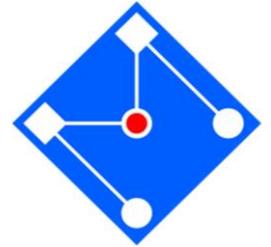
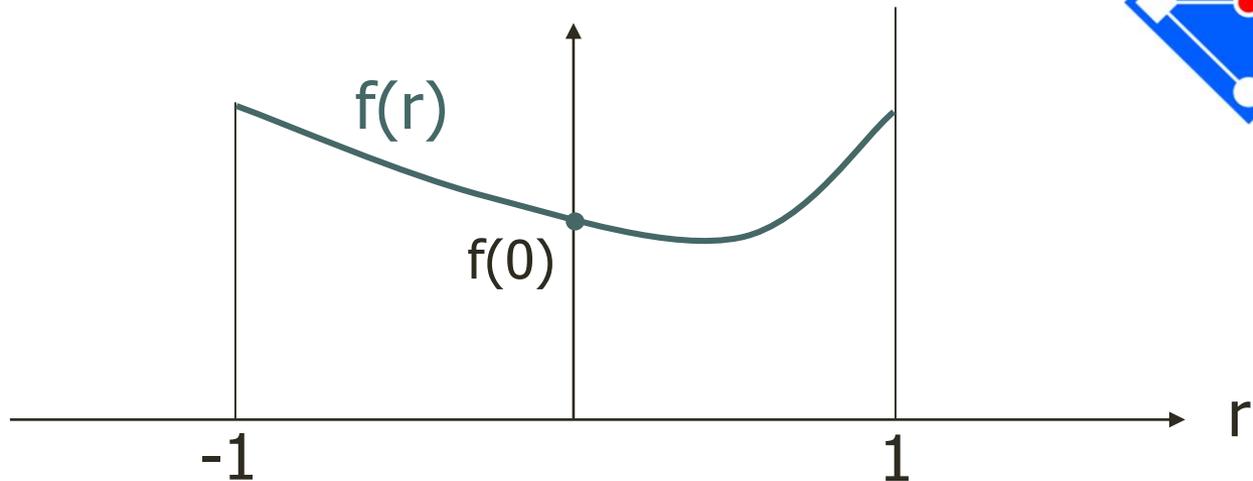
$$\int_{-1}^1 f(r) dr = 2a_0 = w_1(a_0 + a_1 r_1)$$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr = 2a_0 = a_0 w_1 + a_1 w_1 r_1$$

$$\therefore 2a_0 = a_0 w_1 + a_1 w_1 r_1$$

$$w_1 = 2$$
$$w_1 r_1 = 0$$

$$w_1 = 2; r_1 = 0$$



1 Ponto de Gauss = Regra do ponto médio:

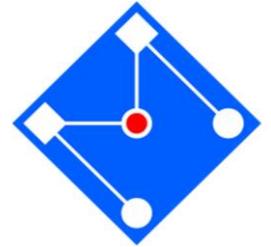
$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx 2f(0)$$

Apenas um valor de $f(r)$ é necessário.

Eficaz para constantes e polinômios lineares.

Compare com regra Trapezoidal...

P=2 (2 Pontos de Gauss):



Resumo

$$\int_{-1}^1 f(r) dr = \sum_{i=1}^p w_i f(r_i) = w_1 f(r_1) + w_2 f(r_2) + \dots + w_p f(r_p)$$

$$f(r_i) \approx g(r_i) = a_0 + a_1 r_i + a_2 r_i^2 + \dots + a_n r_i^n$$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}]$$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx w_1 f(r_1) + w_2 f(r_2)$$

$$f(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3$$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 = w_1(a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_1^2 + a_3 r_1^3) + w_2(a_0 + a_1 r_2 + a_2 r_2^2 + a_3 r_2^3)$$

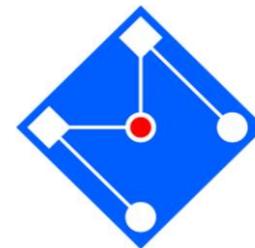
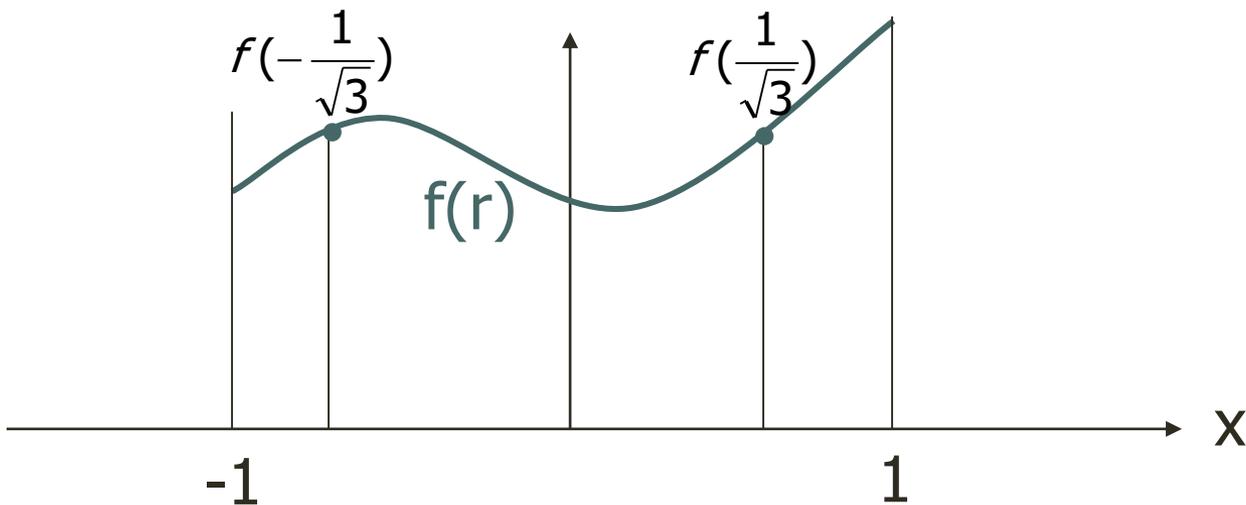
$$w_1 + w_2 = 2$$

$$w_1 r_1 + w_2 r_2 = 0$$

$$w_1 r_1^2 + w_2 r_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$w_1 r_1^3 + w_2 r_2^3 = 0$$

$$\begin{aligned} w_1 &= w_2 = 1 \\ \therefore r_2 &= -r_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

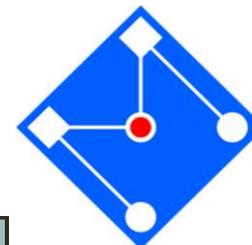


2 Pontos de Gauss :

$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

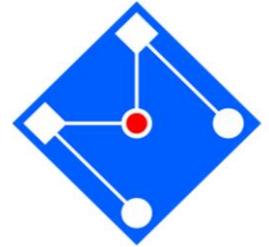
Dois valores de $f(r)$ são necessários.
Eficaz para polinômios até ordem 3.

Compare com regra de Simpson...



p	r_i	w_i
1	0,0000000000000000	2,0000000000000000
2	$\pm 0,577350269189626$	1,0000000000000000
3	$\pm 0,774596669241483$	0,5555555555555556
	0,0000000000000000	0,8888888888888889
4	$\pm 0,861136311594053$	0,347854845137454
	$\pm 0,339981043584856$	0,652145154862546
5	$\pm 0,906179845938664$	0,236926885056189
	$\pm 0,538469310195683$	0,478628670499366
	0,0000000000000000	0,5688888888888889
6	$\pm 0,932469514203152$	0,171324492379170
	$\pm 0,661209386466265$	0,360761573048139
	$\pm 0,238619186083197$	0,467913934572691

EXEMPLO:



Calcular numericamente a integral da parábola:

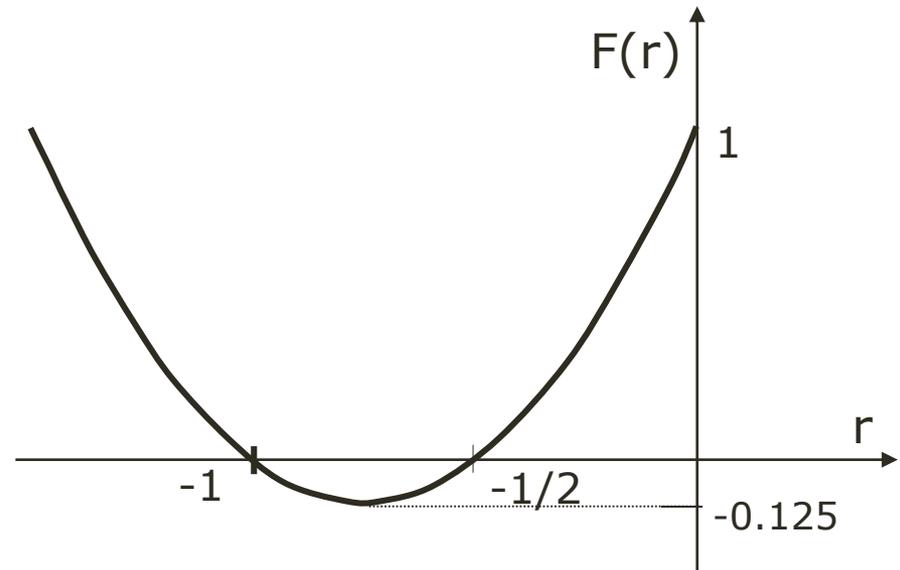
$$\int_{-1}^1 2x^2 + 3x + 1 \, dx = \frac{10}{3} = 3,3333$$

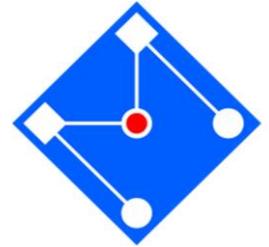
a) Usando 1 ponto de Gauss:

$$w_1 = 2$$

$$r_2 = 0$$

$$\int_{-1}^1 2r^2 + 3r + 1 \, dr = \sum_{i=1}^1 w_i F(r_i) = w_1 F_1 = 2,0 \times (2 \times 0^2 + 3 \times 0 + 1) = 2$$



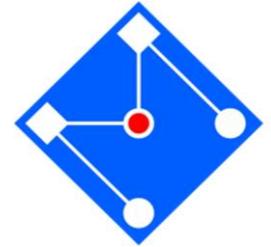


b) Usando 2 pontos de Gauss:

$$w_1 = w_2 = 1$$
$$r_2 = -r_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\int_{-1}^1 2r^2 + 3r + 1 \, dr = \sum_{i=1}^2 w_i F(r_i) = w_1 F_1 + w_2 F_2 =$$
$$= 1,0 \times \left(2x \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 3x \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 1 \right) + 1,0 \times \left(2x \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 3x \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 1 \right)$$
$$= \frac{10}{3} = 3,3333$$

Exercício: Derive as 6 condições necessárias para encontrar os pontos de integração e pesos para 3 pontos de Gauss.



Newton-Cotes

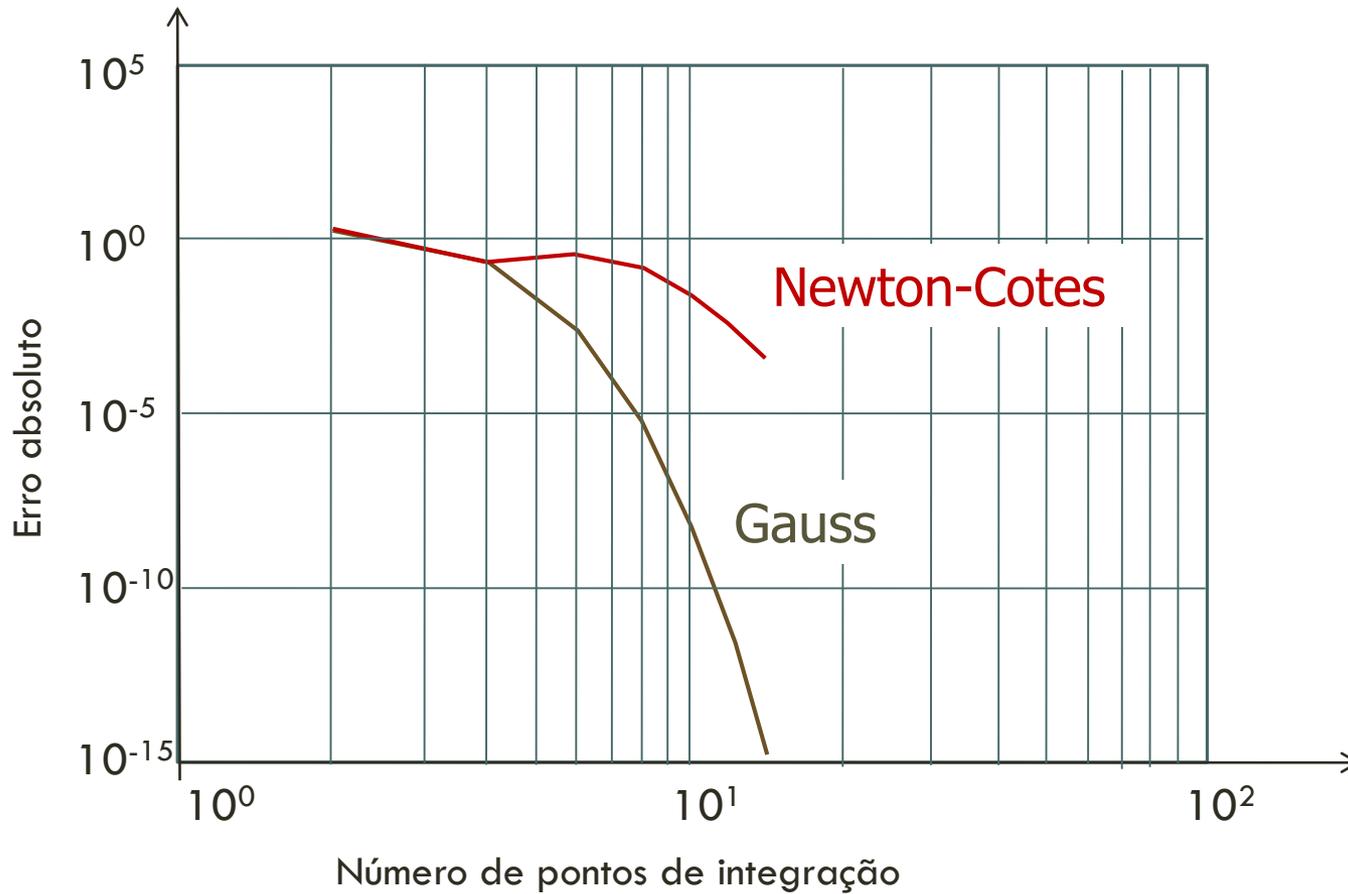
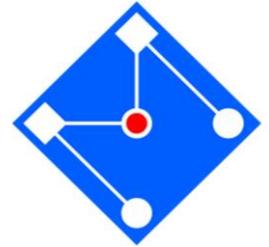
1. 'p' pontos de integração são necessários para integrar de forma exata um polinômio de grau 'p-1'
2. Maior *custo* computacional

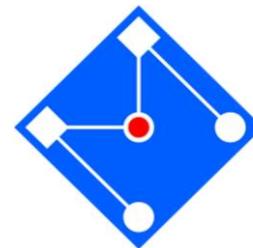
Quadratura de Gauss

1. 'p' pontos de integração são necessários para integrar de forma exata um polinômio de grau '2p-1'
2. Menor *custo* computacional
3. Convergência exponencial, erro proporcional a

$$\left(\frac{1}{2p}\right)^{2p}$$

$$\int_{-1}^1 \cos(2\pi x) dx$$





TAREFA...

$$I = \int_{-1}^1 f(r) dr \text{ onde } f(r) = r^3 + r^2$$

Integração exata

$$I = \frac{2}{3} \text{ Integre e confira...}$$

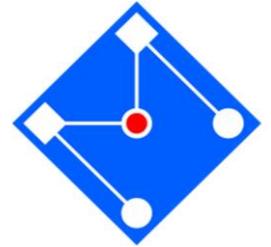
Newton-Cotes

Para integrar exatamente eu preciso de 4 pontos. Porque?

Gauss

Para integrar exatamente eu preciso de 2 pontos de Gauss. Porque?

ELEMENTO QUADRÁTICO

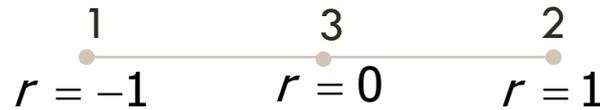


Funções de forma

$$N_1(r) = -\frac{r(1-r)}{2}$$

$$N_2(r) = \frac{r(1+r)}{2}$$

$$N_3(r) = 1 - r^2$$



Matriz de rigidez

$$\mathbf{k} = \int_{x_1}^{x_2} E\mathbf{A}\mathbf{B}^T \mathbf{B} dx = \int_{-1}^1 E\mathbf{A}\mathbf{B}^T \mathbf{B} J dr$$

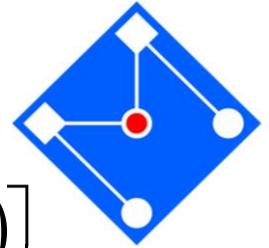
$$\mathbf{B} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(2r-1) & \frac{1}{2}(2r+1) & -2r \end{bmatrix}$$

Vetor de carregamentos nodais

$$\mathbf{f}_b = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{f}_b J dr$$

Lembram-se: Como programar estas integrais????

Supondo $L=2$ e nó no centro da barra. Isto é, supondo que o Jacobiano seja $J=1, \dots$



$$\mathbf{k} = \int_{-1}^1 E\mathbf{A}\mathbf{B}^T \mathbf{B} dr = \frac{AE}{L^2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (2r-1)^2 & (4r^2-1) & -4r(2r-1) \\ & (2r+1)^2 & -4r(2r+1) \\ & & 16r^2 \end{bmatrix} dr$$

Precisamos de **2 pontos de Gauss** para integração exata:

$$\int_{-1}^1 (2r-1)^2 dr = \left[\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)^2 \right] = 14/3$$

$$\int_{-1}^1 (2r+1)^2 dr = \left[\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right)^2 \right] = 14/3$$

$$\int_{-1}^1 (-8r^2 + 4r) dr = \left\{ \left[-8\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] + \left[-8\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] \right\} = -16/3$$

$$\int_{-1}^1 (-8r^2 - 4r) dr = \left\{ \left[-8\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] + \left[-8\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] \right\} = -16/3$$

$$\int_{-1}^1 (4r^2 - 1) dr = \left\{ \left[4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 \right] + \left[4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 \right] \right\} = 2/3$$

$$\int_{-1}^1 16r^2 dr = 16\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 16\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 32/3$$

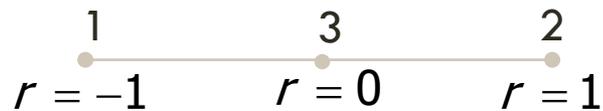
$$\mathbf{k} = \frac{AE}{3L^2} \begin{bmatrix} 14 & 2 & -16 \\ & 14 & -16 \\ & & 32 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIO: CALCULAR A MATRIZ DE RIGIDEZ PARA 1 PG

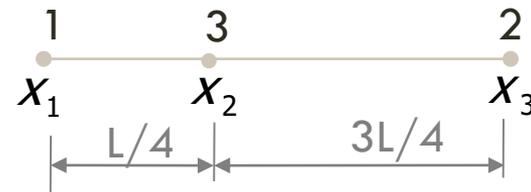


BATHE, PG. 370

Espaço natural

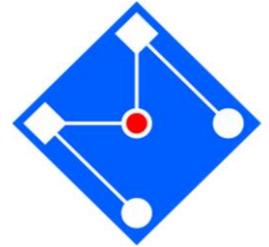


Espaço físico



ELEMENTO LINEAR

Não preciso de Gauss...



$$\mathbf{k} = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{EAB}^T \mathbf{B} dx = \int_{-1}^1 \mathbf{EAB}^T \mathbf{B} J dr$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

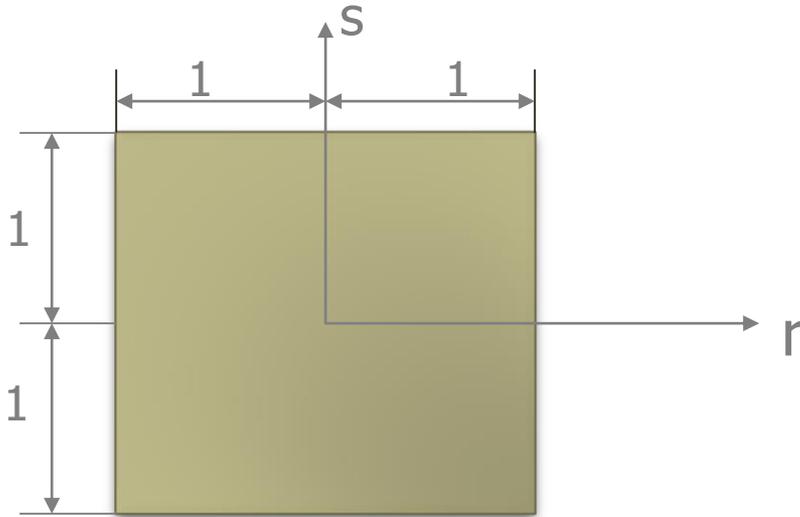
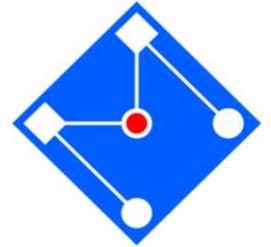


$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - r)$$

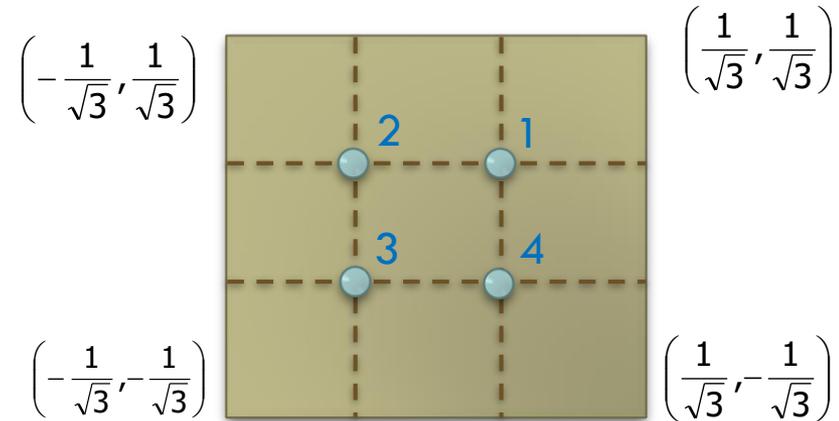
$$N_2 = \frac{1}{2}(1 + r)$$

OBS.: Não preciso de Gauss para elemento 1D linear. Certo???

PROBLEMA BIDIMENSIONAL



Coordenadas r, s dos pontos de Gauss



$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) dr ds$$

$$\approx \int_{-1}^1 \left(\sum_{j=1}^P w_j f(r, s_j) \right) dr$$

P Pontos de Gauss 1D para integrar ao longo de s

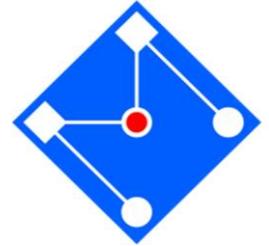
P Pontos de Gauss 1D para integrar ao longo de r

$$\approx \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P w_i w_j f(r_i, s_j)$$

, onde $w_{ij} = w_i w_j$

$$= \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P w_{ij} f(r_i, s_j)$$

2x2 Pontos de Gauss

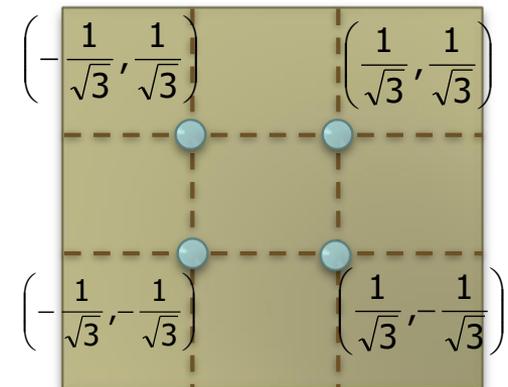


$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(rs) dr ds \approx$$

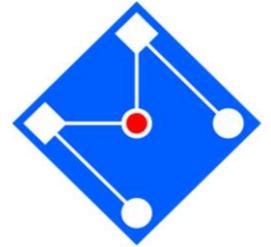
$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_{ij} f(r_i, s_j)$$

$$w_{ij} = w_i w_j = 1, \quad \forall i, j$$

$$= f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



QUANTOS PONTOS DE GAUSS USAR?

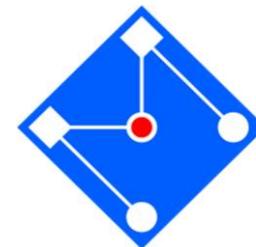


$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) dr ds \approx \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P w_{ij} f(r_i, s_j)$$

Use **P² pontos de integração** em um grid dentro do elemento e a solução será **EXATA para um polinômio de grau (2P-1)** i.e.,

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r^a s^b dr ds \stackrel{\text{exata}}{=} \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P w_{ij} r_i^a s_j^b \quad \text{para } a + b \leq 2P - 1$$

P² pontos de Gauss dá solução exata para um polinômio completo de grau (2P-1)



EXEMPLOS

Se $f(r,s)=1$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s) dr ds = 4$$

$$2P-1=0$$

$$P=1/2$$

1-ponto é suficiente

Se $f(r,s)=r$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s) dr ds = 0$$

$$2P-1=1$$

$$P=1$$

1-ponto é suficiente

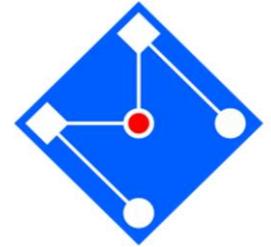
Se $f(r,s)=r^2s^2$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s) dr ds = \frac{4}{9}$$

$$2P-1=4$$

$$P=5/2$$

3x3-pontos são suficientes

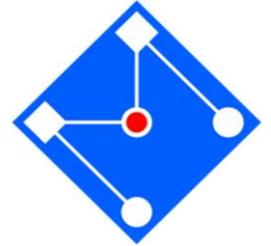


INTEGRAÇÃO “REDUZIDA” X “COMPLETA”

Integração completa: Esquema de quadratura de Gauss é suficiente para resultar na integral exata de todos os termos da matriz de rigidez se o elemento não é geometricamente distorcido.

Integração reduzida: Esquema de quadratura de Gauss é de ordem inferior àquela requerida para “integração completa”.

NÚMERO DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO

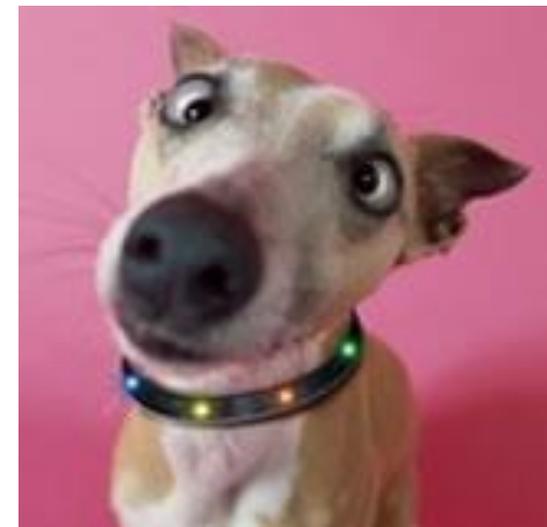


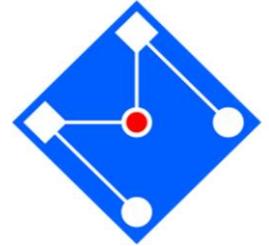
Integração numérica é mais simples que a analítica, porém não é exata. K é integrada de modo aproximado, independente do número de pontos de integração.

- Devemos usar menos pontos de integração para uma análise mais rápida...
- Ou mais pontos de integração para resultados mais precisos...

Hmm....

Recomendação Geral: NÃO USAR
integração reduzida.





Choosing the number of integration points: There are two considerations. If too many integration points are used, time is wasted without gaining any accuracy. If too few integration points are used, the stiffness matrix may be singular, or else the rate of convergence to the exact solution with mesh refinement will be reduced.

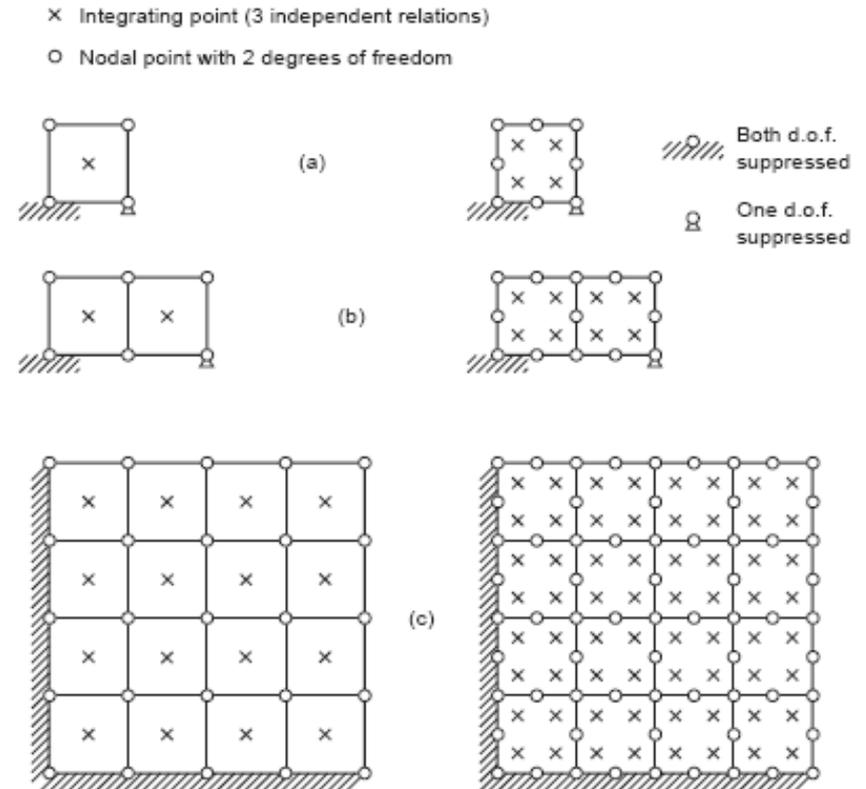
Applied Mechanics of Solids, Allan F. Bower, Chapter 8: Theory and Implementation of the Finite Element Method

http://solidmechanics.org/text/Chapter8_1/Chapter8_1.htm

INTEGRAÇÃO REDUZIDA PODE LEVAR A SINGULARIDADE DA MATRIZ

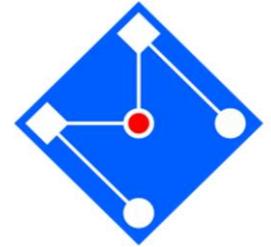
Com a integração numérica, substitui-se a integral por uma soma ponderada de relações lineares independentes dos parâmetros nodais \mathbf{u} . Essas relações lineares fornecem as informações a partir das quais a matriz de rigidez é construída. Se o número de variáveis desconhecidas supera o número de relações independentes fornecidas por todos os pontos de integração, então a matriz \mathbf{K} será singular.

The Finite Element Method.
Volume 1 – The Basis
 5th Edition – B.H. Ed.
 O.C. Zienkiewicz; R.L. Taylor



	Linear		Quadratic	
	Degree of freedom	Independent relation	Degree of freedom	Independent relation
(a)	$4 \times 2 - 3 = 5$	$1 \times 3 = 3$ singular	$2 \times 8 - 3 = 13$	$4 \times 3 = 12$ singular
(b)	$8 \times 2 - 3 = 9$	$2 \times 3 = 6$ singular	$13 \times 2 - 3 = 23$	$8 \times 3 = 24$
(c)	$25 \times 2 - 18 = 32$	$16 \times 3 = 48$	$48 \times 2 = 96$	$64 \times 3 = 192$

Fig. 9.14 Check on matrix singularity in two-dimensional elasticity problems (a), (b), and (c).



QUE ORDEM DE QG USAR PARA INTEGRAÇÃO COMPLETA????

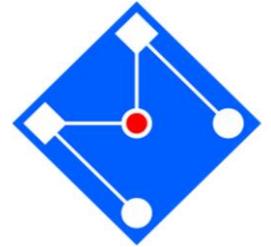
Para computar a matriz de rigidez precisamos resolver a seguinte integral,

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det(\mathbf{J}) t dr ds$$

Para um elemento que NÃO esteja distorcido,
 $\det(\mathbf{J}) = \text{constante}$

t: espessura

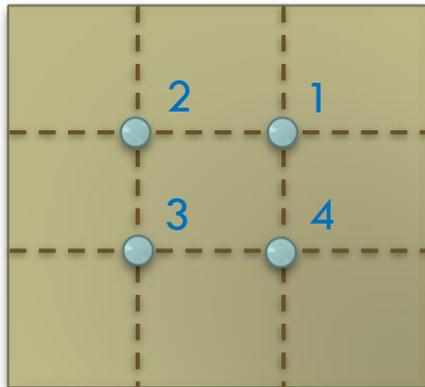
ELEMENTO QUADRANGULAR DE 4 NÓS



$$N_i \sim \begin{matrix} 1 \\ r & s \\ rs \end{matrix} \quad \mathbf{B} \sim \begin{matrix} 1 \\ r & s \end{matrix} \quad \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \sim \begin{matrix} 1 \\ r & s \\ r^2 & rs & s^2 \end{matrix}$$

Portanto, $2P-1=2$
 $P=3/2$

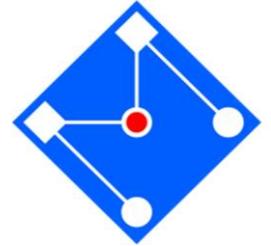
Precisamos, pelo menos de um esquema 2x2



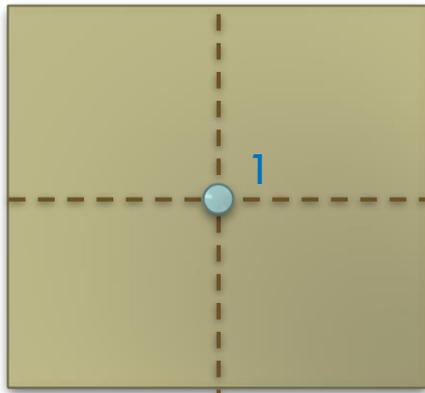
PG	r	s	w
1	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
2	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
3	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
4	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_{ij} f(r_i, s_j) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Elemento quadrangular de 4 nós — 1 PG

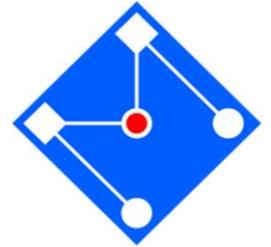


$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) dr ds \approx 4f(0,0) \quad \text{Integral reduzida!}$$



$$r_1 = 0, s_1 = 0$$
$$w_1 = 4$$

ELEMENTO SERENDIPITY DE 8 NÓS



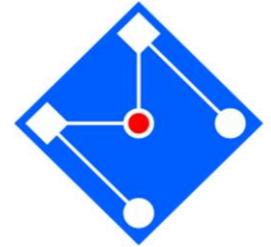
$$\begin{array}{c}
 N_i \\
 \begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & s & & t & \\
 s^2 & & st & & t^2 \\
 & s^2t & & st^2 & \\
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \mathbf{B} \\
 \begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & s & & t & \\
 s^2 & & st & & t^2 \\
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \\
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & s & & t \\
 & & & s^2 & & st & & t^2 \\
 & & s^3 & & s^2t & & st^2 & & t^3 \\
 s^4 & & s^3t & & s^2t^2 & & st^3 & & t^4 \\
 \end{array}
 \end{array}$$

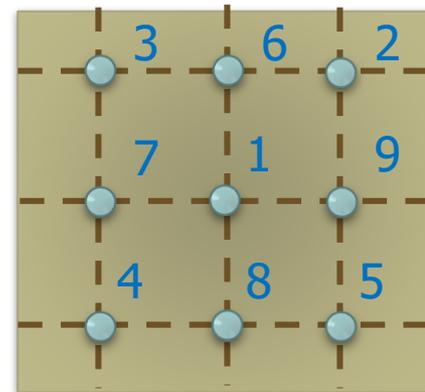
$$2P-1=4$$

$$P=5/2$$

Precisamos, pelo menos de um esquema 3x3

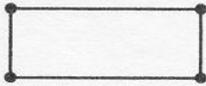
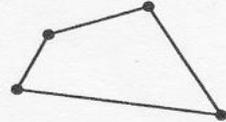
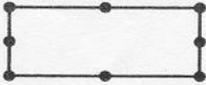
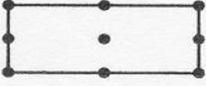
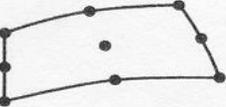
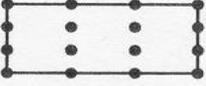
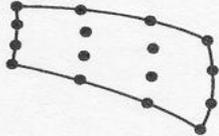


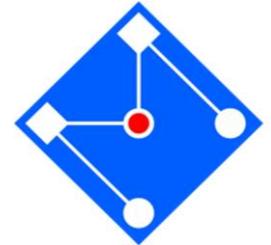
PG	r	s	w
1	0	0	64/81
2	$\sqrt{3}/5$	$\sqrt{3}/5$	25/81
3	$-\sqrt{3}/5$	$\sqrt{3}/5$	25/81
4	$-\sqrt{3}/5$	$-\sqrt{3}/5$	25/81
5	$-\sqrt{3}/5$	$\sqrt{3}/5$	25/81
6	0	$\sqrt{3}/5$	40/81
7	$-\sqrt{3}/5$	0	40/81
8	0	$-\sqrt{3}/5$	40/81
9	$\sqrt{3}/5$	0	40/81

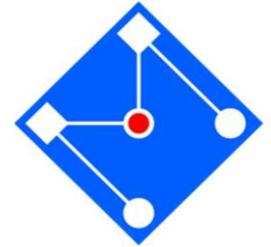


ORDEM DE INTEGRAÇÃO RECOMENDADA (BATHE)

TABLE 5.9 Recommended full Gauss numerical integration orders for the evaluation of isoparametric displacement-based element matrices (use of Table 5.7)

	Two-dimensional elements (plane stress, plane strain and axisymmetric conditions)	Integration order
4-node		2×2
4-node distorted		2×2
8-node		3×3
8-node distorted		3×3
9-node		3×3
9-node distorted		3×3
16-node		4×4
16-node distorted		4×4





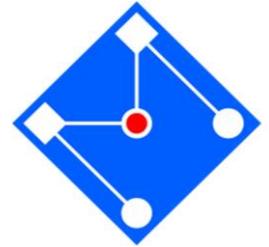
INTEGRAÇÃO REDUZIDA

Um modelo FE é geralmente impreciso e, normalmente, seu erro consiste em produzir resultados muito rígidos. Essa rigidez demasiada geralmente é agravada pelo uso de mais pontos de Gauss para integrar matrizes de rigidez do elemento, pois os pontos adicionais captam mais termos de ordem superior em K .

Estes termos resistem a alguns modos de deformação que termos de ordem inferior não e, portanto, agem de forma a enrijecer um elemento.

- Por outro lado, o uso de poucos pontos de Gauss produz uma situação ainda pior, conhecida como: instabilidade, modos espúrios, modos de energia nula, ou modo de ampulheta (hourglass).
- A instabilidade existe se um ou mais modos de deformação ocorre com deformação nula em todos os pontos de Gauss.
Se os pontos de Gauss não *sentem* a deformação, a K resultante não terá nenhuma resistência a esse modo de deformação.

Integração reduzida pode levar a modos espúrios de energia nula.



A energia de deformação de um elemento

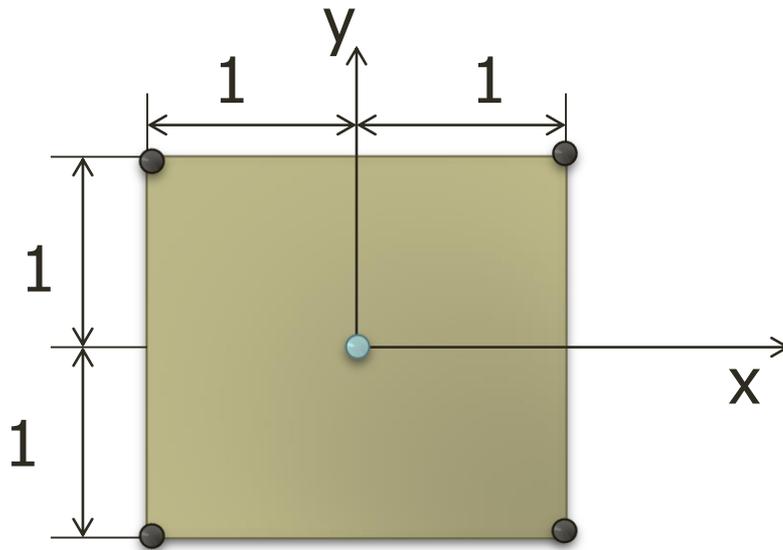
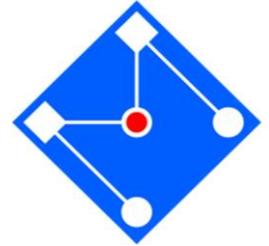
$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} = \frac{1}{2} \int_{V^e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV$$

Correspondente a um movimento de corpo rígido, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \Rightarrow U = 0$

Se $U=0$ para um modo \mathbf{d} que é diferente de modo de corpo rígido, então \mathbf{d} é conhecido como **modo espúrio de energia nula** ou **hourglass**.

Este modo é **indesejável**.

EXEMPLO: ELEMENTO QUADRANGULAR DE 4 NÓS



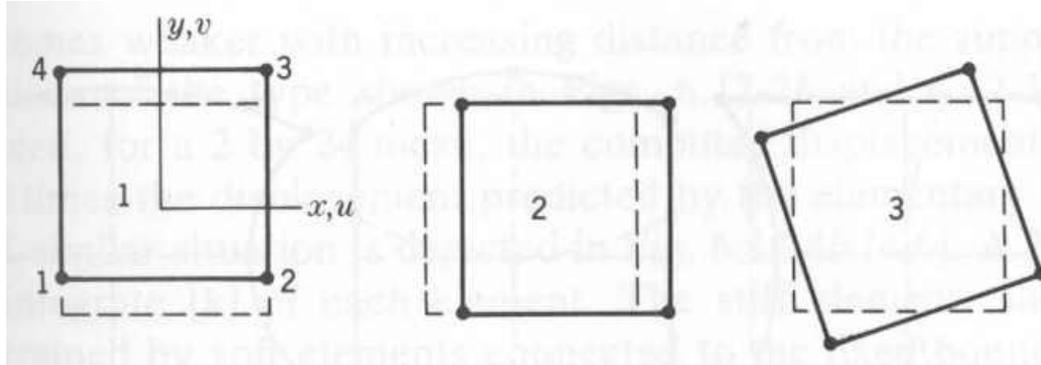
$$U = \frac{1}{2} \int_{V^e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV \approx \sum_{i=1}^{NGAUSS} w_i (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon})_i$$

Integração completa: NGAUSS=4
Elemento tem 3 modos de energia nula ou de corpo rígido

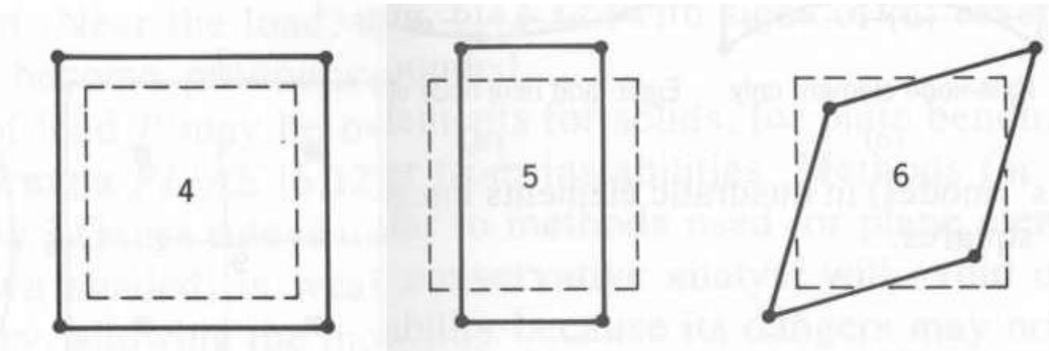
Integração reduzida: p.ex.,
NGAUSS=1

$$U \approx 4 (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon})_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

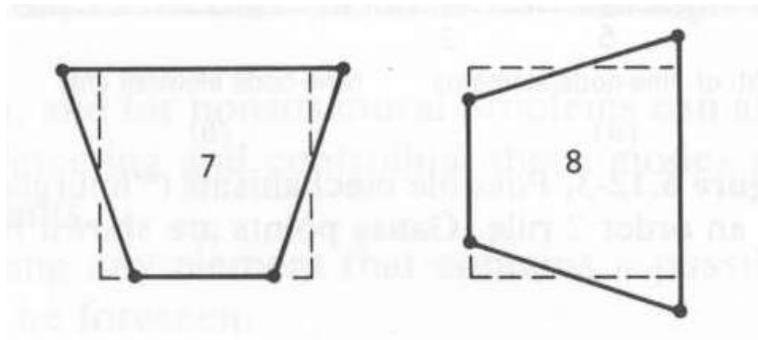
Modos possíveis de deformação para elemento quadrático bilinear:



Movimentos de corpo rígido:
Podem ser eliminados com condições de contorno apropriadas.



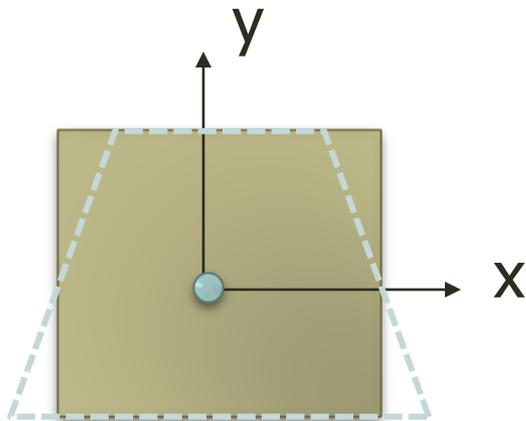
Modos de deformação constante:
Sempre produzem energia de deformação não nula.



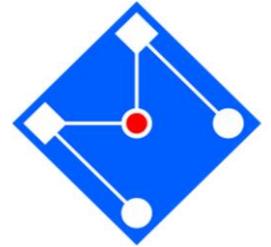
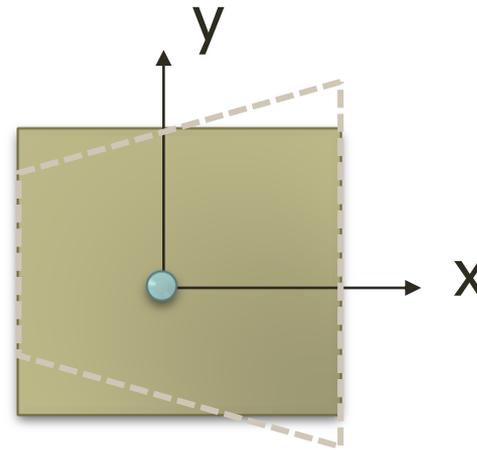
*Modos de flexão:
Produzem deformação nula na origem.*

Considere 2 campos de deslocamento

$$u = C xy$$
$$v = 0$$



$$u = 0$$
$$v = C xy$$

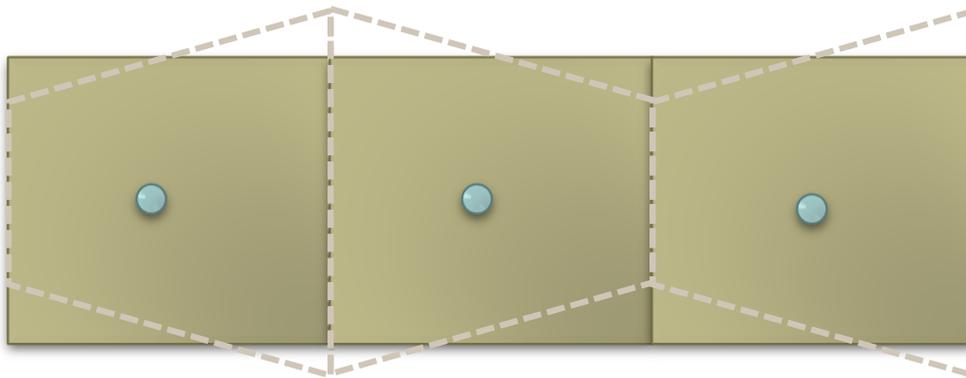
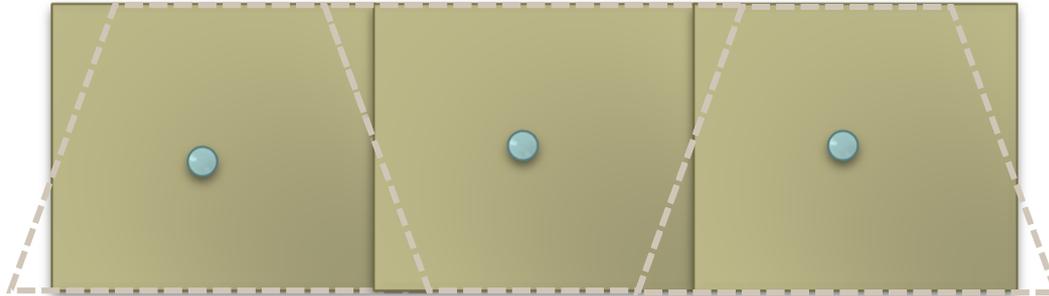
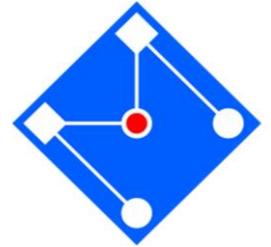


$$\text{Em } x = y = 0 \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$$

$$\Rightarrow U = 0$$

Portanto, temos dois modos de hourglass.

Propagação de modos de hourglass através de uma malha



REDUCED INTEGRATION

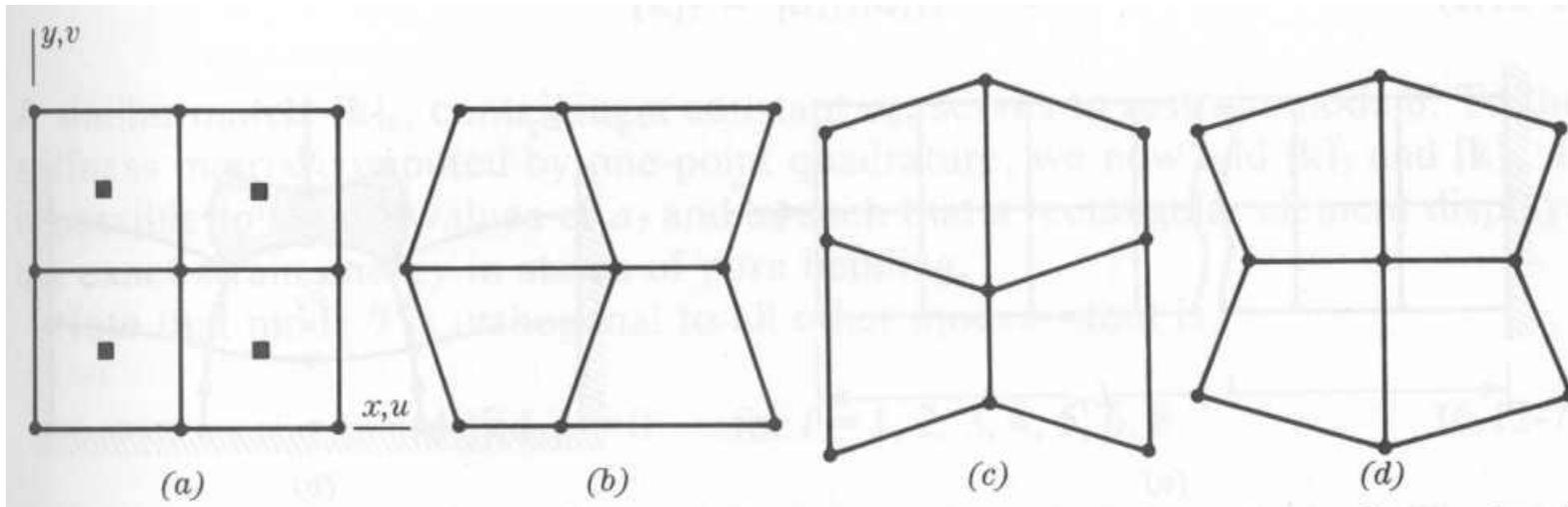
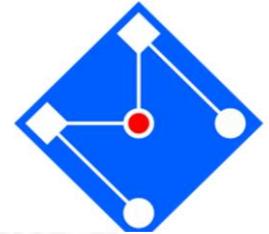
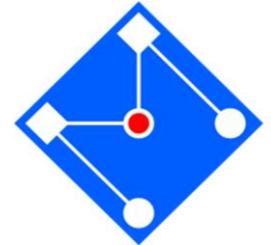


Fig. 4.6-1. (a) Undeformed plane 2 by 2 four-node square elements. Gauss points are shown by solid squares. (b,c,d) "Instability" displacement modes. (Reprinted from [2.2] by permission of John Wiley & Sons, Inc.)

three instabilities shown have the respective forms (b) $u = cxy$, $v = 0$; (c) $u = 0$, $v = -cxy$; and (d) $u = cy(1 - x)$, $v = cx(y - 1)$. We easily check that each of these displacement fields produces strains $\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = 0$ at the Gauss point, $x = y = 0$. *Nonrectangular ele-*

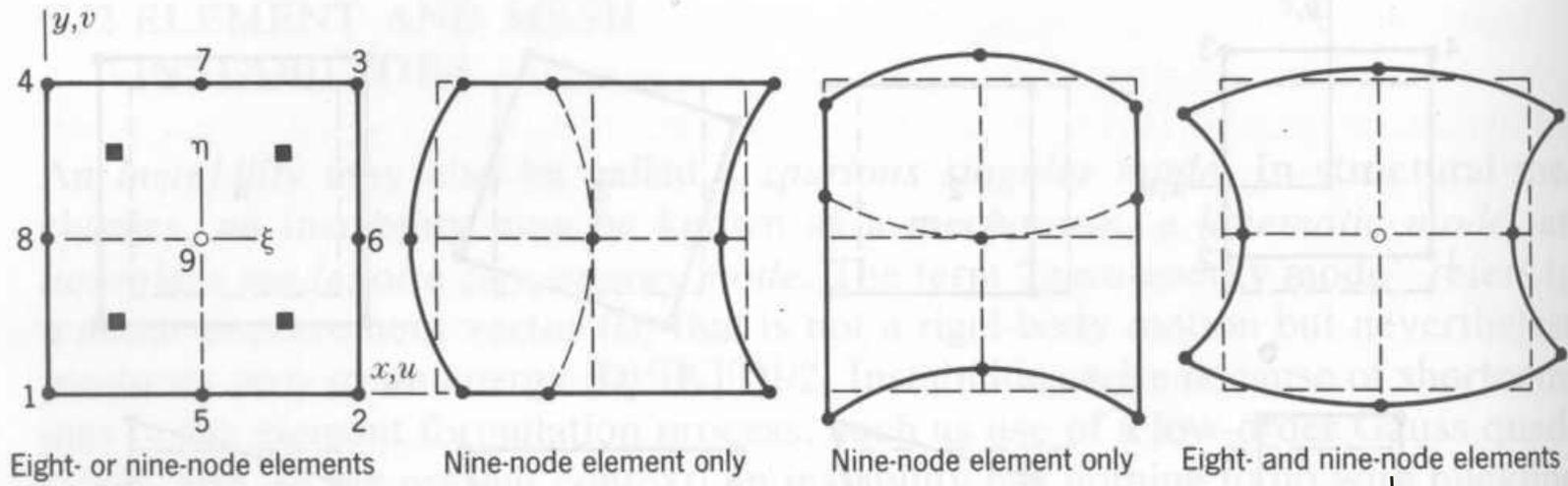
Frequentemente ocorre hourglass devido à integração reduzida em elementos de primeira ordem (quadrilátero de 4 nós e sólido de 8 nós). O elemento se torna inutilizável, a não ser que técnicas de controle sejam utilizadas.

ELEMENTOS QUADRÁTICOS



Elementos quadriláteros quadráticos usando quadratura

de Gauss 2x2 Gauss também apresentam instabilidade (hourglass).

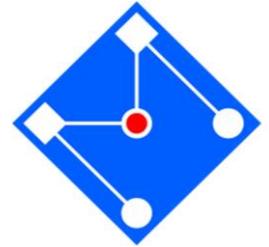


Elementos tridimensionais de segunda ordem com integração reduzida tem modos que se propagam em uma única linha de elementos.

A instabilidade em elementos de segunda ordem raramente causam problemas e, portanto, softwares comerciais como o Abaqus, não utilizam nenhuma técnica especial de controle.

↓
Quadriláteros de 8 nós (serendipity) pode apresentar hourglass, porém, não é comunicável, isto é, não se propaga em malhas de mais de 1 elemento.

COMO PREVENIR HOURGLASS?



Use quadratura de Gauss de ordem superior na formulação.

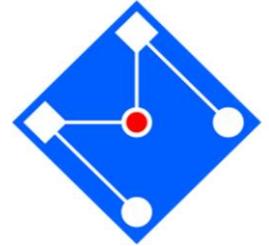
Pode-se artificialmente "enrijecer" os modos espúrios através de funções de penalidade. O método da rigidez artificial sugerido por Flanagan and Belytschko (1981) funciona em casos lineares e problemas com não linearidade branda.

Evite elementos com instabilidades conhecidas!

O controle do hourglass depende também do carregamento aplicado na estrutura: por exemplo, carregamento pontual irá iniciar hourglass mais facilmente que carregamento distribuído.

Hourglass é importante de ser evitado em problemas de autovalores e autovetores: a baixa rigidez dos modos espúrios pode criar modos irrealis com baixas frequências.

It has long been known that a finite element model gives a stiffness which is too high. Using reduced integration so as to underestimate the element stiffness has been accepted as one way to improve the results. Reduced integration has been especially useful in problems with constraints, such as material incompressibility. There are situations where it is preferable to use fewer integration points and purposely make the stiffness singular.



Finite Element Analysis with Error Estimators

An Introduction to the FEM and Adaptive Error Analysis for Engineering Students

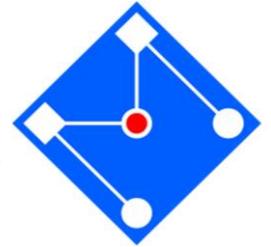
J. E. Akin

<http://www.mems.rice.edu/~akin/Elsevier/>

Reduced integration should not be used if cost reduction is the only motivation.

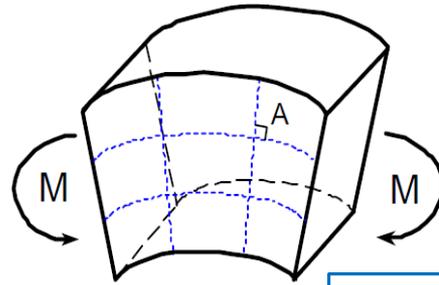
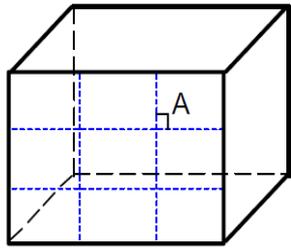
Hughes, T. J. R., 1987, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc.

VANTAGENS DA INTEGRAÇÃO REDUZIDA

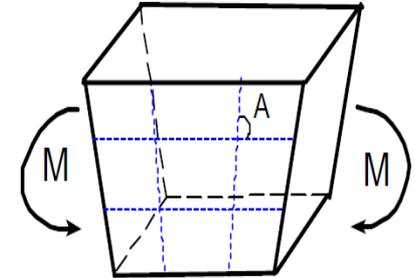
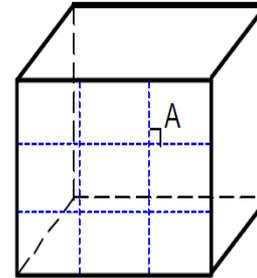


Usualmente, essa parece ser uma aproximação muito pobre, mas provou oferecer vantagens significativas, em alguns casos:

- Para elementos de segunda ordem, pontos de integração reduzida têm a propriedade de ponto Barlow (Barlow, 1976): as tensões são calculadas a partir das funções de interpolação com maior precisão nestes pontos do que em qualquer outra parte no elemento.
- Para os elementos de primeira ordem, o método de deformação uniforme gera uma deformação média exata sobre o volume do elemento. Importante quando o modelo constitutivo não é linear, uma vez que as deformações que passam para as rotinas da lei constitutiva são uma melhor representação dos valores reais.
- Em certos cenários, elementos da malha se tornam muito rígidos, devido a suposições inconsistentes. Este fenômeno, denominado locking, pode ser causado por geometrias destorcidas de elementos (geralmente quando uma de suas dimensões é muito maior que as demais) ou, em certos casos, pela aproximação feita pela Quadratura Gaussiana. Neste último caso, a escolha de mais pontos de Gauss leva a capturar os termos de mais alto grau da matriz de rigidez. Esses termos levam a uma maior resistência do elemento, criando um elemento super-rígido.

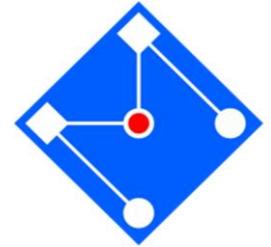


Situação ideal, a estrutura sujeita a flexão pura se deforma de forma curva...



... o que não é possível para elementos de primeira ordem com integração completa. Devido à mudança do ângulo A , uma tensão cisalhante artificial é introduzida. Isso significa que a energia de deformação do elemento está produzindo deformação cisalhante ao invés de deformação de flexão.

Shear locking pode ser resolvido utilizando malhas mais refinadas; elementos de mais alta ordem, que tenham compatibilidade com a deformação por flexão; e, incrivelmente, reduzindo a ordem de integração do elemento.



TENSÕES E PONTOS DE GAUSS

In more mundane situations, and with various element types, it is not hard to realize that strains are likely to vary over an element and are therefore likely to be more accurate at some locations than others. It happens that the locations of greatest accuracy are apt to be the same Gauss points that were used for integration of the stiffness matrix [3.2, 4.4]. Consider Fig. 4.7-2, for example, which shows a portion of a beam in which shear strain is γ_{xy} constant along the x axis. The shear strain calculated by FE displays a quadratic variation that is most accurate at x coordinates of the Gauss points.

In summary, it is common practice to use an order 2 Gauss rule (four points) to integrate k of four- and eight-node plane elements, and common practice to compute strains and stresses at these same points. Similarly, three-dimensional elements often use eight Gauss points for stiffness integration and stress calculation. Stresses at nodes or at other element locations are obtained by extrapolation or interpolation from Gauss point values.

Finite element modeling for stress analysis,

Robert D. Cook,

University of Wisconsin – Madison,

Ed. John Wiley & Sons, Inc.

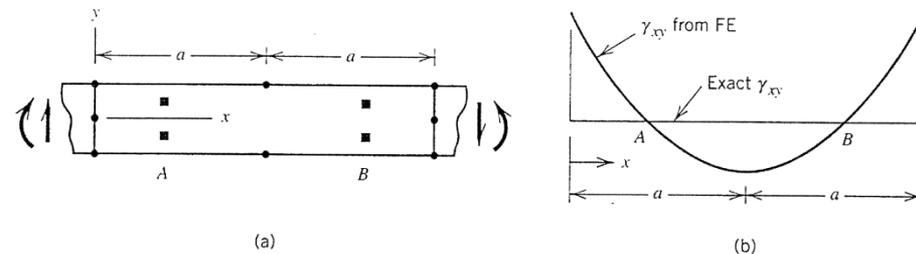
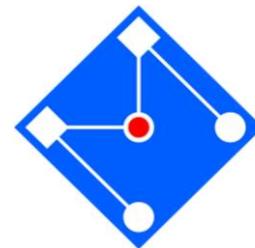


Fig. 4.7-2. (a) Portion of a beam modeled by a single layer of eight-node elements. (b) Shear strain along the x axis.



IMPLEMENTAÇÃO

Definir os elementos, funções de forma, pontos de integração

Montar matriz de rigidez do elemento, matriz de rigidez global

Montar o vetor de forças

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Calcular reações de apoio

Testar equilíbrio

Definir os elementos, funções de forma, pontos de integração

Subdividir a estrutura em elementos com geometria simples

Aproximar os deslocamentos em cada elemento

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}\mathbf{d}$$

Montar matriz de rigidez do elemento, matriz de rigidez global

Definir a equação de equilíbrio do elemento

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad \mathbf{F}^e = \int_V \mathbf{V}^T \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{X} dA + \sum_i F_i$$

Montar o vetor de forças

Reunir a contribuição de cada elemento para formar e resolver a equação de equilíbrio da estrutura, impondo as condições de contorno

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Recuperar os deslocamentos nodais de cada elemento e usá-los para determinar as deformações e os esforços da estrutura,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{d}$$

Calcular reações de apoio

Testar equilíbrio

Analisar o erro da solução e identificar zonas da estrutura a refinar a malha ou aumentar o grau de aproximação dos elementos.

```

for i=1:4
    if i==1 r=-0.577350269;s=r;
        elseif i==2 r=-0.577350269;s=-r;
            elseif i==3 r= 0.577350269;s=r;
                elseif i==4 r= 0.577350269;s=-r;
                    end
    N1r=-(1-s)/4; N2r=(1-s)/4;
    N3r=(1+s)/4; N4r=-(1+s)/4;
    N1s=-(1-r)/4; N2s=-(1+r)/4;
    N3s=(1+r)/4; N4s=(1-r)/4;
    J(1,1)=N1r*x1+N2r*x2+N3r*x3+N4r*x4;
    J(1,2)=N1r*y1+N2r*y2+N3r*y3+N4r*y4;
    J(2,1)=N1s*x1+N2s*x2+N3s*x3+N4s*x4;
    J(2,2)=N1s*y1+N2s*y2+N3s*y3+N4s*y4;
    Jinv=inv(J);
    N1x=Jinv(1,1)*N1r+Jinv(1,2)*N1s;
    N2x=Jinv(1,1)*N2r+Jinv(1,2)*N2s;
    N3x=Jinv(1,1)*N3r+Jinv(1,2)*N3s;
    N4x=Jinv(1,1)*N4r+Jinv(1,2)*N4s;
    N1y=Jinv(2,1)*N1r+Jinv(2,2)*N1s;
    N2y=Jinv(2,1)*N2r+Jinv(2,2)*N2s;
    N3y=Jinv(2,1)*N3r+Jinv(2,2)*N3s;
    N4y=Jinv(2,1)*N4r+Jinv(2,2)*N4s;
    B=[N1x 0 N2x 0 N3x 0 N4x 0 ;
        0 N1y 0 N2y 0 N3y 0 N4y ;
        N1y N1x N2y N2x N3y N3x N4y N4x];
    B_e=B+B_e;
    k_e=B'*C*B*t*det(J)+k_e;
end

```

REVISAR O LOOP PODE NÃO FUNCIONAR

```

% cm : conective matrix
%row n stores nodes of element n

```

```

g(1)=ngle*cm(el_i,1)-(ngle-1);
g(2)=g(1)+1;
g(3)=ngle*cm(el_i,2)-(ngle-1);
g(4)=g(3)+1;
g(5)=ngle*cm(el_i,3)-(ngle-1);
g(6)=g(5)+1;
g(7)=ngle*cm(el_i,4)-(ngle-1);
g(8)=g(7)+1;
k_aux=zeros(dofg,dofg);
for i=1:8
    for j=1:8
        k_aux(g(i),g(j))=k_e(i,j);
    end
end
k_g=k_g+k_aux;

```

TRIÂNGULO

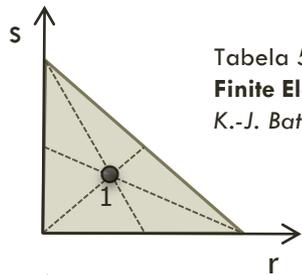
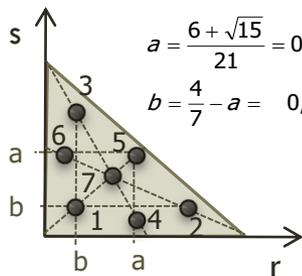
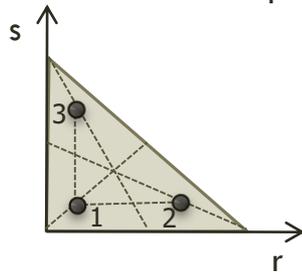
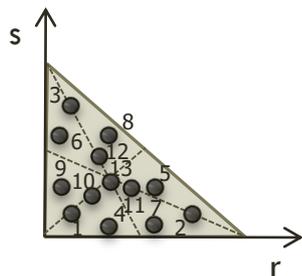


Tabela 5.8
Finite Element Procedures
K.-J. Bathe



$$a = \frac{6 + \sqrt{15}}{21} = 0,470142064105115$$

$$b = \frac{4}{7} - a = 0,101286507323456$$



Grau de precisão	No. Pontos	Coordenadas		Pesos w_i
		r_i	s_i	
1	1	1/3	1/3	1/2
2	3	1/6 2/3 1/6	1/6 1/6 2/3	1/6
5	7	b 1-2b b a a 1-2a 1/3	b b 1-2b 1-2a a a 1/3	0,1259391805448 (1-3) 0,1323941527885 (4-6) 0,225 (7)
7	13	0,0651301029022 0,8697397941956 0,0651301029022 0,3128654960049 0,6384441885698 0,0486903154253 0,6384441885698 0,3128654960049 0,0486903154253 0,6384441885698 0,0486903154253 0,2603459660790 0,4793080678419 0,2603459660790 1/3	0,0651301029022 0,0651301029022 0,8697397941956 0,0486903154253 0,3128654960049 0,6384441885698 0,0486903154253 0,6384441885698 0,3128654960049 0,2603459660790 0,2603459660790 0,4793080678419 0,2603459660790 1/3	0,0533472356088 (1-3) 0,0771137608903 (4-9) 0,1756152574332 (10-12) -0,1495700444677 (13)

HEXA

Grau de precisão	No. Pontos	Coordenadas			Pesos w_i
		r_i	s_i	t_i	
2	4	0 $\pm \sqrt{2/3}$	$\pm \sqrt{2/3}$ 0	$\sqrt{1/3}$ $\sqrt{1/3}$	2
3	6	$1/\sqrt{6}$ $-1/\sqrt{6}$ $-2/\sqrt{3}$ $2/\sqrt{3}$	$\pm 1/\sqrt{2}$ $\pm 1/\sqrt{2}$ 0 0	$-1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$ $-1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$	4/3
3	6	± 1 0 0	0 ± 1 0	0 0 ± 1	4/3
5	14	$\pm a$ 0 0 $\pm b$	0 $\pm a$ 0 $\pm b$	0 0 $\pm a$ $\pm b$	320/361 (1-6) 121/361 (7-10)
7	34	$\pm a$ 0 0 $\pm a$ 0 $\pm a$ $\pm b$ $\pm c$	0 $\pm a$ 0 $\pm a$ $\pm a$ 0 $\pm b$ $\pm c$	0 0 $\pm a$ 0 $\pm a$ $\pm a$ $\pm b$ $\pm c$	0,025422453185103 (1-3) 0,058393137863189(4-6) 0,041425537809187(7-12)

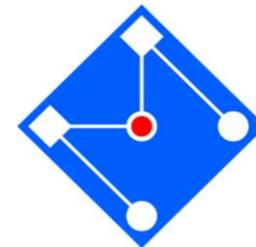
$$a = \sqrt{19/30} \quad b = \sqrt{19/33}$$

$$a = 0,925820099772552$$

$$b = 0,330814963699288$$

$$c = 0,734125287521150$$

TETRA

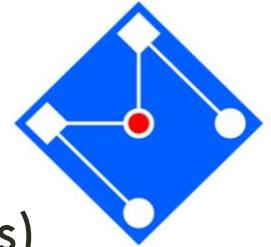


$$a = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{20} = 0,5854101966249685$$

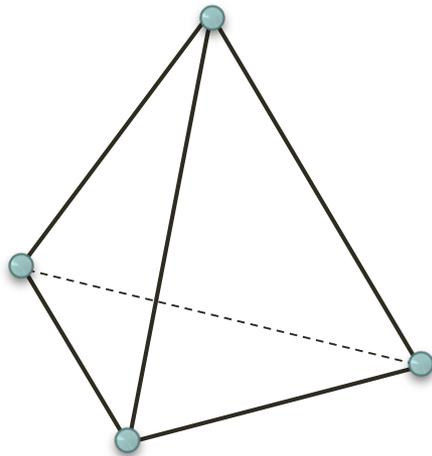
$$b = \frac{5 - \sqrt{5}}{20} = 0,1381966011250105$$

Grau de precisão	No. Pontos	Coordenadas			Pesos w_i
		r_i	s_i	t_i	
1	1	1/4	1/4	1/4	1/6
2	4	a b b b	b a b b	b b a b	1/4
3	5	1/4 1/2 1/6 1/6 1/6	1/4 1/6 1/2 1/6 1/6	1/4 1/6 1/6 1/2 1/6	-4/5 (1) 9/20 (2-5)

ELEMENTO TRIANGULAR

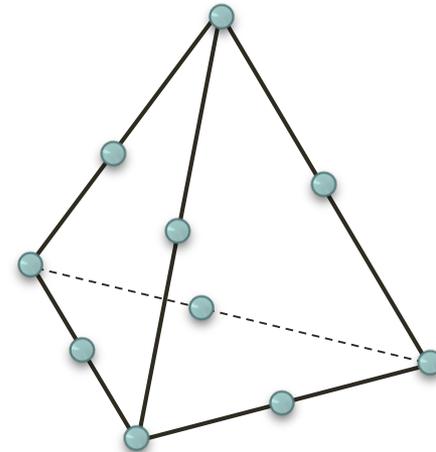


Linear (4-nós)



Funciona para análise térmica,
ruim para análise estrutural

Tetraedro quadrático (10-nós)



Muito boa escolha para análise
térmica, bem como para análise
estrutural

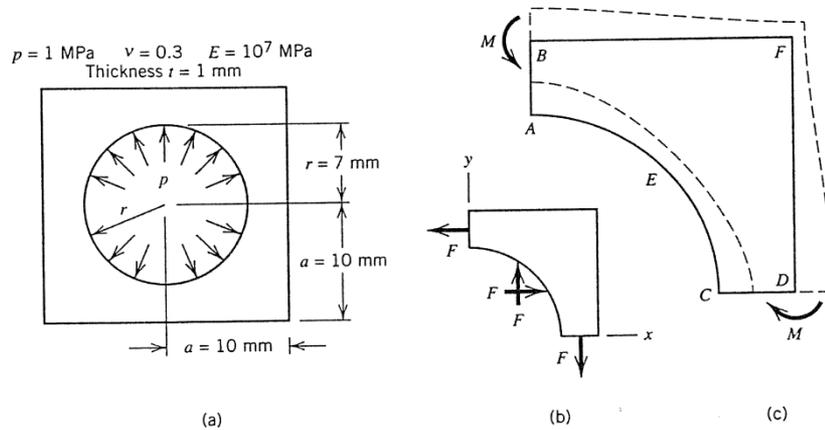
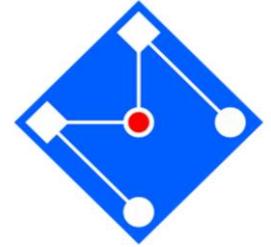


Fig. 3.12-1. (a) Flat plate with central hole loaded by internal pressure. (b) Forces that act on one quadrant. (c) The anticipated displaced shape, greatly exaggerated, is shown by dashed lines.

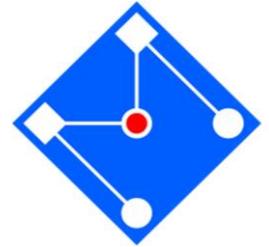
Preliminary Analysis. Before undertaking a FE analysis we examine the problem in a physical way and make simple calculations, in order to anticipate where stresses will be largest, prepare a good FE model, and obtain approximate results for subsequent comparison with FE results.

Structure, geometry, and loading are all symmetric with respect to horizontal and vertical centerlines. This means that deflections and stresses will have the same symmetries and we can consider a single quadrant (symmetry is discussed in Section 4.12). Forces F that act on a representative quadrant are shown in Fig. 3.12-1b. It is easy to calculate F exactly by statics. The average normal stress on horizontal and vertical cross sections then follows.

$$F = prt = 7 \text{ N} \quad \text{and} \quad \sigma_{\text{ave}} = \frac{F}{(a-r)t} = 2.3 \text{ MPa} \quad (3.12-1)$$

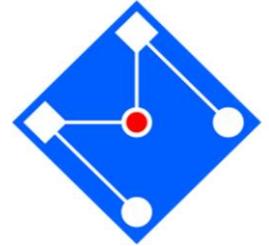
Deformations must be symmetric with respect to horizontal and vertical centerlines, and

ORDEM DE INTEGRAÇÃO RECOMENDADA (BATHE)



Elemento	No. de Nós	No. PG para integração completa
Triângulo	3	1
Triângulo	6	4
Quadrilátero	4	4 (2x2)
Quadrilátero	8	9 (3x3)
Quadrilátero	9	9 (3x3)
Quadrilátero	16	16 (4x4)
Tetraedro	4	1
Tetraedro	10	4
Sólido	8	8
Sólido	20	27

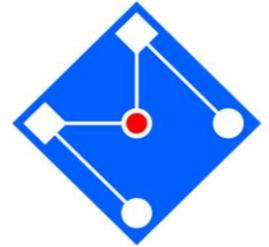
REQUISITOS PARA SE FAZER UMA ANÁLISE EM EF



A obtenção de resultados confiáveis requer conhecimento teórico estrutural!

- Conhecimento da área (estrutural, térmica, etc.);
- Do entendimento físico do problema e habilidade para resolver uma versão simplificada via métodos analíticos;
- Conhecimento das limitações e aproximações utilizadas no software – inclui entendimento do comportamento dos elementos para selecionar o elemento correto, o número de elementos e sua distribuição na malha;
- Avaliar os resultados criticamente a fazer modificações no modelo para melhorar a precisão.

“BEST PRACTICES”

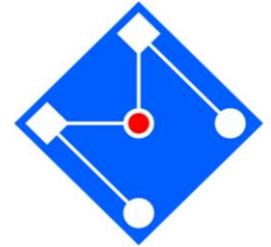


Um comitê para direcionar a tendência de análise estrutural pelo MEF, ASME PTC 60, publicou um guia, em 2006, para “V&V” (Verification and Validation), intitulado *Guide for Verification and Validation in Computational Mechanics*.

Oferece à comunidade de mecânica estrutural uma linguagem comum (glossário de termos), uma estrutura conceitual e orientação geral para a execução de V & V, com discussões sobre os fatores que devem ser considerados.

NÃO é um guia passo-a-passo!

“BEST PRACTICES”



Planejamento da análise

Modelo do material

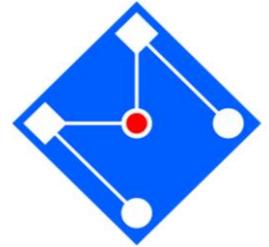
Modelo da geometria

- Elemento
- Malha
- Simplificações

Apoios e carregamentos

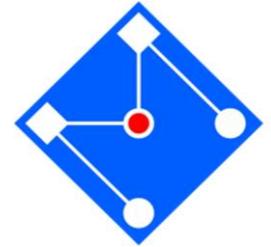
Verificação

CODE GUIDANCE ON USING FEA



ASME VIII Div2 2007:

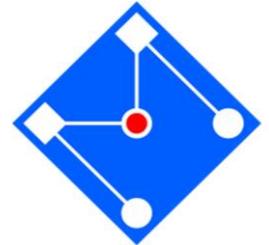
- “The Committee recognizes that tools and techniques used for design and analysis change as technology progresses and expects engineers to use good judgement in the application of these tools...”
- **“... The Code neither requires nor prohibits the use of computers. However, designers and engineers using computer programs for design or analysis are cautioned that they are responsible for all technical assumptions inherent in the programs they use and they are responsible for the application of these programs to their design.”**



VANTAGENS DO MEF

- Aplicação a qualquer problema de campo:
 - Tensões, transferência de calor, percolação, etc.
- Não há restrições sobre o carregamento e as condições de contorno do problema.
- O material pode variar de elemento para elemento.
- Não há restrição quanto a geometria do problema.
- Geometrias precisas.
- Um mesmo modelo pode incluir componentes com diferentes comportamentos:
 - Barras, vigas, placas, cascas, sólidos, etc.

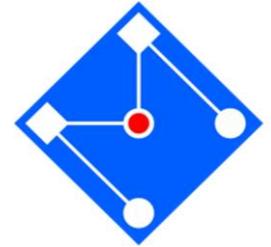
PORÉM...



Erros de dados – geometria (uso de opções default do software – espessura da casca, atrito, etc...), propriedades do material (às vezes, somente erros em unidades!), condições de contorno (esquecimento de algum suporte), etc...

Erros de modelamento incluem elemento com formulação inadequada, malha “pobre” e erro numérico.

Erros de fundamento: a falta de fundamentos (seja da teoria da ferramenta de elementos finitos ou de análise estrutural) impede o conhecimento das restrições contidas na análise.



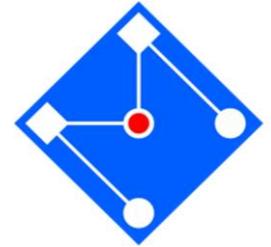
ENFIM,

MEF não é uma caixa preta; é uma ferramenta que não se deve abusar...

É uma aproximação!

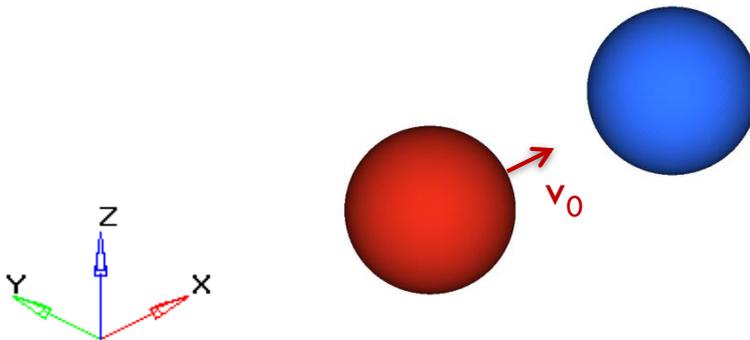
Cuidado no modelamento e análise e interpretação de resultados!

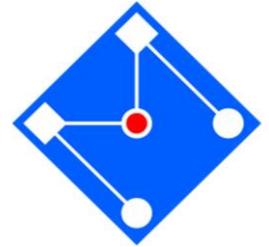
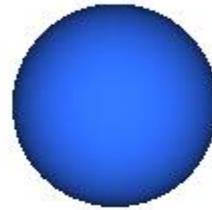
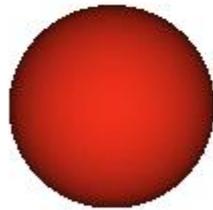
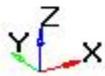




IMPACTO DE DUAS ESFERAS DE ALUMÍNIO

As esferas azul e vermelha são de aço, e possuem o mesmo diâmetro $D=10\text{mm}$. Impõe-se uma velocidade inicial de $v_0=10\text{m/s}$ na direção x à esfera vermelha.

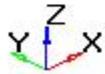
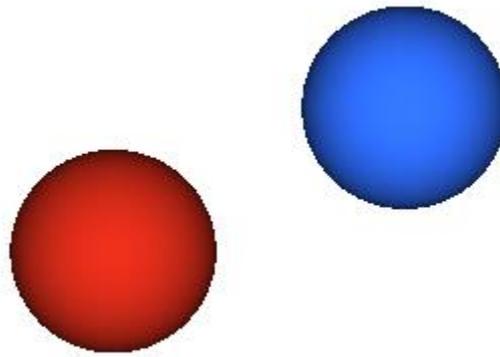
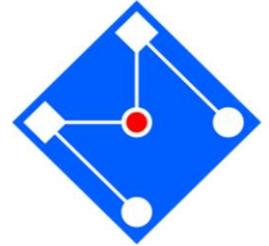




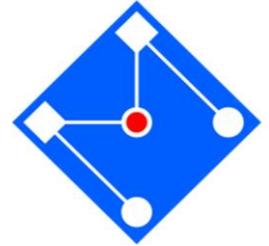
O filme mostra como se comportam as esferas quando a modelagem está correta....

GARBAGE IN...

GARBAGE OUT...



Onde está o erro????



“ Finite Element Analysis makes a *good* engineer *great*,

and a *bad* engineer *dangerous* !”

Robert D. Cook, Professor of Mechanical Engineering
University of Wisconsin, Madison



FIM DO CURSO

